Volumes finis pour les problèmes elliptiques hétérogènes anisotropes sur maillages généraux

Partie 2

Franck BOYER

Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités
CNRS / Université Paul Cézanne

Ecole d'été du GDR MOAD
Fréjus, 31 Aout - 3 Septembre 2009

1. QUELQUES GRANDES CLASSES DE MÉTHODES
   - Schémas MPFA
   - Schémas diamants
   - Schémas VF monotones non-linéaires
   - Schémas DDFV
   - Schémas mimétiques
   - Schémas VF mixtes
   - Schémas SUCCES / SUSHI
2. COMPARAISONS : BENCHMARK FVCA 5
   - Test 1 : Anisotropie modérée
   - Test 3 : Ecoulement oblique
   - Test 4 : Faille verticale
   - Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène
   - Test 8 : Source ponctuelle
3. BILAN

1. QUELQUES GRANDES CLASSES DE MÉTHODES
   - Schémas MPFA
   - Schémas diamants
   - Schémas VF monotones non-linéaires
   - Schémas DDFV
   - Schémas mimétiques
   - Schémas VF mixtes
   - Schémas SUCCES / SUSHI
2. COMPARAISONS : BENCHMARK FVCA 5
   - Test 1 : Anisotropie modérée
   - Test 3 : Ecoulement oblique
   - Test 4 : Faille verticale
   - Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène
   - Test 8 : Source ponctuelle
3. BILAN

Problèmes linéaires $\quad -\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u) = f$

- **Schémas purement cell-centered**
  - MPFA **(Aavatsmark et al. '98 → '08)** **(Edwards et al. '06,'08)**
  - Schémas diamant **(Coudière-Vila-Villedieu '99, '00)** **(Manzini et al ... '04 → '07)**
  - SUSHI (version barycentrique) = SUCCES **(Eymard-Gallouet-Herbin '08)**

PROBLÈMES LINÉAIRES $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f$

- SCHÉMAS PUREMENT CELL-CENTERED
  - MPFA **(Aavatsmark et al. '98 → '08)** **(Edwards et al. '06,'08)**
  - Schémas diamant **(Coudière-Vila-Villedieu '99, '00)** **(Manzini et al ... '04 → '07)**
  - SUSHI (version barycentrique) = SUCCES **(Eymard-Gallouet-Herbin '08)**
- SCHÉMAS VF MONOTONES NON-LINÉAIRES
  - Schémas diamant non-linéaire **(Bertolazzo-Manzini '07)**
  - NMFV **(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)**

Zoologie

Problèmes linéaires $-\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u) = f$

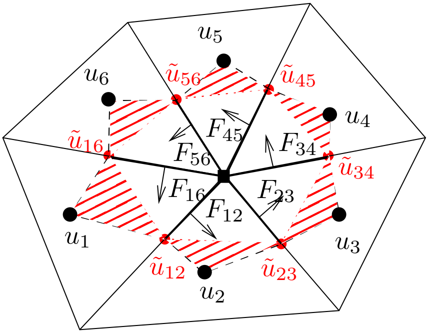
- Schémas purement cell-centered
  - MPFA **(Aavatsmark et al. '98 → '08)** **(Edwards et al. '06,'08)**
  - Schémas diamant **(Coudière-Vila-Villedieu '99, '00)** **(Manzini et al ... '04 → '07)**
  - SUSHI (version barycentrique) = SUCCES **(Eymard-Gallouet-Herbin '08)**
- Schémas VF monotones non-linéaires
  - Schémas diamant non-linéaire **(Bertolazzo-Manzini '07)**
  - NMFV **(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)**
- Schémas sur maillages primal et dual
  - DDFV **(Hermeline '00) (Domelevo-Omnes '05)** **(Pierre '06) (Andreianov-B.-Hubert '07)**
  - m-DDFV **(Hermeline '03) (B.-Hubert '08)**

PROBLÈMES LINÉAIRES $-\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u) = f$

- **SCHÉMAS PUREMENT CELL-CENTERED**
  - MPFA **(Aavatsmark et al. '98 → '08)** **(Edwards et al. '06,'08)**
  - Schémas diamant **(Coudière-Vila-Villedieu '99, '00)** **(Manzini et al ... '04 → '07)**
  - SUSHI (version barycentrique) = SUCCES **(Eymard-Gallouet-Herbin '08)**
- **SCHÉMAS VF MONOTONES NON-LINÉAIRES**
  - Schémas diamant non-linéaire **(Bertolazzo-Manzini '07)**
  - NMFV **(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)**
- **SCHÉMAS SUR MAILLAGES PRIMAL ET DUAL**
  - DDFV **(Hermeline '00) (Domelevo-Omnes '05)** **(Pierre '06) (Andreianov-B.-Hubert '07)**
  - m-DDFV **(Hermeline '03) (B.-Hubert '08)**
- **SCHÉMAS MIXTES OU HYBRIDES**
  - Schémas mimétiques **(Brezzi, Lipnikov et al '05 → '08)** **(Manzini et al '07-'08)**
  - VF mixtes **(Droniou-Eymard '06)**
  - SUSHI (version hybride) **(Eymard-Gallouet-Herbin '08)**

Schéma O

(Aavatsmark et al. '98 → '08)

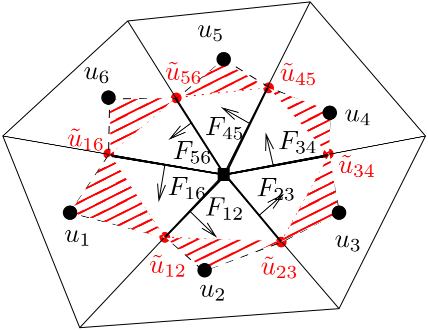


- Inconnues intermédiaires : $\tilde{u}_{ij}$
- Calcul d'un gradient sur chaque triangle rouge T_i

$$\nabla_i u^{\mathcal{T}} = \frac{\tilde{u}_{i,i+1} - u_i}{2|T_i|}(\tilde{x}_{i-1,i} - x_i)^\perp + \frac{\tilde{u}_{i-1,i} - u_i}{2|T_i|}(\tilde{x}_{i,i+1} - x_i)^\perp.$$

Schéma O

(Aavatsmark et al. '98 → '08)



- Inconnues intermédiaires : $\tilde{u}_{ij}$
- Calcul d'un gradient sur chaque triangle rouge T_i

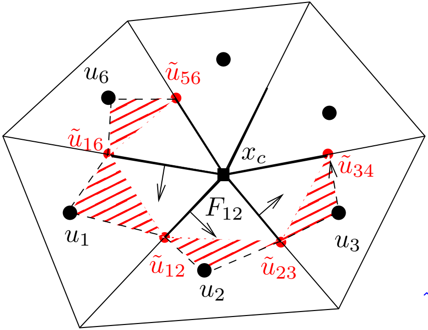
$$\nabla_i u^{\mathcal{T}} = \frac{\tilde{u}_{i,i+1} - u_i}{2|T_i|}(\tilde{x}_{i-1,i} - x_i)^{\perp} + \frac{\tilde{u}_{i-1,i} - u_i}{2|T_i|}(\tilde{x}_{i,i+1} - x_i)^{\perp}.$$

- On écrit la continuité des flux

$$F_{i,i+1} \overset{\text{def}}{=} \boxed{(A_i \nabla_i u^{\mathcal{T}}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{i,i+1} = (A_{i+1} \nabla_{i+1} u^{\mathcal{T}}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{i,i+1}}.$$

- Etant donnés les u_i, on calcule les $\tilde{u}_{i,i+1}$ puis les flux $F_{i,i+1}$.

Schéma U : **On veut calculer F_{12}** **(Aavatsmark et al. '98 → '08)**

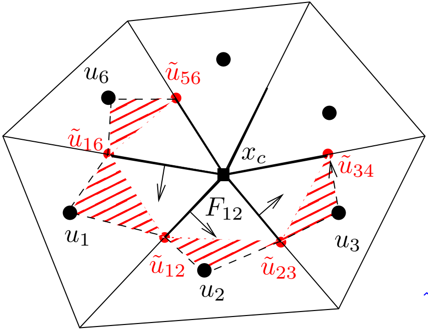


- Inconnues intermédiaires : $\tilde{u}_{ij}$
- Calcul d'un gradient sur chaque triangle rouge T_i

$$\nabla_i u^{\mathcal{T}} = \frac{\tilde{u}_{i,i+1} - u_i}{2|T_i|}(\tilde{x}_{i-1,i} - x_i)^{\perp} + \frac{\tilde{u}_{i-1,i} - u_i}{2|T_i|}(\tilde{x}_{i,i+1} - x_i)^{\perp}.$$

⇝ Cela définit une fonction affine $U_i(x)$ sur chaque cellule.

Schéma U : On veut calculer F_{12} **(Aavatsmark et al. '98 → '08)**



- Inconnues intermédiaires : $\tilde u_{ij}$
- Calcul d'un gradient sur chaque triangle rouge T_i

$$\nabla_i u^{\mathcal{T}} = \frac{\tilde u_{i,i+1} - u_i}{2|T_i|}(\tilde x_{i-1,i} - x_i)^\perp + \frac{\tilde u_{i-1,i} - u_i}{2|T_i|}(\tilde x_{i,i+1} - x_i)^\perp.$$

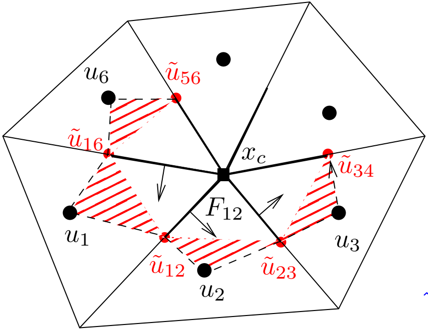
⇝ Cela définit une fonction affine $U_i(x)$ sur chaque cellule.

- On écrit la continuité des flux pour F_{12}, F_{23} et F_{61}

$$F_{i,i+1} \stackrel{\text{def}}{=} \boxed{(A_i \nabla_i u^{\mathcal{T}}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{i,i+1} = (A_{i+1} \nabla_{i+1} u^{\mathcal{T}}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{i,i+1}}, \quad i \in \{1,2,6\}$$

- Il manque deux équations.

Schéma U : On veut calculer F_{12} **(Aavatsmark et al. '98 → '08)**



- Inconnues intermédiaires : $\tilde{u}_{ij}$
- Calcul d'un gradient sur chaque triangle rouge T_i

$$\nabla_i u^{\mathcal{T}} = \frac{\tilde{u}_{i,i+1} - u_i}{2|T_i|}(\tilde{x}_{i-1,i} - x_i)^{\perp} + \frac{\tilde{u}_{i-1,i} - u_i}{2|T_i|}(\tilde{x}_{i,i+1} - x_i)^{\perp}.$$

⇝ Cela définit une fonction affine $U_i(x)$ sur chaque cellule.

- On écrit la continuité des flux pour F_{12}, F_{23} et F_{61}

$$F_{i,i+1} \stackrel{\text{def}}{=} \boxed{(A_i \nabla_i u^{\mathcal{T}}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{i,i+1} = (A_{i+1} \nabla_{i+1} u^{\mathcal{T}}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{i,i+1}}, \quad i \in \{1, 2, 6\}$$

- Il manque deux équations. On écrit :

$$U_2(x_c) = U_3(x_c), \quad \text{et} \quad U_1(x_c) = U_6(x_c).$$

- Etant donnés les u_i, on calcule les $\tilde{u}_{i,i+1}$ puis le flux F_{12}.

Propriétés

- En général :
  - le système linéaire obtenu n'est pas symétrique.
  - coercivité/stabilité en défaut pour de fortes anisotropies et/ou hétérogénéités et/ou distorsions du maillage.
- Version symétrique/stabilisée sur des quad. dans **(Le Potier, '05)**.

Propriétés

- En général :
  - le système linéaire obtenu n'est pas symétrique.
  - coercivité/stabilité en défaut pour de fortes anisotropies et/ou hétérogénéités et/ou distorsions du maillage.
- Version symétrique/stabilisée sur des quad. dans **(Le Potier, '05)**.
- Stencil :
  - La méthode O engendre un stencil trop grand.
  - Pour la méthode U sur des triangles conformes : un flux dépend de 6 inconnues.
  - En général, l'équation sur un volume de controle κ dépend des voisins de κ et des voisins des voisins de κ.

Propriétés

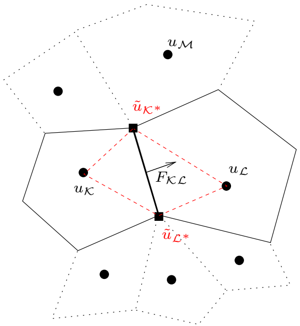
- En général :
  - le système linéaire obtenu n'est pas symétrique.
  - coercivité/stabilité en défaut pour de fortes anisotropies et/ou hétérogénéités et/ou distorsions du maillage.
- Version symétrique/stabilisée sur des quad. dans **(Le Potier, '05)**.
- Stencil :
  - La méthode O engendre un stencil trop grand.
  - Pour la méthode U sur des triangles conformes : un flux dépend de 6 inconnues.
  - En général, l'équation sur un volume de controle κ dépend des voisins de κ et des voisins des voisins de κ.
- Pas de gradient discret complet naturellement à disposition.

Propriétés

- En général :
  - le système linéaire obtenu n'est pas symétrique.
  - coercivité/stabilité en défaut pour de fortes anisotropies et/ou hétérogénéités et/ou distorsions du maillage.
- Version symétrique/stabilisée sur des quad. dans **(Le Potier, '05)**.
- Stencil :
  - La méthode O engendre un stencil trop grand.
  - Pour la méthode U sur des triangles conformes : un flux dépend de 6 inconnues.
  - En général, l'équation sur un volume de controle κ dépend des voisins de κ et des voisins des voisins de κ.
- Pas de gradient discret complet naturellement à disposition.
- Pas de principe du maximum pour les méthodes de base. Variantes pour assurer la monotonie dans certains cas.
- Convergence dans le cas général sous une hypothèse géométrique de coercivité **(Agelas-Masson, '08)**

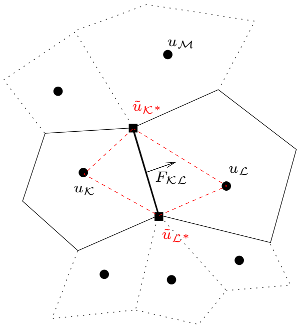
(Coudière-Vila-Villedieu, '99, '00)

- Inconnues intermédiaires aux sommets $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$, $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$.



(Coudière-Vila-Villedieu, '99, '00)

- Inconnues intermédiaires aux sommets $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$, $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$.



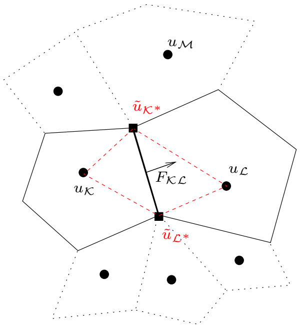
- Gradient discret sur la cellule diamant $\mathcal{D}$:

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \sin \alpha_{\mathcal{D}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + \frac{\tilde{u}_{\mathcal{L}^*} - \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}}{d_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*} \sin \alpha_{\mathcal{D}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*}.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) = u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}, \\ \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathcal{L}^*} - x_{\mathcal{K}^*}) = \tilde{u}_{\mathcal{L}^*} - \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}. \end{array} \right.$$

(Coudière-Vila-Villedieu, '99, '00)

- Inconnues intermédiaires aux sommets $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$, $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$.



- Gradient discret sur la cellule diamant $\mathcal{D}$:

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \sin \alpha_{\mathcal{D}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + \frac{\tilde{u}_{\mathcal{L}^*} - \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}}{d_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*} \sin \alpha_{\mathcal{D}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*}.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) = u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}, \\ \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathcal{L}^*} - x_{\mathcal{K}^*}) = \tilde{u}_{\mathcal{L}^*} - \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}. \end{array} \right.$$

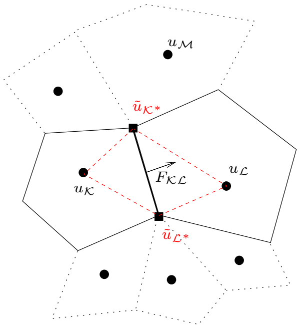
- $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$ et $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$ sont calculés par

$$\tilde{u}_{\mathcal{K}^*} = \sum_{\mathcal{M}} \underbrace{\gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*}}_{\geq 0} u_{\mathcal{M}}, \quad \tilde{u}_{\mathcal{L}^*} = \sum_{\mathcal{M}} \underbrace{\gamma_{\mathcal{M},\mathcal{L}^*}}_{\geq 0} u_{\mathcal{M}},$$

avec $\sum_{\mathcal{M}} \gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*} = 1$, $\sum_{\mathcal{M}} \gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*} x_{\mathcal{M}} = x_{\mathcal{K}^*}$.

(Coudière-Vila-Villedieu, '99, '00)

- Inconnues intermédiaires aux sommets $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$, $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$.



- Gradient discret sur la cellule diamant $\mathcal{D}$:

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \sin \alpha_{\mathcal{D}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + \frac{\tilde{u}_{\mathcal{L}^*} - \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}}{d_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*} \sin \alpha_{\mathcal{D}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) = u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}, \\ \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathcal{L}^*} - x_{\mathcal{K}^*}) = \tilde{u}_{\mathcal{L}^*} - \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}. \end{cases}$$

- $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$ et $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$ sont calculés par

$$\tilde{u}_{\mathcal{K}^*} = \sum_{\mathcal{M}} \underbrace{\gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*}}_{\geq 0} u_{\mathcal{M}}, \quad \tilde{u}_{\mathcal{L}^*} = \sum_{\mathcal{M}} \underbrace{\gamma_{\mathcal{M},\mathcal{L}^*}}_{\geq 0} u_{\mathcal{M}},$$

avec $\sum_{\mathcal{M}} \gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*} = 1$, $\sum_{\mathcal{M}} \gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*} x_{\mathcal{M}} = x_{\mathcal{K}^*}$.

- Le flux s'écrit alors

$$F_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = -|\sigma| \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}.$$

Propriétés

- Les poids $\gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*}$ sont calculés par moindres carrés.
- La consistance du schéma au sens des volumes finis est assurée.

Propriétés

- Les poids $\gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*}$ sont calculés par moindres carrés.
- La consistance du schéma au sens des volumes finis est assurée.

- La coercivité/stabilité n'est pas assurée sauf pour des maillages "proches" de maillages rectangles.
- Si on a coercivité, alors on a les estimations d'erreur en $O(h)$ pour u et ∇u en norme L^2.

PROPRIÉTÉS

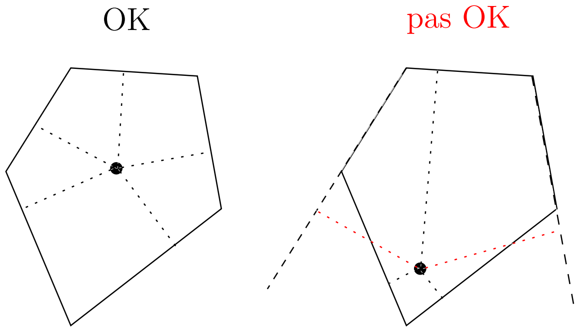
- Les poids $\gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*}$ sont calculés par moindres carrés.
- La consistance du schéma au sens des volumes finis est assurée.

- La coercivité/stabilité n'est pas assurée sauf pour des maillages "proches" de maillages rectangles.
- Si on a coercivité, alors on a les estimations d'erreur en $O(h)$ pour u et ∇u en norme L^2.

- Le schéma peut s'écrire sur des maillages généraux mais n'est analysé que pour des simplexes (2D/3D) et des quadrangles en 2D.
- En général, le schéma **n'est pas symétrique**.

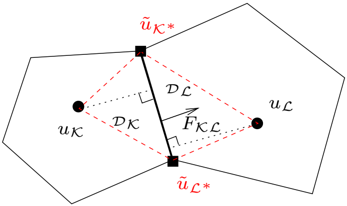
(Manzini et al ... '04 → '07)

- On suppose que les centres se projettent orthogonalement sur les arêtes.



- Les auteurs donnent un algorithme qui donnent des poids $\gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*}$, tels que

$$\gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*} \geq C_0 > 0, \quad \forall_{\mathcal{M}} \text{ contenant } x_{\mathcal{K}^*}.$$

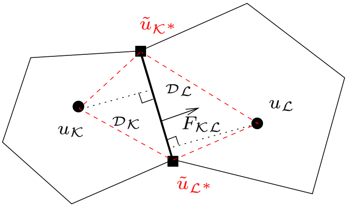


(Manzini et al ... '04 → '07)

Définition d'un gradient sur chaque demi-diamant $\mathcal{D}_{\mathcal{K}}$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ à partir de trois valeurs :

$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}}} u^{\mathcal{T}}, \quad \nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}}} u^{\mathcal{T}}.$$

(Manzini et al ... '04 → '07)



Définition d'un gradient sur chaque demi-diamant $\mathcal{D}_{\mathcal{K}}$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ à partir de trois valeurs :

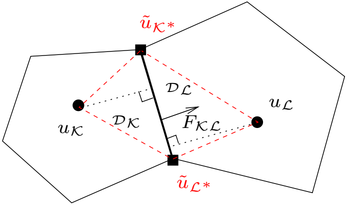
$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}}} u^{\mathcal{T}}, \quad \nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}}} u^{\mathcal{T}}.$$

- On regarde alors les deux flux correspondant

$$-|\sigma|\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}}} u^{\mathcal{T}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \underbrace{\alpha^{\mathcal{K}}_{\mathcal{K}}}_{>0}(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) + \sum_{\mathcal{M}\neq\mathcal{K}} \underbrace{\alpha^{\mathcal{K}}_{\mathcal{M}}}_{\geq 0}(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{M}}),$$

$$-|\sigma|\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}}} u^{\mathcal{T}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \underbrace{\alpha^{\mathcal{L}}_{\mathcal{L}}}_{>0}(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) + \sum_{\mathcal{M}\neq\mathcal{L}} \underbrace{\alpha^{\mathcal{L}}_{\mathcal{M}}}_{\geq 0}(u_{\mathcal{M}} - u_{\mathcal{L}}).$$

On pose $\alpha = \min(\alpha^{\mathcal{K}}_{\mathcal{K}}, \alpha^{\mathcal{L}}_{\mathcal{L}}) > 0$.



(Manzini et al ... '04 → '07)

Définition d'un gradient sur chaque demi-diamant $\mathcal{D}_\mathcal{K}$ et $\mathcal{D}_\mathcal{L}$ à partir de trois valeurs :

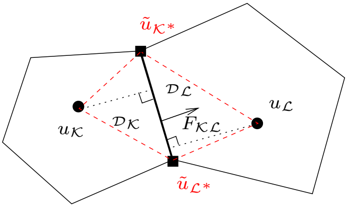
$$\nabla_{\mathcal{D}_\mathcal{K}} u^\mathcal{T}, \quad \nabla_{\mathcal{D}_\mathcal{L}} u^\mathcal{T}.$$

- On regarde alors les deux flux correspondant

$$-|\sigma|\nabla_{\mathcal{D}_\mathcal{K}} u^\mathcal{T} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \alpha(u_\mathcal{K} - u_\mathcal{L}) + \underbrace{\sum_\mathcal{M} \underbrace{(\alpha^\mathcal{K}_\mathcal{M} - \alpha\delta_{\mathcal{M}\mathcal{L}})}_{\geq 0}(u_\mathcal{K} - u_\mathcal{M})}_{\overset{\text{def}}{=} g_\mathcal{K}(u)},$$

$$-|\sigma|\nabla_{\mathcal{D}_\mathcal{L}} u^\mathcal{T} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \alpha(u_\mathcal{K} - u_\mathcal{L}) + \underbrace{\sum_\mathcal{M} \underbrace{(\alpha^\mathcal{K}_\mathcal{M} - \alpha\delta_{\mathcal{M}\mathcal{K}})}_{\geq 0}(u_\mathcal{M} - u_\mathcal{L})}_{\overset{\text{def}}{=} g_\mathcal{L}(u)}.$$

(Manzini et al ... '04 → '07)



Définition d'un gradient sur chaque demi-diamant $\mathcal{D}_{\mathcal{K}}$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ à partir de trois valeurs :

$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}}} u^{\mathcal{T}}, \quad \nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}}} u^{\mathcal{T}}.$$

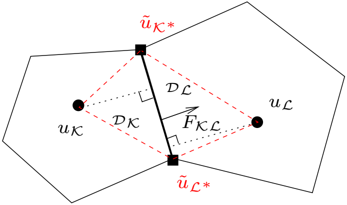
$$-|\sigma|\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}}} u^{\mathcal{T}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \alpha(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) + g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}}),$$
$$-|\sigma|\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}}} u^{\mathcal{T}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \alpha(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) + g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}}).$$

- On pose $\omega_{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}}) = \dfrac{|g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})|}{|g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})| + |g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})|}$ et on va prendre comme gradient

$$\nabla_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} = \omega_{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}})\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}}} u^{\mathcal{T}} + (1 - \omega_{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}}))\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}}} u^{\mathcal{T}}.$$

$$\Rightarrow F_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \stackrel{\text{def}}{=} -|\sigma|\nabla_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \alpha(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) + \underbrace{\frac{g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})|g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})| + g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})|g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})|}{|g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})| + |g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})|}}_{=\mathbf{T}}.$$

(Manzini et al ... '04 → '07)



Définition d'un gradient sur chaque demi-diamant $\mathcal{D}_\mathcal{K}$ et $\mathcal{D}_\mathcal{L}$ à partir de trois valeurs :

$$\nabla_{\mathcal{D}_\mathcal{K}} u^\mathcal{T}, \quad \nabla_{\mathcal{D}_\mathcal{L}} u^\mathcal{T}.$$

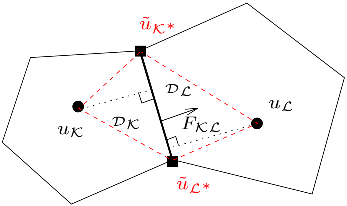
$$F_{\mathcal{KL}} = -|\sigma| \nabla_\mathcal{D} u^\mathcal{T} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}} = \alpha(u_\mathcal{K} - u_\mathcal{L}) + \underbrace{\frac{g_\mathcal{K}(u^\mathcal{T})|g_\mathcal{L}(u^\mathcal{T})| + g_\mathcal{L}(u^\mathcal{T})|g_\mathcal{K}(u^\mathcal{T})|}{|g_\mathcal{K}(u^\mathcal{T})| + |g_\mathcal{L}(u^\mathcal{T})|}}_{=\mathbf{T}}.$$

- Si $g_\mathcal{K}(u^\mathcal{T}) g_\mathcal{L}(u^\mathcal{T}) < 0$:

$$T = 0.$$

- Si $g_\mathcal{K}(u^\mathcal{T}) g_\mathcal{L}(u^\mathcal{T}) > 0$:

$$T = \frac{2 g_\mathcal{K}(u^\mathcal{T}) g_\mathcal{L}(u^\mathcal{T})}{g_\mathcal{K}(u^\mathcal{T}) + g_\mathcal{L}(u^\mathcal{T})} \Rightarrow \begin{cases} T \text{ est un multiple } \textbf{positif} \text{ de } g_\mathcal{K}(u^\mathcal{T}) \\ T \text{ est un multiple } \textbf{positif} \text{ de } g_\mathcal{L}(u^\mathcal{T}) \end{cases}$$



(Manzini et al ... '04 → '07)

Définition d'un gradient sur chaque demi-diamant $\mathcal{D}_{\mathcal{K}}$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ à partir de trois valeurs :

$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}}} u^{\mathcal{T}}, \quad \nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}}} u^{\mathcal{T}}.$$

$$F_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = -|\sigma| \nabla_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \alpha(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) + \underbrace{\frac{g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})|g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})| + g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})|g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})|}{|g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})| + |g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})|}}_{=\mathbf{T}}.$$

$$F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \alpha(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) + \underbrace{C_{\mathcal{K}}}_{\geq 0} \sum_{\mathcal{M}} (\alpha^{\mathcal{K}}_{\mathcal{M}} - \alpha\delta_{\mathcal{M}\mathcal{L}})(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{M}}),$$

$$F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \alpha(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) + \underbrace{C_{\mathcal{L}}}_{\geq 0} \sum_{\mathcal{M}} (\alpha^{\mathcal{K}}_{\mathcal{M}} - \alpha\delta_{\mathcal{M}\mathcal{K}})(u_{\mathcal{M}} - u_{\mathcal{L}}).$$

(Manzini et al ... ’04 → ’07)

Propriétés

- Consistance OK.
- Existence d’au moins une solution du schéma non-linéaire (bien que non régulier !).
- Quasi-unicité : toutes les solutions sont dans des boules de rayon $O(\text{size}(\mathcal{T})^2)$.
- Résolution par un solveur itératif qui nécessite l’inversion d’une unique matrice (non SDP).

(Manzini et al ... ’04 → ’07)

Propriétés

- Consistance OK.
- Existence d’au moins une solution du schéma non-linéaire (bien que non régulier !).
- Quasi-unicité : toutes les solutions sont dans des boules de rayon $O(\text{size}(\mathcal{T})^2)$.
- Résolution par un solveur itératif qui nécessite l’inversion d’une unique matrice (non SDP).

- Cette solution vérifie le principe du maximum discret.
- On a pas le principe du max à chaque itération du solveur.

(Manzini et al ... ’04 → ’07)

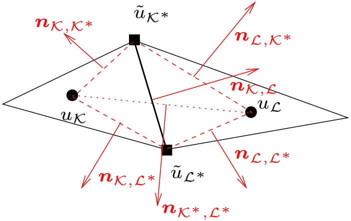
Propriétés

- Consistance OK.
- Existence d’au moins une solution du schéma non-linéaire (bien que non régulier !).
- Quasi-unicité : toutes les solutions sont dans des boules de rayon $O(\text{size}(\mathcal{T})^2)$.
- Résolution par un solveur itératif qui nécessite l’inversion d’une unique matrice (non SDP).

- Cette solution vérifie le principe du maximum discret.
- On a pas le principe du max à chaque itération du solveur.

- Pas d’analyse de convergence *a priori*.
- Numériquement on obtient de l’ordre 2 en norme L^2.
- Possibilité de rajouter un terme d’advection avec une technique de type “limiteur de pente”.

POUR SIMPLIFIER : $A(x) = A$ **(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)**



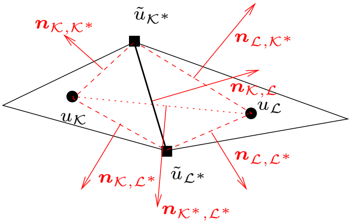
- Maillage de triangles.
- Les centres $x_{\mathcal{K}}$ et $x_{\mathcal{L}}$ seront déterminés par la suite.
- Les valeurs aux sommets $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$ et $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$ sont donnés par

$$\tilde{u}_{\mathcal{K}^*} = \sum_{\mathcal{M}} \underbrace{\gamma_{\mathcal{M}\mathcal{K}^*}}_{0 \leq \cdot \leq 1} u_{\mathcal{M}}.$$

- Propriétés géométriques de base :

$$\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*} + \boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*} + \boldsymbol{n}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*} = 0,$$
$$\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*} + \boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*} - \boldsymbol{n}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*} = 0,$$
$$\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*} + \boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*} + \boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = 0,$$
$$\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*} + \boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*} - \boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = 0,$$

Pour simplifier : $A(x) = A$ **(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)**



- Maillage de triangles.
- Les centres $x_{\mathcal{K}}$ et $x_{\mathcal{L}}$ seront déterminés par la suite.
- Les valeurs aux sommets $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$ et $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$ sont donnés par

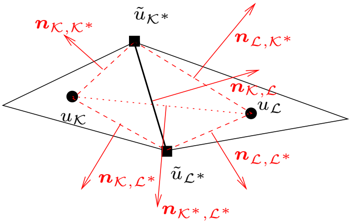
$$\tilde{u}_{\mathcal{K}^*} = \sum_{\mathcal{M}} \underbrace{\gamma_{\mathcal{M}\mathcal{K}^*}}_{0\leq\cdot\leq 1} u_{\mathcal{M}}.$$

- On définit deux gradients discrets

$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{C_{\mathcal{K}^*}}\Big(- u_{\mathcal{L}}\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*} - u_{\mathcal{K}}\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*} + \boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*})\Big),$$

$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}^*}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{C_{\mathcal{L}^*}}\Big(- u_{\mathcal{L}}\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}}\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*} + \boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*})\Big).$$

POUR SIMPLIFIER : $A(x) = A$ **(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)**



- Maillage de triangles.
- Les centres $x_{\mathcal{K}}$ et $x_{\mathcal{L}}$ seront déterminés par la suite.
- Les valeurs aux sommets $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$ et $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$ sont donnés par

$$\tilde{u}_{\mathcal{K}^*} = \sum_{\mathcal{M}} \underbrace{\gamma_{\mathcal{M}\mathcal{K}^*}}_{0\leq\cdot\leq 1} u_{\mathcal{M}}.$$

- On définit deux gradients discrets

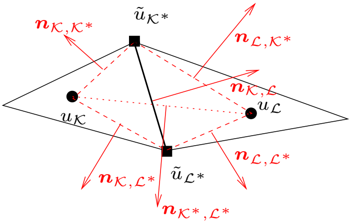
$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{C_{\mathcal{K}^*}}\Big(- u_{\mathcal{L}}\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*} - u_{\mathcal{K}}\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*} + \boxed{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*} + \boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*})}\Big),$$

$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}^*}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{C_{\mathcal{L}^*}}\Big(- u_{\mathcal{L}}\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}}\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*} + \boxed{\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*} + \boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*})}\Big).$$

- Soit $F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \stackrel{\text{def}}{=} -\mu|\sigma|(A\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} u^{\mathcal{T}})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} - (1-\mu)|\sigma|(A\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}^*}} u^{\mathcal{T}})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}$
  On cherche **la forme** d'un flux à deux points :

$$\frac{\mu\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}}{C_{\mathcal{K}^*}}A(\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*} + \boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \frac{(1-\mu)\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}}{C_{\mathcal{L}^*}}A(\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*} + \boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = 0.$$

Pour simplifier : $A(x) = A$ **(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)**



- Maillage de triangles.
- Les centres $x_{\mathcal{K}}$ et $x_{\mathcal{L}}$ seront déterminés par la suite.
- Les valeurs aux sommets $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$ et $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$ sont donnés par

$$\tilde{u}_{\mathcal{K}^*} = \sum_{\mathcal{M}} \underbrace{\gamma_{\mathcal{M}\mathcal{K}^*}}_{0\leq\cdot\leq 1} u_{\mathcal{M}}.$$

- On définit deux gradients discrets

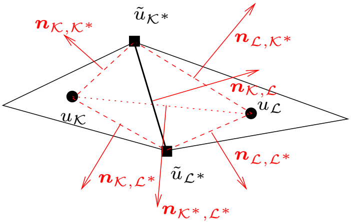
$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{C_{\mathcal{K}^*}}\Big(- u_{\mathcal{L}}\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*} - u_{\mathcal{K}}\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*} + \boxed{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*} + \boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*})}\Big),$$

$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}^*}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{C_{\mathcal{L}^*}}\Big(- u_{\mathcal{L}}\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}}\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*} + \boxed{\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*} + \boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*})}\Big).$$

- Soit $F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \stackrel{\text{def}}{=} -\mu|\sigma|(A\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} u^{\mathcal{T}})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} - (1-\mu)|\sigma|(A\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}^*}} u^{\mathcal{T}})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}$
  On cherche **la forme** d'un flux à deux points :

$$\left(\frac{\mu\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}}{C_{\mathcal{K}^*}} - \frac{(1-\mu)\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}}{C_{\mathcal{L}^*}}\right) = 0.$$

Pour simplifier : $A(x) = A$ **(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)**



- Maillage de triangles.
- Les centres $x_{\mathcal{K}}$ et $x_{\mathcal{L}}$ seront déterminés par la suite.
- Les valeurs aux sommets $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$ et $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$ sont donnés par

$$\tilde{u}_{\mathcal{K}^*} = \sum_{\mathcal{M}} \underbrace{\gamma_{\mathcal{M}\mathcal{K}^*}}_{0\leq\cdot\leq 1} u_{\mathcal{M}}.$$

- On définit deux gradients discrets

$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{C_{\mathcal{K}^*}}\Big(- u_{\mathcal{L}}\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*} - u_{\mathcal{K}}\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*} + \boxed{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*} + \boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*})}\Big),$$

$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}^*}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{C_{\mathcal{L}^*}}\Big(- u_{\mathcal{L}}\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}}\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*} + \boxed{\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*} + \boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*})}\Big).$$

- Soit $F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \stackrel{\text{def}}{=} -\mu|\sigma|(A\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} u^{\mathcal{T}})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} - (1-\mu)|\sigma|(A\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}^*}} u^{\mathcal{T}})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}$
  On cherche **la forme** d'un flux à deux points :

$$\mu(u) = \frac{\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}/C_{\mathcal{L}^*}}{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}/C_{\mathcal{K}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{L}^*}/C_{\mathcal{L}^*}}.$$

Bilan : (Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)

- Le flux numérique s'écrit comme un flux à deux points non-linéaire

$$F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \tau_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}})|\sigma|\, u_{\mathcal{K}} - \tau_{\mathcal{L},\sigma}(u^{\mathcal{T}})|\sigma|\, u_{\mathcal{L}},$$

avec

$$\tau_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = \frac{\mu(u^{\mathcal{T}})}{C_{\mathcal{K}^*}}(A\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \frac{1-\mu(u^{\mathcal{T}})}{C_{\mathcal{L}^*}}(A\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}},$$

$$\tau_{\mathcal{L},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -\frac{\mu(u^{\mathcal{T}})}{C_{\mathcal{K}^*}}(A\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} - \frac{1-\mu(u^{\mathcal{T}})}{C_{\mathcal{L}^*}}(A\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}},$$

BILAN : **(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)**

- Le flux numérique s'écrit comme un flux à deux points non-linéaire

$$F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \tau_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}})|\sigma|\, u_{\mathcal{K}} - \tau_{\mathcal{L},\sigma}(u^{\mathcal{T}})|\sigma|\, u_{\mathcal{L}},$$

avec

$$\tau_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = \frac{\Big(\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(A\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*})\cdot \boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(A\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*})\cdot \boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}\Big)}{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}C_{\mathcal{L}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{L}^*}C_{\mathcal{K}^*}}.$$

$$\tau_{\mathcal{L},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -\frac{\Big(\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(A\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*})\cdot \boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(A\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*})\cdot \boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}\Big)}{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}C_{\mathcal{L}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{L}^*}C_{\mathcal{K}^*}}.$$

Bilan : **(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)**

- Le flux numérique s'écrit comme un flux à deux points non-linéaire

$$F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \tau_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}})|\sigma|\, u_{\mathcal{K}} - \tau_{\mathcal{L},\sigma}(u^{\mathcal{T}})|\sigma|\, u_{\mathcal{L}},$$

avec

$$\tau_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = \frac{\left(\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(A\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*})\cdot \boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(A\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*})\cdot \boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}\right)}{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}C_{\mathcal{L}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{L}^*}C_{\mathcal{K}^*}}.$$

$$\tau_{\mathcal{L},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -\frac{\left(\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(A\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*})\cdot \boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(A\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*})\cdot \boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}\right)}{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}C_{\mathcal{L}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{L}^*}C_{\mathcal{K}^*}}.$$

- Il faut maintenant montrer que sous de bonnes hypothèses on a

$$u^{\mathcal{T}} \geq 0 \Longrightarrow \tau_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) \geq 0, \quad \text{et} \quad \tau_{\mathcal{L},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) \geq 0.$$

Bilan : **(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)**

- Le flux numérique s'écrit comme un flux à deux points non-linéaire

$$F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \tau_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}})|\sigma|\, u_{\mathcal{K}} - \tau_{\mathcal{L},\sigma}(u^{\mathcal{T}})|\sigma|\, u_{\mathcal{L}},$$

avec

$$\tau_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = \frac{\left(\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(A\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(A\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}\right)}{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}C_{\mathcal{L}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{L}^*}C_{\mathcal{K}^*}}.$$

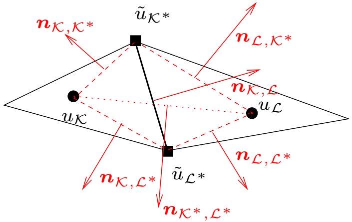
$$\tau_{\mathcal{L},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -\frac{\left(\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(A\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(A\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}\right)}{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}C_{\mathcal{L}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{L}^*}C_{\mathcal{K}^*}}.$$

- Il faut maintenant montrer que sous de bonnes hypothèses on a

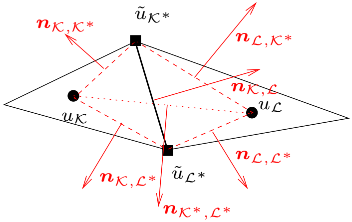
$$(A\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \geq 0, \quad (A\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \geq 0,$$

$$(A\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \leq 0, \quad (A\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \leq 0.$$

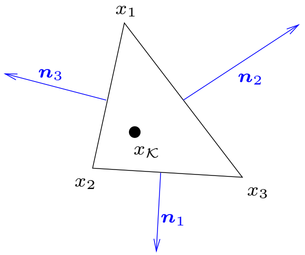
Pour cela, on montre qu'il existe un bon choix des centres $x_{\mathcal{K}}$.



$$\text{On veut} \quad \begin{cases} (A\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}) \cdot \boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \geq 0, \quad (A\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}) \cdot \boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \geq 0, \\ (A\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}) \cdot \boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \leq 0, \quad (A\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}) \cdot \boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \leq 0. \end{cases}$$



On veut
$$\begin{cases} (A\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \geq 0, & (A\boldsymbol{n}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \geq 0, \\ (A\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \leq 0, & (A\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*})\cdot\boldsymbol{n}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \leq 0. \end{cases}$$



Un choix convenable :

$$x_{\mathcal{K}} = \frac{\|\boldsymbol{n}_1\|_A\, x_1 + \|\boldsymbol{n}_2\|_A\, x_2 + \|\boldsymbol{n}_3\|_A\, x_3}{\|\boldsymbol{n}_1\|_A + \|\boldsymbol{n}_2\|_A + \|\boldsymbol{n}_3\|_A},$$

avec

$$\|\xi\|_A = \sqrt{A\xi\cdot\xi}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Propriétés

- L'existence d'une solution au problème non-linéaire n'est pas prouvée.
- Pas de résultat de convergence.

Schémas monotones non-linéaires

Propriétés

- L'existence d'une solution au problème non-linéaire n'est pas prouvée.
- Pas de résultat de convergence.

- En pratique, on résout le problème par une méthode itérative qui préserve la positivité au cours des itérations.
- Le système linéaire à résoudre change à chaque itération et n'est pas symétrique.

Propriétés

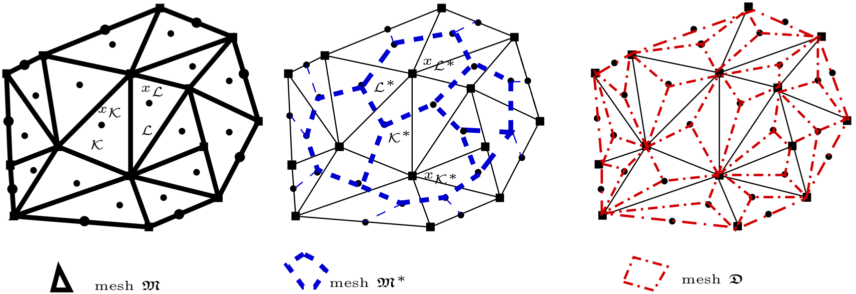
- L'existence d'une solution au problème non-linéaire n'est pas prouvée.
- Pas de résultat de convergence.

- En pratique, on résout le problème par une méthode itérative qui préserve la positivité au cours des itérations.
- Le système linéaire à résoudre change à chaque itération et n'est pas symétrique.

- Le principe du schéma se généralise (difficilement) à des maillages polygonaux seulement dans le cas où
  - $A(x)$ est isotrope.
  - Le maillage est régulier et les volumes de contrôle sont étoilés.

(Hermeline '00) (Domelevo-Omnes '05) (Andreianov-Boyer-Hubert '07)

Maillages



Maillage primal
$\rightsquigarrow (u_\mathcal{K})_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}}$

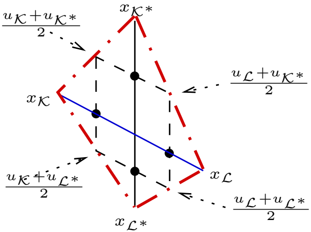
Maillage dual
$\rightsquigarrow (u_{\mathcal{K}^*})_{\mathcal{K}^*\in\mathfrak{M}^*}$

Maillage diamant
$\rightsquigarrow$ gradient discret

Solution approchée : $$u^\mathcal{T} = \Big((u_\mathcal{K})_\mathcal{K}, (u_{\mathcal{K}^*})_{\mathcal{K}^*}\Big)$$

Gradient discret

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{\sin\alpha_{\mathcal{D}}}\left(\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{|\sigma^*|}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{|\sigma|}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*}\right), \quad \forall\,\text{diamant}\,\mathcal{D}.$$



Définition équivalente
$$\begin{cases} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) = u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}, \\ \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathcal{L}^*} - x_{\mathcal{K}^*}) = u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}. \end{cases}$$

GRADIENT DISCRET

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left(\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{|\sigma^*|} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{|\sigma|} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*} \right), \quad \forall \,\text{diamant}\, \mathcal{D}.$$

MÉTHODE DDFV

Formulation Volumes Finis :

$$- \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| \left(A_{\mathcal{D}} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}} \right) = |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}}, \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M},$$

$$- \sum_{\sigma^* \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}^*}} |\sigma^*| \left(A_{\mathcal{D}} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*} \right) = |\mathcal{K}^*| f_{\mathcal{K}^*}, \forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*,$$

où, par exemple, on prend un tenseur de diffusion approché sur le diamant par

$$A_{\mathcal{D}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} A(x)\, dx.$$

Gradient discret

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{\sin\alpha_{\mathcal{D}}}\left(\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{|\sigma^*|}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{|\sigma|}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*}\right), \quad \forall\,\text{diamant}\,\mathcal{D}.$$

Méthode DDFV

Formulation équivalente (Dualité Discrète) :

$$2\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} |\mathcal{D}|\left(A_{\mathcal{D}}\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}}\right) = \int_\Omega f v^{\mathfrak{M}} dx + \int_\Omega f v^{\mathfrak{M}^*} dx, \quad \forall v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

Gradient discret

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left(\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{|\sigma^*|} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{|\sigma|} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*} \right), \quad \forall \,\text{diamant}\, \mathcal{D}.$$

Méthode DDFV

Formulation équivalente (Dualité Discrète) :

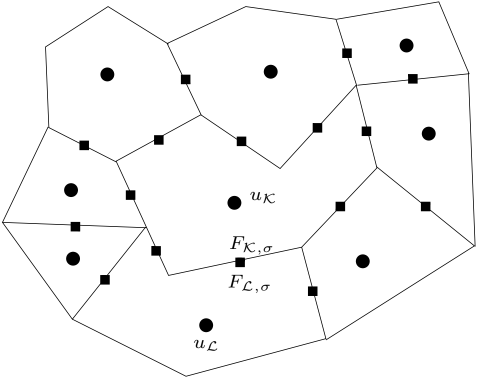
$$2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| \left(A_{\mathcal{D}} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}} \right) = \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{M}} dx + \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{M}^*} dx, \quad \forall v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

Propriétés

- Nombre d'inconnues = nombre de cellules + nombre de sommets.
- La monotonie et la coercivité de l'opérateur sont préservées.
- Existence et unicitié de la solution approchée.
- Convergence dans le cas général et estimation d'erreur dans le cas régulier en $O(\mathrm{size}(\mathcal{T}))$ pour u et ∇u.
- Prise en compte des coeffs discontinus $\Rightarrow$ m-DDFV (partie 3)

1. Quelques grandes classes de méthodes
   - Schémas MPFA
   - Schémas diamants
   - Schémas VF monotones non-linéaires
   - Schémas DDFV
   - Schémas mimétiques
   - Schémas VF mixtes
   - Schémas SUCCES / SUSHI
2. Comparaisons : Benchmark FVCA 5
   - Test 1 : Anisotropie modérée
   - Test 3 : Ecoulement oblique
   - Test 4 : Faille verticale
   - Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène
   - Test 8 : Source ponctuelle
3. Bilan

(Lipnikov et al '05 → '08) (Manzini '08)



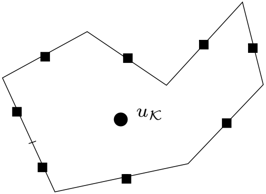
- Une inconnue scalaire $u_{\mathcal{K}}$ sur chaque volume de contrôle $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Deux inconnues **scalaires** de flux $F_{\mathcal{K},\sigma}$ et $F_{\mathcal{L},\sigma}$ sur chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}$.
- Elles sont liées par la relation de conservativité

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0.$$

- On note $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ (resp. $\mathbb{R}^{\mathcal{E}}$) l'ensemble des inconnues aux centres (resp. aux arêtes).

PRINCIPE : Se baser sur la formule de Green

$$\int_{\mathcal{K}} A_{\mathcal{K}}^{-1}(A_{\mathcal{K}}\nabla u)\cdot\xi\,dx + \int_{\mathcal{K}} u(\mathrm{div}\,\xi)\,dx = \int_{\partial\mathcal{K}} u(\xi\cdot\boldsymbol{\nu})\,ds.$$



- Si $F \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}}$, on définit la div. discrète

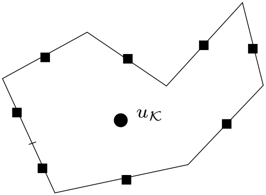
$$\mathrm{div}^{\mathcal{K}} F = \frac{1}{|\mathcal{K}|}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \underbrace{|\sigma| F_{\mathcal{K},\sigma}}$$

chgt de notation

- On se donne un "produit scalaire" $(\cdot,\cdot)_{A^{-1},\mathcal{K}}$ sur l'ens. des ■ qui approche $\int_{\mathcal{K}} A_{\mathcal{K}}^{-1} F\cdot G\,dx$.

Principe : Se baser sur la formule de Green

$$\int_{\mathcal{K}} A_{\mathcal{K}}^{-1}(A_{\mathcal{K}}\nabla u)\cdot\xi\,dx + \int_{\mathcal{K}} u(\mathrm{div}\,\xi)\,dx = \int_{\partial\mathcal{K}} u(\xi\cdot\boldsymbol{\nu})\,ds.$$



- Si $F\in\mathbb{R}^{\mathcal{E}}$, on définit la div. discrète

$$\mathrm{div}^{\mathcal{K}} F = \frac{1}{|\mathcal{K}|}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \underbrace{|\sigma| F_{\mathcal{K},\sigma}}$$

chgt de notation

- On se donne un "produit scalaire" $(\cdot,\cdot)_{A^{-1},\mathcal{K}}$ sur l'ens. des ■ qui approche $\int_{\mathcal{K}} A_{\mathcal{K}}^{-1} F\cdot G\,dx$.

Hypothèses

Coercivité : $\underline{C}|\mathcal{K}|\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}}|F_{\mathcal{K},\sigma}|^2 \le (F,F)_{A^{-1},\mathcal{K}} \le \overline{C}|\mathcal{K}|\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}}|F_{\mathcal{K},\sigma}|^2, \quad \forall\mathcal{K},$

Consistance : $\big((A_{\mathcal{K}}\nabla\varphi), G\big)_{A^{-1},\mathcal{K}} + \int_{\mathcal{K}}\varphi\,\mathrm{div}^{\mathcal{K}} G\,dx$

$$= \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} G_{\mathcal{K},\sigma}\left(\int_\sigma\varphi\right), \forall\mathcal{K}, \forall G\in\mathbb{R}^{\mathcal{E}}, \forall\varphi \text{ affine.}$$

Produits scalaires globaux

$$(F,G)_{A^{-1}} = \sum_{\mathcal{K}} (F,G)_{A^{-1},\mathcal{K}},$$

$$(u,v) = \sum_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| u_{\mathcal{K}} v_{\mathcal{K}},$$

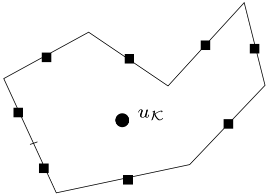
Operateur flux approché : $\Phi : u \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \mapsto \Phi u \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}} \approx (A\nabla u)\cdot \boldsymbol{\nu}$

$$(G, \Phi u)_{A^{-1}} = -(u, \mathrm{div}^{\mathcal{K}} G), \quad \forall u \in \mathbb{R}_0^{\mathcal{T}}, \forall G \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}}.$$

Le schéma s'écrit alors :

$$-\mathrm{div}^{\mathcal{K}}(\Phi u) = f_{\mathcal{K}}, \quad \forall \mathcal{K}.$$

Tout se ramène à construire un p.s. $(\cdot,\cdot)_{A^{-1},\mathcal{K}}$ convenable vérifiant les hypothèses de consistance et coercivité



ON CHERCHE

$$(F,G)_{A^{-1},\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} {}^t\Big(F_{\mathcal{K},\sigma}\Big)_\sigma M_{\mathcal{K}} \Big(G_{\mathcal{K},\sigma}\Big)_\sigma,$$

avec $M_{\mathcal{K}}$ SDP de taille $m \times m$.

DÉFINITIONS

$$R_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} |\sigma_1|\,{}^t(x_{\sigma_1} - x_{\mathcal{K}}) \\ \vdots \\ |\sigma_m|\,{}^t(x_{\sigma_m} - x_{\mathcal{K}}) \end{pmatrix}, \quad N_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{\nu}_{\sigma_1} \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{\nu}_{\sigma_m} \end{pmatrix} A_{\mathcal{K}}, \quad \text{de taille } m \times 2,$$

PROPOSITION

La condition de consistance est équivalente à

$$M_{\mathcal{K}} N_{\mathcal{K}} = R_{\mathcal{K}} \Longleftrightarrow M_{\mathcal{K}} = \frac{1}{|\mathcal{K}|} R_{\mathcal{K}} A_{\mathcal{K}}^{-1}\,{}^tR_{\mathcal{K}} + C_{\mathcal{K}} U_{\mathcal{K}}\,{}^tC_{\mathcal{K}},$$

où $C_{\mathcal{K}}$ de taille $m \times (m-2)$ est telle que ${}^tC_{\mathcal{K}} N_{\mathcal{K}} = 0$ et $U_{\mathcal{K}}$ est une matrice SDP quelconque de taille $m-2$.

▸ Preuve

Propriétés

- Les mailles doivent être étoilées par rapport à leur barycentre.
- Le nombre total d'inconnues est égal au nombre d'éléments + le nombre d'arêtes.
- Le système linéaire à résoudre est de type point-selle.

Propriétés

- Les mailles doivent être étoilées par rapport à leur barycentre.
- Le nombre total d'inconnues est égal au nombre d'éléments + le nombre d'arêtes.
- Le système linéaire à résoudre est de type point-selle.

- On peut voir ces schémas comme une généralisation des éléments finis mixtes associés à des formules de quadrature bien choisies.

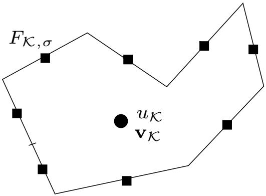
Propriétés

- Les mailles doivent être étoilées par rapport à leur barycentre.
- Le nombre total d'inconnues est égal au nombre d'éléments + le nombre d'arêtes.
- Le système linéaire à résoudre est de type point-selle.

- On peut voir ces schémas comme une généralisation des éléments finis mixtes associés à des formules de quadrature bien choisies.

- Sous de bonnes hypothèses de régularité, on peut montrer la convergence à l'ordre 2 en norme L^2 et à l'ordre 1 en norme H^1.
- Pas encore d'estimations d'erreurs dans le cas de coefficients discontinus.

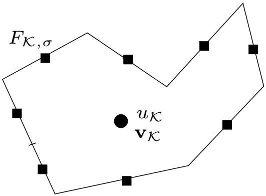
1. Quelques grandes classes de méthodes
   - Schémas MPFA
   - Schémas diamants
   - Schémas VF monotones non-linéaires
   - Schémas DDFV
   - Schémas mimétiques
   - Schémas VF mixtes
   - Schémas SUCCES / SUSHI
2. Comparaisons : Benchmark FVCA 5
   - Test 1 : Anisotropie modérée
   - Test 3 : Ecoulement oblique
   - Test 4 : Faille verticale
   - Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène
   - Test 8 : Source ponctuelle
3. Bilan



(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

- Une inconnue scalaire $u_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Une inconnue vectorielle $\mathbf{v}_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Deux inconnues **scalaires** de flux $F_{\mathcal{K},\sigma}$ et $F_{\mathcal{L},\sigma}$ sur chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}$.
- Elles sont liées par la relation de conservativité

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0.$$



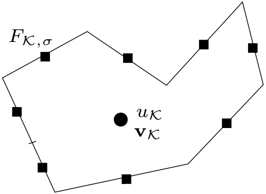
(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

- Une inconnue scalaire $u_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Une inconnue vectorielle $\mathbf{v}_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Deux inconnues **scalaires** de flux $F_{\mathcal{K},\sigma}$ et $F_{\mathcal{L},\sigma}$ sur chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}$.
- Elles sont liées par la relation de conservativité

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0.$$

- Continuité de l'approximation au barycentre x_σ de σ :

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma}.$$



(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

- Une inconnue scalaire $u_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Une inconnue vectorielle $\mathbf{v}_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Deux inconnues **scalaires** de flux $F_{\mathcal{K},\sigma}$ et $F_{\mathcal{L},\sigma}$ sur chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}$.
- Elles sont liées par la relation de conservativité

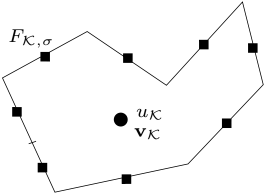
$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0.$$

- Continuité de l'approximation au barycentre x_σ de σ :

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

- Formule de "géométrie"

$$|\mathcal{K}|\xi = \int_{\mathcal{K}} \underbrace{\mathrm{div}\Big((x - x_{\mathcal{K}}) \otimes \xi\Big)}_{=\xi} \, dx = \int_{\partial\mathcal{K}} (\xi \cdot \boldsymbol{\nu})(x - x_{\mathcal{K}}) \, dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2.$$



(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

- Une inconnue scalaire $u_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Une inconnue vectorielle $\mathbf{v}_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Deux inconnues **scalaires** de flux $F_{\mathcal{K},\sigma}$ et $F_{\mathcal{L},\sigma}$ sur chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}$.
- Elles sont liées par la relation de conservativité

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0.$$

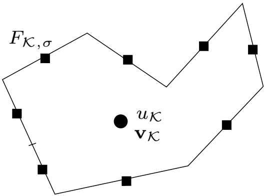
- Continuité de l'approximation au barycentre x_σ de σ :

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}}|\mathcal{K}|F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}}|\mathcal{L}|F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

- Formule de "géométrie"

$$|\mathcal{K}|\xi = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| \, (\xi \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\sigma}) \, (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2.$$

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)



- Une inconnue scalaire $u_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Une inconnue vectorielle $\mathbf{v}_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Deux inconnues **scalaires** de flux $F_{\mathcal{K},\sigma}$ et $F_{\mathcal{L},\sigma}$ sur chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}$.
- Elles sont liées par la relation de conservativité

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0.$$

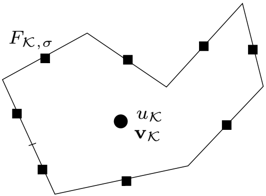
- Continuité de l'approximation au barycentre x_σ de σ :

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}}|\mathcal{K}|F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}}|\mathcal{L}|F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

- Formule de "géométrie"

$$|\mathcal{K}|A_{\mathcal{K}}\mathbf{v}_{\mathcal{K}} = -\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(x_\sigma - x_{\mathcal{K}}).$$

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)



- Une inconnue scalaire $u_\mathcal{K}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Une inconnue vectorielle $\mathbf{v}_\mathcal{K}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Deux inconnues **scalaires** de flux $F_{\mathcal{K},\sigma}$ et $F_{\mathcal{L},\sigma}$ sur chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}$.
- Elles sont liées par la relation de conservativité

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0.$$

- Continuité de l'approximation au barycentre x_σ de σ :

$$u_\mathcal{K} + \mathbf{v}_\mathcal{K} \cdot (x_\sigma - x_\mathcal{K}) - \nu_\mathcal{K}|\mathcal{K}|F_{\mathcal{K},\sigma} = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\sigma - x_\mathcal{L}) - \nu_\mathcal{L}|\mathcal{L}|F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

- Formule de "géométrie"

$$|\mathcal{K}|A_\mathcal{K}\mathbf{v}_\mathcal{K} = -\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma}(x_\sigma - x_\mathcal{K}).$$

- Bilan des flux $\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma} = |\mathcal{K}|f_\mathcal{K}$.

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

Propriétés

- On a 3 inconnues scalaires par volume de contrôle et deux inconnues scalaires (en réalité une seule) par arête.
- Sur maillage simplicial, le problème est bien posé sans le terme de pénalisation.
- Le schéma s'adapte sans grandes différences au cas non linéaire $-\mathrm{div}\,(\varphi(x, \nabla u)) = f$.

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

PROPRIÉTÉS

- On a 3 inconnues scalaires par volume de contrôle et deux inconnues scalaires (en réalité une seule) par arête.
- Sur maillage simplicial, le problème est bien posé sans le terme de pénalisation.
- Le schéma s'adapte sans grandes différences au cas non linéaire $-\mathrm{div}\,(\varphi(x, \nabla u)) = f$.
- Résultat de convergence de la solution $u^{\mathcal{T}} = (u_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}}$ et du gradient $\mathbf{v}^{\mathcal{T}} = (\mathbf{v}_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}}$, pour un maillage quelconque et des données peu régulières.

Schémas VF mixtes

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

Propriétés

- On a 3 inconnues scalaires par volume de contrôle et deux inconnues scalaires (en réalité une seule) par arête.
- Sur maillage simplicial, le problème est bien posé sans le terme de pénalisation.
- Le schéma s'adapte sans grandes différences au cas non linéaire $-\mathrm{div}\,(\varphi(x, \nabla u)) = f$.
- Résultat de convergence de la solution $u^{\mathcal{T}} = (u_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}}$ et du gradient $\mathbf{v}^{\mathcal{T}} = (\mathbf{v}_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}}$, pour un maillage quelconque et des données peu régulières.
  - Inégalité de Poincaré. ▸ Preuve
  - Estimation *a priori*. ▸ Preuve
  - Compacité.
  - Convergence.

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

Propriétés

- On a 3 inconnues scalaires par volume de contrôle et deux inconnues scalaires (en réalité une seule) par arête.
- Sur maillage simplicial, le problème est bien posé sans le terme de pénalisation.
- Le schéma s'adapte sans grandes différences au cas non linéaire $-\mathrm{div}\,(\varphi(x, \nabla u)) = f$.
- Résultat de convergence de la solution $u^{\mathcal{T}} = (u_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}}$ et du gradient $\mathbf{v}^{\mathcal{T}} = (\mathbf{v}_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}}$, pour un maillage quelconque et des données peu régulières.
- Sous des hypothèses de régularité de la solution et des coefficients du problème :
  - Maillages généraux : Estimation d'erreur théorique en $O(\sqrt{\mathrm{size}(\mathcal{T})})$ pour la solution et son gradient.
  - Maillages simpliciaux : Estimation en $O(\mathrm{size}(\mathcal{T}))$.

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

Implémentation

- Initialement, le nombre d'inconnues est important.
- Le système linéaire n'a pas de structure simple.

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

Implémentation

- Initialement, le nombre d'inconnues est important.
- Le système linéaire n'a pas de structure simple.

Hybridation (cas linéaire)

But : Ramener le problème à un système SDP plus petit.

- On définit une inconnue scalaire par arête par
$$u_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} u_\mathcal{K}+\mathbf{v}_\mathcal{K}\cdot(x_\mathcal{K}-x_\sigma)-\nu_\mathcal{K}|\mathcal{K}|F_{\mathcal{K},\sigma} = u_\mathcal{L}+\mathbf{v}_\mathcal{L}\cdot(x_\mathcal{L}-x_\sigma)-\nu_\mathcal{L}|\mathcal{L}|F_{\mathcal{L},\sigma}.$$
- On utilise
$$\mathbf{v}_\mathcal{K} = -\frac{1}{|\mathcal{K}|}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma}A_\mathcal{K}^{-1}(x_\sigma - x_\mathcal{K}).$$
- D'où $$(u_\sigma - u_\mathcal{K})_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} = B_\mathcal{K}(F_{\mathcal{K},\sigma})_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}},$$
  où $B_\mathcal{K}$ est S.D.P. et ne dépend que de la géométrie de $\mathcal{K}$ et de $\nu_\mathcal{K}$.

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

Implémentation

- Initialement, le nombre d'inconnues est important.
- Le système linéaire n'a pas de structure simple.

Hybridation (cas linéaire)

But : Ramener le problème à un système SDP plus petit.

- On définit une inconnue scalaire par arête par

$$u_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} u_\mathcal{K} + \mathbf{v}_\mathcal{K}\cdot(x_\mathcal{K} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{K}|\mathcal{K}|F_{\mathcal{K},\sigma} = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L}\cdot(x_\mathcal{L} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{L}|\mathcal{L}|F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

- On utilise

$$\mathbf{v}_\mathcal{K} = -\frac{1}{|\mathcal{K}|}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma} A_\mathcal{K}^{-1}(x_\sigma - x_\mathcal{K}).$$

- D'où

$$(F_{\mathcal{K},\sigma})_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} = B_\mathcal{K}^{-1}(u_\sigma - u_\mathcal{K})_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}}.$$

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

Implémentation

- Initialement, le nombre d'inconnues est important.
- Le système linéaire n'a pas de structure simple.

Hybridation (cas linéaire)

But : Ramener le problème à un système SDP plus petit.

- On définit une inconnue scalaire par arête par

$$u_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} u_\mathcal{K} + \mathbf{v}_\mathcal{K} \cdot (x_\mathcal{K} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{K} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\mathcal{L} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{L} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

- On utilise

$$\mathbf{v}_\mathcal{K} = -\frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma} A_\mathcal{K}^{-1} (x_\sigma - x_\mathcal{K}).$$

- D'où $$(F_{\mathcal{K},\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} = B_\mathcal{K}^{-1} (u_\sigma - u_\mathcal{K})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}}.$$
- Elimination de $u_\mathcal{K}$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma} = |\mathcal{K}| f_\mathcal{K}$$

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

IMPLÉMENTATION

- Initialement, le nombre d'inconnues est important.
- Le système linéaire n'a pas de structure simple.

HYBRIDATION (CAS LINÉAIRE)

But : Ramener le problème à un système SDP plus petit.

- On définit une inconnue scalaire par arête par

$$u_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} u_\mathcal{K} + \mathbf{v}_\mathcal{K} \cdot (x_\mathcal{K} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{K} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\mathcal{L} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{L} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

- On utilise

$$\mathbf{v}_\mathcal{K} = -\frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma} A_\mathcal{K}^{-1} (x_\sigma - x_\mathcal{K}).$$

- D'où $$(F_{\mathcal{K},\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} = B_\mathcal{K}^{-1} (u_\sigma - u_\mathcal{K})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}}.$$
- Elimination de $u_\mathcal{K}$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} c_{\mathcal{K},\sigma} (u_\sigma - u_\mathcal{K}) = |\mathcal{K}| f_\mathcal{K}$$

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

Implémentation

- Initialement, le nombre d'inconnues est important.
- Le système linéaire n'a pas de structure simple.

Hybridation (cas linéaire)

But : Ramener le problème à un système SDP plus petit.

- On définit une inconnue scalaire par arête par

$$u_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} u_\mathcal{K} + \mathbf{v}_\mathcal{K} \cdot (x_\mathcal{K} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{K} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\mathcal{L} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{L} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

- On utilise

$$\mathbf{v}_\mathcal{K} = -\frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma} A_\mathcal{K}^{-1} (x_\sigma - x_\mathcal{K}).$$

- D'où $$(F_{\mathcal{K},\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} = B_\mathcal{K}^{-1} (u_\sigma - u_\mathcal{K})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}}.$$
- Elimination de $u_\mathcal{K}$ $$\Rightarrow u_\mathcal{K} = b_\mathcal{K} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} \tilde{c}_{\mathcal{K},\sigma} u_\sigma.$$

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

Implémentation

- Initialement, le nombre d'inconnues est important.
- Le système linéaire n'a pas de structure simple.

Hybridation (cas linéaire)

But : Ramener le problème à un système SDP plus petit.

- On définit une inconnue scalaire par arête par

$$u_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} u_\mathcal{K} + \mathbf{v}_\mathcal{K} \cdot (x_\mathcal{K} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{K} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\mathcal{L} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{L} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

- On utilise

$$\mathbf{v}_\mathcal{K} = -\frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma} A_\mathcal{K}^{-1} (x_\sigma - x_\mathcal{K}).$$

- D'où $$(F_{\mathcal{K},\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} = B_\mathcal{K}^{-1} (u_\sigma - u_\mathcal{K})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}}.$$
- Elimination de $u_\mathcal{K}$ $$\Rightarrow u_\mathcal{K} = b_\mathcal{K} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} \tilde{c}_{\mathcal{K},\sigma} u_\sigma.$$

$$\Rightarrow (F_{\mathcal{K},\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} = C_\mathcal{K} (u_\sigma - u_{\sigma'})_{\sigma,\sigma' \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} + (G_{\mathcal{K},\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}}.$$

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

Implémentation

- Initialement, le nombre d'inconnues est important.
- Le système linéaire n'a pas de structure simple.

Hybridation (cas linéaire)

But : Ramener le problème à un système SDP plus petit.

- On définit une inconnue scalaire par arête par

$$u_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} u_\mathcal{K} + \mathbf{v}_\mathcal{K} \cdot (x_\mathcal{K} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{K} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\mathcal{L} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{L} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

- On utilise

$$\mathbf{v}_\mathcal{K} = -\frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma} A_\mathcal{K}^{-1} (x_\sigma - x_\mathcal{K}).$$

- D'où $\qquad (F_{\mathcal{K},\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} = B_\mathcal{K}^{-1} (u_\sigma - u_\mathcal{K})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}}.$
- Elimination de $u_\mathcal{K}$ $\quad \Rightarrow u_\mathcal{K} = b_\mathcal{K} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} \tilde{c}_{\mathcal{K},\sigma} u_\sigma.$

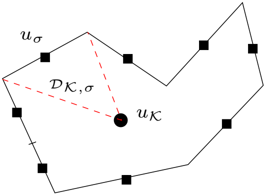
$$\Rightarrow (F_{\mathcal{K},\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} = C_\mathcal{K} (u_\sigma - u_{\sigma'})_{\sigma,\sigma' \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} + (G_{\mathcal{K},\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}}.$$

- $F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0 \Rightarrow$ Une équation par arête liant les $(u_\sigma)_\sigma$.

Partie 2 - Plan

1. **Quelques grandes classes de méthodes**
   - Schémas MPFA
   - Schémas diamants
   - Schémas VF monotones non-linéaires
   - Schémas DDFV
   - Schémas mimétiques
   - Schémas VF mixtes
   - Schémas SUCCES / SUSHI
2. Comparaisons : Benchmark FVCA 5
   - Test 1 : Anisotropie modérée
   - Test 3 : Ecoulement oblique
   - Test 4 : Faille verticale
   - Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène
   - Test 8 : Source ponctuelle
3. Bilan

(Eymard-Gallouët-Herbin '08)



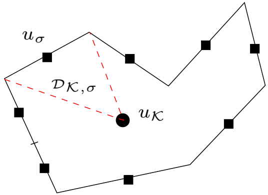
- Inconnues aux centres $u_\mathcal{K}$ et aux arêtes u_σ.
- L'ensemble des arêtes est divisé en deux

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_B \cup \mathcal{E}_H.$$

- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_B$ sont éliminées par une formule barycentrique $u_\sigma = \sum_\mathcal{K} \gamma_\mathcal{K}^\sigma u_\mathcal{K}$.
- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_H$ sont libres.
- Formule "géométrique" $\Longrightarrow$ définition d'un gradient discret :

$$|\mathcal{K}|\xi = \int_\mathcal{K} \nabla\Big(\xi \cdot (x - x_\mathcal{K})\Big)\, dx = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} \int_\sigma \Big(\xi \cdot (x - x_\mathcal{K})\Big) \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\sigma}\, dx$$
$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} |\sigma| \Big(\xi \cdot (x_\sigma - x_\mathcal{K})\Big) \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

(Eymard-Gallouët-Herbin '08)



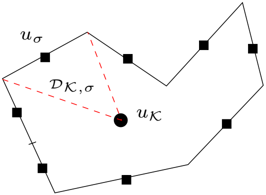
- Inconnues aux centres $u_\mathcal{K}$ et aux arêtes u_σ.
- L'ensemble des arêtes est divisé en deux

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_B \cup \mathcal{E}_H.$$

- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_B$ sont éliminées par une formule barycentrique $u_\sigma = \sum_\mathcal{K} \gamma_\mathcal{K}^\sigma u_\mathcal{K}$.
- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_H$ sont libres.
- Formule "géométrique" $\Longrightarrow$ définition d'un gradient discret :

$$|\mathcal{K}|\nabla u \approx \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} |\sigma|(u(x_\sigma) - u(x_\mathcal{K}))\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

(Eymard-Gallouët-Herbin '08)



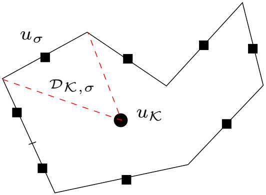
- Inconnues aux centres $u_\mathcal{K}$ et aux arêtes u_σ.
- L'ensemble des arêtes est divisé en deux

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_B \cup \mathcal{E}_H.$$

- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_B$ sont éliminées par une formule barycentrique $u_\sigma = \sum_\mathcal{K} \gamma_\mathcal{K}^\sigma u_\mathcal{K}$.
- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_H$ sont libres.
- Formule "géométrique" $\Longrightarrow$ définition d'un gradient discret :

$$\nabla_\mathcal{K} u^\mathcal{T} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} |\sigma|(u_\sigma - u_\mathcal{K})\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

(Eymard-Gallouët-Herbin '08)



- Inconnues aux centres $u_\mathcal{K}$ et aux arêtes u_σ.
- L'ensemble des arêtes est divisé en deux

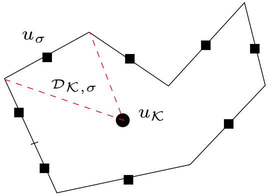
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_B \cup \mathcal{E}_H.$$

- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_B$ sont éliminées par une formule barycentrique $u_\sigma = \sum_\mathcal{K} \gamma_\mathcal{K}^\sigma u_\mathcal{K}$.
- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_H$ sont libres.
- Formule "géométrique" $\Longrightarrow$ définition d'un gradient discret :

$$\nabla_\mathcal{K} u^\mathcal{T} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} |\sigma| (u_\sigma - u_\mathcal{K}) \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

- Err. de consistance $R_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T}) = \dfrac{\alpha}{d_{\mathcal{K},\sigma}} \Big(u_\sigma - u_\mathcal{K} - \nabla_\mathcal{K} u^\mathcal{T} \cdot (x_\sigma - x_\mathcal{K}) \Big)$.

(Eymard-Gallouët-Herbin '08)



- Inconnues aux centres $u_\mathcal{K}$ et aux arêtes u_σ.
- L'ensemble des arêtes est divisé en deux

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_B \cup \mathcal{E}_H.$$

- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_B$ sont éliminées par une formule barycentrique $u_\sigma = \sum_\mathcal{K} \gamma_\mathcal{K}^\sigma u_\mathcal{K}$.
- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_H$ sont libres.
- Formule "géométrique" $\Longrightarrow$ définition d'un gradient discret :

$$\nabla_\mathcal{K} u^\mathcal{T} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} |\sigma|(u_\sigma - u_\mathcal{K}) \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

- Err. de consistance $R_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T}) = \dfrac{\alpha}{d_{\mathcal{K},\sigma}} \Big(u_\sigma - u_\mathcal{K} - \nabla_\mathcal{K} u^\mathcal{T} \cdot (x_\sigma - x_\mathcal{K}) \Big)$.
- Sur chaque triangle $\mathcal{D}_{\mathcal{K},\sigma}$ on définit un gradient stabilisé

$$\nabla_{\mathcal{K},\sigma} u^\mathcal{T} = \nabla_\mathcal{K} u^\mathcal{T} + R_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T}) \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

- Le schéma s'écrit sous forme "variationnelle"

$$\int_\Omega (A(x)\nabla^\mathcal{T} u^\mathcal{T}) \cdot \nabla^\mathcal{T} v^\mathcal{T}\, dx = \sum_\mathcal{K} |\mathcal{K}| v_\mathcal{K} f_\mathcal{K}, \quad \forall v^\mathcal{T} = ((v_\mathcal{K})_\mathcal{K}, (v_\sigma)_\sigma).$$

- Le schéma s'écrit sous forme "variationnelle"

$$\int_\Omega (A(x)\nabla^\mathcal{T} u^\mathcal{T}) \cdot \nabla^\mathcal{T} v^\mathcal{T}\, dx = \sum_\mathcal{K} |\mathcal{K}| v_\mathcal{K} f_\mathcal{K}, \quad \forall v^\mathcal{T} = ((v_\mathcal{K})_\mathcal{K}, (v_\sigma)_\sigma).$$

- On peut l'écrire sous forme VF

$$\sum_\mathcal{K} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T})(v_\mathcal{K} - v_\sigma) = \sum_\mathcal{K} |\mathcal{K}| v_\mathcal{K} f_\mathcal{K}, \quad \forall v^\mathcal{T} = ((v_\mathcal{K})_\mathcal{K}, (v_\sigma)_\sigma),$$

avec $F_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T}) = \displaystyle\sum_{\sigma'\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} \alpha_\mathcal{K}^{\sigma,\sigma'}(u_\mathcal{K} - u_{\sigma'})$, $\alpha_\mathcal{K}^{\sigma,\sigma'}$ dépend des données.

- Le schéma s'écrit sous forme "variationnelle"

$$\int_\Omega (A(x)\nabla^\mathcal{T} u^\mathcal{T}) \cdot \nabla^\mathcal{T} v^\mathcal{T}\, dx = \sum_\mathcal{K} |\mathcal{K}| v_\mathcal{K} f_\mathcal{K}, \quad \forall v^\mathcal{T} = ((v_\mathcal{K})_\mathcal{K}, (v_\sigma)_\sigma).$$

- On peut l'écrire sous forme VF

$$\sum_\mathcal{K} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T})(v_\mathcal{K} - v_\sigma) = \sum_\mathcal{K} |\mathcal{K}| v_\mathcal{K} f_\mathcal{K}, \quad \forall v^\mathcal{T} = ((v_\mathcal{K})_\mathcal{K}, (v_\sigma)_\sigma),$$

avec $F_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T}) = \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} \alpha_\mathcal{K}^{\sigma,\sigma'}(u_\mathcal{K} - u_{\sigma'})$, $\alpha_\mathcal{K}^{\sigma,\sigma'}$ dépend des données.

- Pour les arêtes $\sigma \in \mathcal{E}_H$, l'inconnue v_σ est un degré de liberté, donc

$$F_{\mathcal{K},\sigma}(u) + F_{\mathcal{L},\sigma}(u) = 0.$$

- Pour les arêtes $\sigma \in \mathcal{E}_B$, **ceci est faux**.

- Le schéma s'écrit sous forme "variationnelle"

$$\int_\Omega (A(x)\nabla^\mathcal{T} u^\mathcal{T}) \cdot \nabla^\mathcal{T} v^\mathcal{T}\, dx = \sum_\mathcal{K} |\mathcal{K}| v_\mathcal{K} f_\mathcal{K}, \quad \forall v^\mathcal{T} = ((v_\mathcal{K})_\mathcal{K}, (v_\sigma)_\sigma).$$

- On peut l'écrire sous forme VF

$$\sum_\mathcal{K} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T})(v_\mathcal{K} - v_\sigma) = \sum_\mathcal{K} |\mathcal{K}| v_\mathcal{K} f_\mathcal{K}, \quad \forall v^\mathcal{T} = ((v_\mathcal{K})_\mathcal{K}, (v_\sigma)_\sigma),$$

avec $F_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T}) = \sum_{\sigma'\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} \alpha_\mathcal{K}^{\sigma,\sigma'}(u_\mathcal{K} - u_{\sigma'})$, $\alpha_\mathcal{K}^{\sigma,\sigma'}$ dépend des données.

- Pour les arêtes $\sigma \in \mathcal{E}_H$, l'inconnue v_σ est un degré de liberté, donc

$$F_{\mathcal{K},\sigma}(u) + F_{\mathcal{L},\sigma}(u) = 0.$$

- Pour les arêtes $\sigma \in \mathcal{E}_B$, **ceci est faux**.

Choix des arêtes barycentriques/hybrides

- On décide que $\sigma \in \mathcal{E}_B$ si le tenseur A est régulier près de σ.
- On décide que $\sigma \in \mathcal{E}_H$ si A est discontinu à travers σ pour assurer une bonne précision et la conservativité locale.

Propriétés

(Eymard-Gallouët-Herbin '08)

- Schéma barycentrique/hybride adapté à la géométrie à mi-chemin entre VF et EF mixtes, proche des schémas mimétiques.

Propriétés (Eymard-Gallouët-Herbin '08)

- Schéma barycentrique/hybride adapté à la géométrie à mi-chemin entre VF et EF mixtes, proche des schémas mimétiques.
- La conservativité locale n'est assurée que sur les arêtes "hybrides".
  - Schéma totalement barycentrique :

    peu d'inconnues / profil large / pas de conservativité locale
  - Schéma totalement hybride :

    beaucoup d'inconnues / profil réduit / conservativité locale
- Dans le cas barycentrique, la notion de "flux local" n'est pas très claire.

Propriétés

(Eymard-Gallouët-Herbin '08)

- Schéma barycentrique/hybride adapté à la géométrie à mi-chemin entre VF et EF mixtes, proche des schémas mimétiques.
- La conservativité locale n'est assurée que sur les arêtes "hybrides".
  - Schéma totalement barycentrique :

    peu d'inconnues / profil large / pas de conservativité locale
  - Schéma totalement hybride :

    beaucoup d'inconnues / profil réduit / conservativité locale
- Dans le cas barycentrique, la notion de "flux local" n'est pas très claire.
- Le système linéaire à résoudre est symétrique.
- Existence et unicité de la solution.
- Théorème de convergence dans le cas général.
- Estimation d'erreur en $O(\text{size}(\mathcal{T}))$ pour u et ∇u dans le cas **isotrope régulier**.

Equivalence des approches

(Droniou–Eymard–Gallouët–Herbin '09)

Théorème (énoncé simplifié)

Les trois méthodes suivantes

- *Mimétique*
- *VF mixtes*
- *SUCCES*

sont **algébriquement** *équivalentes (en choisissant convenablement les paramètres).*

Présentation rapide du benchmark

(Herbin-Hubert, '08)

`http://www.latp.univ-mrs.fr/fvca5`
Actes de la conférence édités chez Wiley
Ed. : Robert Eymard et Jean-Marc Hérard

- 19 contributions.

- 9 cas tests.
- Une dizaine de familles de maillages.

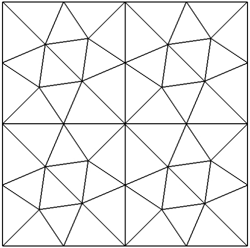
- Quelques éléments de comparaison :
  - Nombre d'inconnues / d'éléments non nuls de la matrice.
  - Respect de la conservativité locale.
  - Erreurs L^∞/L^2 sur u et ∇u.
  - Erreur sur l'approximation des flux aux interfaces.
  - Respect de la positivité / Principe du maximum discret.
  - Bilan énergétique discret.

Partie 2 - Plan

Test 1 : Anisotropie modérée

$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = f \text{ dans } \Omega$$

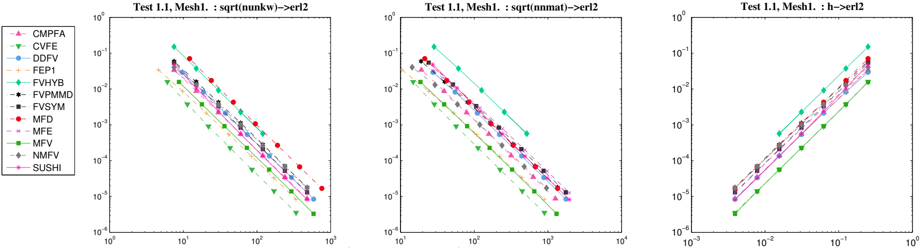
avec $A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$ et $u(x,y) = 16x(1-x)y(1-y)$.



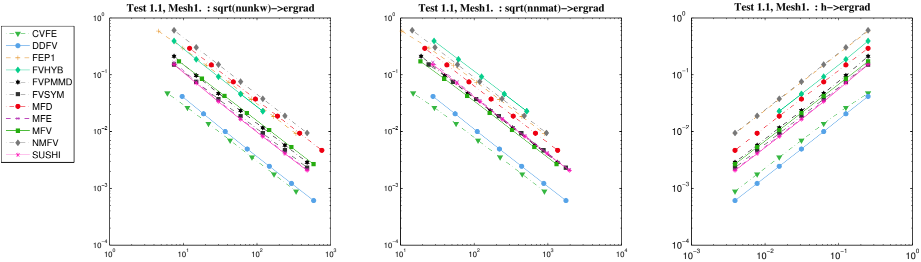
Mesh1

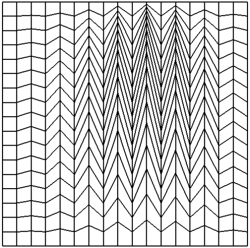
Test 1 : Anisotropie modérée

Erreur L^2 sur la solution (ordre 2)

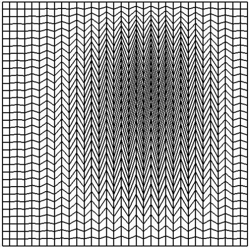


et sur le gradient (ordre 1)





Mesh4_1



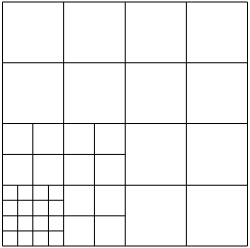
Mesh4_2

Minimum et maximum de la solution approchée

	mesh 4_1		mesh 4_2	
	umin	umax	umin	umax
CMPFA	9.95E-03	1.00E+00	2.73E-03	9.99E-01
CVFE	0.00E+00	8.43E-01	0.00E+00	9.14E-01
DDFV	1.33E-02	9.96E-01	3.63E-03	9.99E-01
FEQ1	0.00E+00	8.61E-01	0.00E+00	9.37E-01
FVHYB	2.14E-03	9.84E-01	7.16E-04	9.93E-01
FVSYM	7.34E-03	9.59E-01	2.33E-03	9.89E-01
MFD	6.64E-03	9.71E-01	1.50E-03	9.93E-01
MFV	1.08E-02	9.42E-01	3.34E-03	9.82E-01
NMFV	1.30E-02	**1.11E+00**	3.61E-03	**1.04E+00**
SUSHI	7.64E-03	8.88E-01	2.33E-03	9.61E-01

$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = f \text{ dans } \Omega$$

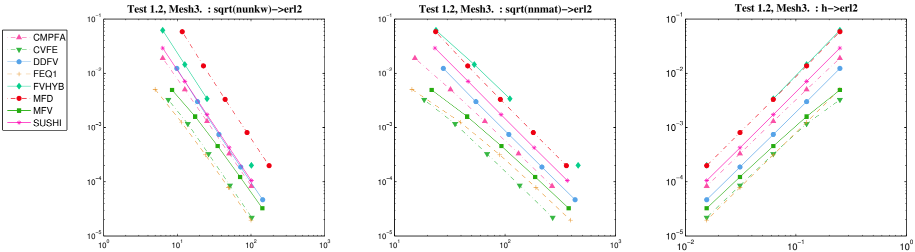
avec $A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$ et
$u(x,y) = \sin\left((1-x)(1-y)\right) + (1-x)^3(1-y)^2.$



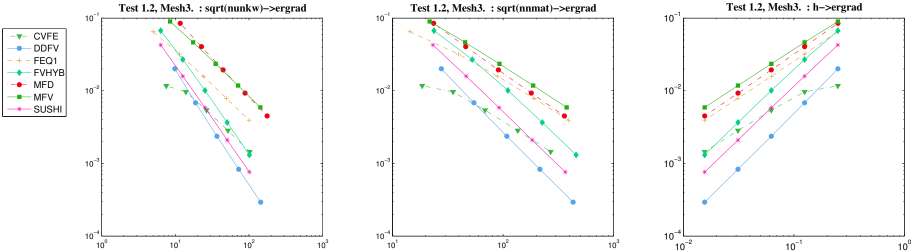
Mesh3

Test 1 : Anisotropie modérée

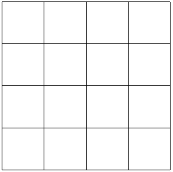
Erreur L^2 sur la solution (ordre 2)



et sur le gradient (ordres 0.5 ou 1)



Partie 2 - Plan



$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = 0 \text{ dans } \Omega$$

$$\text{avec } A = R_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-3} \end{pmatrix} R_\theta^{-1},\ \theta = 40^\circ$$

La donnée au bord $\bar{u}$ est continue et linéaire par morceaux sur $\partial\Omega$:

$$\bar{u}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{sur } (0,.2)\times\{0.\}\cup\{0.\}\times(0,.2) \\ 0 & \text{sur } (.8,1.)\times\{1.\}\cup\{1.\}\times(.8,1.) \\ \frac{1}{2} & \text{sur } ((.3,1.)\times\{0\}\cup\{0\}\times(.3,1.) \\ \frac{1}{2} & \text{sur } (0.,.7)\times\{1.\}\cup\{1.\}\times(0.,0.7) \end{cases}$$

Minimum et maximum des solutions approchées

	umin_i	umax_i	i
CMPFA	6.90E-02	9.31E-01	1
	9.83E-04	9.99E-01	7
CVFE	0.00E+00	1.00E+00	1
	0.00E+00	1.00E+00	7
DDFV	**-4.72E-03**	1.00E+00	1
	-5.31E-04	1.00E+00	7
FEQ1	0.00E+00	1.00E+00	1
	0.00E+00	1.00E+00	7
FVHYB	**-1.75E-01**	**1.17E+00**	1
	-1.00E-03	1.00E+00	6
FVSYM	6.85E-02	9.32E-01	1
	4.92E-04	9.99E-01	8
MFD	7.56E-02	9.24E-01	1
	8.01E-04	9.99E-01	8
MFE	3.12E-02	9.69E-01	1
	5.08E-04	9.99E-01	8
MFV	1.22E-02	8.78E-01	1
	7.92E-04	9.99E-01	7
NMFV	1.11e-01	8.88e-01	1
	1.28E-03	9.99E-01	7
SUSHI	6.03E-02	9.40E-01	1
	8.52E-04	9.99E-01	7

LES ÉNERGIES

	ener1	eren	i
CMPFA	N/A N/A	N/A N/A	
CVFE	2.24E-01 2.42E-01	8.42E-02 3.33E-03	1 7
DDFV	2.14E-01 2.42E-01	9.60E-02 7.11E-06	1 7
FEQ1	2.21E-01 2.44E-01	3.67E-01 3.17E-02	1 7
FVHYB	2.13E-01 2.42E-01	2.55E-01 8.19E-03	1 6
FVSYM	2.20E-01 2.42E-01	0.00E+00 0.00E+00	1 8
MFD	**1.91E-01** 2.42E-01	1.87E-14 3.70E-14	1 8
MFE	**1.25E-01** 2.41E-01	2.46E-02 2.91E-03	1 8
MFV	**4.85E-01** 2.42E-01	8.23E-07 9.74E-06	1 7
NMFV	2.33e-01 2.45E-01	1.45e-01 1.94E-02	1 7
SUSHI	2.25E-01 2.43E-01	3.01E-01 1.28E-02	1 7

Energie de volume

$$\text{ener1} \approx \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u \, dx,$$

Energie de bord

$$\text{ener2} \approx \int_{\partial\Omega} A\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} \, dx.$$

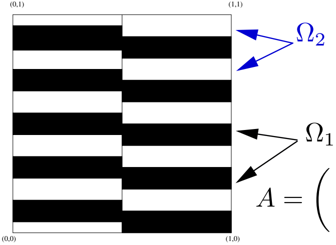
Sur le problème continu :

$$\text{eren1} = \text{eren2}.$$

Erreur sur le bilan d'énergie

$$\text{eren} = \text{ener1} - \text{ener2}.$$

Partie 2 - Plan

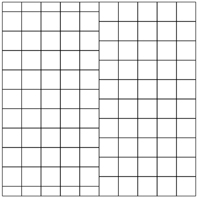


$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = 0 \text{ dans } \Omega$$

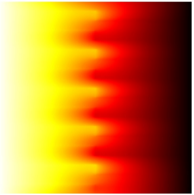
$$u = \bar{u} \text{ sur } \partial\Omega$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^2 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ dans } \Omega_1, \\ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-2} \\ 10^{-3} \end{pmatrix} \text{ dans } \Omega_2 \end{array} \right.$$

et $\bar{u}(x,y) = 1 - x$.



mesh5



Principe du maximum

- Vérifié par toutes les méthodes présentées ici.

Valeurs des énergies

	ener1 mesh5	eren mesh5	ener1 mesh5_ref	eren mesh5_ref
CVFE	45.9	1.04E-02	**43.3**	6.25E-04
DDFV	**42.1**	3.65E-02	**43.2**	1.27E-03
FVHYB	**41.4**	6.12E-02	/	/
MFD-BLS	33.9	7.93E-14	**43.2**	2.84E-12
MFD	31.4	1.16E-12	**43.2**	4.71E-14
MFV	49.9	4.21E-05	**43.2**	1.88E-05
NMFV	/	/	**43.2**	5.92E-04
SUSHI	39.1	6.67E-02	**43.1**	8.88E-04

APPROXIMATION DES FLUX SORTANT

$$\text{flux en } x = 0 : \int_{\partial\Omega\cap\{x=0\}} A\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu},$$

	flux0 `mesh5`	flux0 `mesh5_ref`	flux1 `mesh5`	flux1 `mesh5_ref`	fluy0 `mesh5`	fluy0 `mesh5_ref`	fluy1 `mesh5`
CMPFA	-45.2	**-42.1**	46.1	**44.4**	-0.95	**-2.33**	4.84E-04
CVFE	-46.6	**-42.2**	48.5	**44.5**	0.87	-2.25	8.02E-04
DDFV	-40.0	**-42.1**	41.8	**44.4**	-1.81	**-2.33**	9.08E-04
FEQ1	/	**-42.2**	/	**44.5**	/	-2.16	/
FVHYB	-44.3	/	46.3	/	0.49	/	1.55E-04
MFD	-29.7	**-42.1**	34.1	**44.4**	-4.37	**-2.33**	1.01E-03
MFV	-44.0	**-42.1**	50.3	**44.4**	-8.03	**-2.33**	1.72E+00
NMFV	**-43.2**	**-42.1**	**44.5**	**44.4**	-1.23	**-2.33**	2.32E-04
SUSHI	**-40.9**	**-42.1**	**43.1**	**44.4**	**-2.21**	**-2.33**	6.94E-04

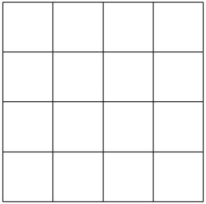
Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène

$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = f \text{ dans } \Omega$$

avec

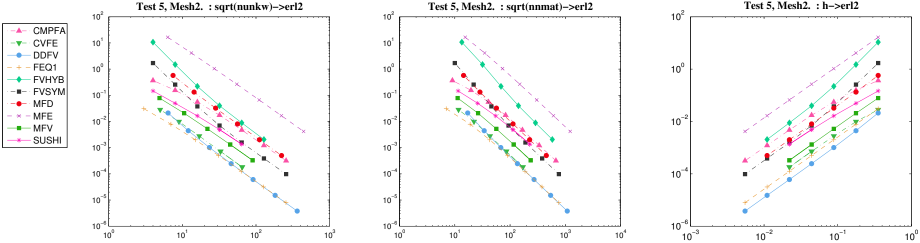
$$A = \frac{1}{(x^2+y^2)}\begin{pmatrix} 10^{-3}x^2 + y^2 & (10^{-3}-1)xy \\ (10^{-3}-1)xy & x^2 + 10^{-3}y^2 \end{pmatrix}$$

et $u(x,y) = \sin \pi x \sin \pi y$.

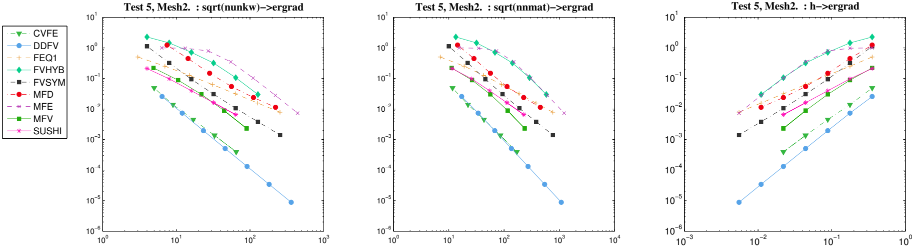


`mesh2`

ERREUR EN NORME L^2 SUR LA SOLUTION (ORDRE 2)



ET SUR SON GRADIENT (ORDRES COMPRIS ENTRE 1 ET 2)



Certains schémas ne vérifient pas le principe du maximum

	umin	umax
CMPFA	**-1.06E-01**	**1.09E+00**
FEQ1	0.00E+00	**1.05E+00**
FVHYB	**-1.92E+01**	**5.38E+00**
FVSYM	**-8.67E-01**	**2.57E+00**
MFE	**-1.62E+00**	**1.90E+01**

Partie 2 - Plan

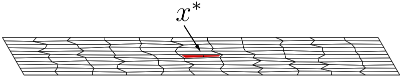
$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega$$

Conditions de Dirichlet homogènes

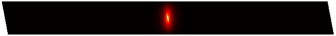
Terme source "mesure" : $f = 0$ sauf dans la cellule C^*

- $C^* = \text{cell}(6,6)$
- $\int_{\text{cell}(6,6)} f(x)\,dx = 1.$

- $C^* = x^*$
- $f = \delta_{x^*}.$



Le maillage quadrangle utilisé `mesh9`



Solution de référence sur une grille fine régulière

Valeurs extrêmes des solutions approchées

	umin	umax
Fine grid	**1.07E-24**	**4.10E-01**
CMPFA	-2.31E-02	1.03E-01
CVFE	-1.23E-03	4.24E-02
DDFV	-1.25E-03	8.22E-02
FEQ1	-4.17E-03	4.90E-02
FVHYB	-3.38E-02	1.12E-01

	umin	umax
FVSYM	-7.21E-02	1.52E-01
FVPMMD	**1.22E-09**	**3.99E-01**
MFD	**-1.03E-01**	1.85E-01
MFV	-8.08E-03	5.81E-02
NMFV	**3.05E-15**	9.42E-02
SUSHI	-1.19E-03	5.65E-02
SUSHI-P	**3.26E-06**	**6.77E-03**

FLUX DE MASSE SUR LES QUATRE CÔTÉS DU DOMAINE

	flux0	flux1	fluy0	fluy1
Fine grid	**5.46E-21**	**5.46E-21**	**5.00E-01**	**5.00E-01**
CVFE	-1.17E-05	2.63E-05	2.87E-01	5.54E-01
DDFV	**-5.814E-10**	**-3.35E-10**	**4.97E-01**	**5.02E-01**
FEQ1	5.51E-06	7.15E-05	5.46E-01	4.89E-01
FVSYM	1.37E-04	-1.15E-04	**4.96E-01**	**5.04E-01**
FVPMMD	1.76E-06	3.5E-06	4.55E-01	5.44E-01
MFD	-5.14E-04	-3.13E-03	**5.01E-01**	**5.03E-01**
MFV	-2.30E-02	4.95E-02	2.74E-01	6.99E-01
NMFV	**0.00E+00**	**0.00E+00**	**4.99E-01**	**5.01E-01**
SUSHI	7.35E-04	1.29E-04	**4.99E-01**	**5.00E-01**
SUSHI-P	-4.21E-02	-3.29E-02	5.38E-01	5.37E-01

Comment choisir un schéma ?

- Ai-je besoin d'utiliser un maillage vraiment général (non conforme, déformé, ...) ?
- Ai-je besoin d'assurer la positivité/monotonie ?
- Ai-je besoin d'une approximation précise du gradient/des flux ?
- Ai-je besoin d'une approximation précise des énergies ?

Y-a-t'il une conclusion ?

Comment choisir un schéma ?

- Ai-je besoin d'utiliser un maillage vraiment général (non conforme, déformé, ...) ?
- Ai-je besoin d'assurer la positivité/monotonie ?
- Ai-je besoin d'une approximation précise du gradient/des flux ?
- Ai-je besoin d'une approximation précise des énergies ?

- Avec quelles autres équations dois-je envisager un couplage ? Avec un code déjà existant ?
- Si oui, quelle est la structure de données dont je dispose dans mon code ?

Comment choisir un schéma ?

- Ai-je besoin d'utiliser un maillage vraiment général (non conforme, déformé, ...) ?
- Ai-je besoin d'assurer la positivité/monotonie ?
- Ai-je besoin d'une approximation précise du gradient/des flux ?
- Ai-je besoin d'une approximation précise des énergies ?

- Avec quelles autres équations dois-je envisager un couplage ? Avec un code déjà existant ?
- Si oui, quelle est la structure de données dont je dispose dans mon code ?

- Ai-je besoin d'être rassuré par des théorèmes ?

Fin de la deuxième partie !

- **Etape 1 :**

Consistance : $$\big((A_\mathcal{K}\nabla\varphi), G\big)_{A^{-1},\mathcal{K}} + \int_\mathcal{K} \varphi \,\mathrm{div}^{\,\mathcal{K}} G\, dx = \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} G_{\mathcal{K},\sigma}\left(\int_\sigma \varphi\right), \forall \mathcal{K}, \forall G \in \mathbb{R}^\mathcal{E}, \forall\varphi \text{ affine.}$$

On applique cela à $\varphi(x) = b\cdot(x - x_\mathcal{K})$, $b \in \mathbb{R}^2$, il vient

$$M_\mathcal{K} N_\mathcal{K} = R_\mathcal{K}. \qquad (\star)$$

Construction de la matrice $M_\mathcal{K}$

- **Etape 1 :**

  Consistance : $$\big((A_\mathcal{K}\nabla\varphi), G\big)_{A^{-1},\mathcal{K}} + \int_\mathcal{K} \varphi \,\mathrm{div}^{\mathcal{K}} G\, dx$$
  $$= \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} G_{\mathcal{K},\sigma}\left(\int_\sigma \varphi\right), \forall \mathcal{K}, \forall G \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}}, \forall \varphi \text{ affine.}$$

  On applique cela à $\varphi(x) = b\cdot(x - x_\mathcal{K})$, $b\in\mathbb{R}^2$, il vient
  $$M_\mathcal{K} N_\mathcal{K} = R_\mathcal{K}. \qquad (\star)$$

- **Etape 2 :** La matrice $M_\mathcal{K} = \frac{1}{|\mathcal{K}|} R_\mathcal{K} A_\mathcal{K}^{-1\,t} R_\mathcal{K}$ vérifie $(\star)$.

Construction de la matrice $M_{\mathcal{K}}$

- **Etape 1 :**

  Consistance : $$\big((A_{\mathcal{K}}\nabla\varphi), G\big)_{A^{-1},\mathcal{K}} + \int_{\mathcal{K}} \varphi \,\mathrm{div}^{\mathcal{K}} G\, dx$$
  $$= \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} G_{\mathcal{K},\sigma}\left(\int_\sigma \varphi\right), \forall \mathcal{K}, \forall G \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}}, \forall \varphi \text{ affine.}$$

  On applique cela à $\varphi(x) = b\cdot(x - x_{\mathcal{K}})$, $b\in\mathbb{R}^2$, il vient
  $$M_{\mathcal{K}} N_{\mathcal{K}} = R_{\mathcal{K}}. \qquad (\star)$$

- **Etape 2 :** La matrice $M_{\mathcal{K}} = \frac{1}{|\mathcal{K}|} R_{\mathcal{K}} A_{\mathcal{K}}^{-1}\, {}^t R_{\mathcal{K}}$ vérifie $(\star)$.
- **Etape 3 :** Si $M_{\mathcal{K}} N_{\mathcal{K}} = 0$, alors on a
  $$\ker {}^t C_{\mathcal{K}} \subset \ker M_{\mathcal{K}} \quad \Rightarrow \exists P_{\mathcal{K}}, \quad M_{\mathcal{K}} = P_{\mathcal{K}}\, {}^t C_{\mathcal{K}}.$$

  Comme $M_{\mathcal{K}}$ est symétrique
  $$P_{\mathcal{K}}\, {}^t C_{\mathcal{K}} = C_{\mathcal{K}}\, {}^t P_{\mathcal{K}} \quad \Rightarrow P_{\mathcal{K}} = C_{\mathcal{K}} \underbrace{{}^t P_{\mathcal{K}} C_{\mathcal{K}} \left({}^t C_{\mathcal{K}} C_{\mathcal{K}}\right)^{-1}}_{\overset{\text{def}}{=} U_{\mathcal{K}}}.$$

  On vérifie aisément que $U_{\mathcal{K}}$ est SDP.

Soient $\nu = (\nu_\mathcal{K})_\mathcal{K}$ des paramètres positifs. On note

$$L_\nu(\mathcal{T}) = \Big\{ (u^\mathcal{T}, \mathbf{v}^\mathcal{T}, F^\mathcal{T}) \text{ vérifiant, pour toute arête } \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}$$

$$u_\mathcal{K} + \mathbf{v}_\mathcal{K} \cdot (x_\sigma - x_\mathcal{K}) - \nu_\mathcal{K} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\sigma - x_\mathcal{L}) - \nu_\mathcal{L} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma} \Big\}.$$

Théorème (Inégalité de Poincaré)

Il existe une constante $C > 0$ *ne dépendant que de* $\mathrm{reg}(\mathcal{T})$ *telle que*

$$\forall (u^\mathcal{T}, \mathbf{v}^\mathcal{T}, F) \in L_\nu(\mathcal{T}),\ \|u^\mathcal{T}\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|\mathbf{v}^\mathcal{T}\|_{L^2(\Omega)} + N(\nu, F)),$$

avec

$$N(\nu, F) = \left(\sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} |\mathcal{K}|^2 \nu_\mathcal{K}^2 F_{\mathcal{K},\sigma}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$u_\mathcal{K} + \mathbf{v}_\mathcal{K} \cdot (x_\sigma - x_\mathcal{K}) - \nu_\mathcal{K} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\sigma - x_\mathcal{L}) - \nu_\mathcal{L} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma} \quad (\star)$$

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma} \quad (\star)$$

On exprime $u^{\mathcal{T}}$ à l'aide de flux

Soit $w \in H^2(B(0,R))$ telle que $-\Delta w = u^{\mathcal{T}}$ dans Ω. On a alors

$$|\mathcal{K}| u_{\mathcal{K}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \left(- \int_\sigma \nabla w \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} G_{\mathcal{K},\sigma}.$$

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma} \quad (\star)$$

On exprime $u^{\mathcal{T}}$ à l'aide de flux

Soit $w \in H^2(B(0,R))$ telle que $-\Delta w = u^{\mathcal{T}}$ dans Ω. On a alors

$$|\mathcal{K}| u_{\mathcal{K}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \left(-\int_\sigma \nabla w \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} G_{\mathcal{K},\sigma}.$$

On multiplie $(\star)$ par le flux de w

N.B. : $G_{\mathcal{K},\sigma} = -G_{\mathcal{L},\sigma}$

$$\sum_{\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E}} (u_{\mathcal{K}} G_{\mathcal{K},\sigma} + u_{\mathcal{L}} G_{\mathcal{L},\sigma}) + (\mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) G_{\mathcal{K},\sigma} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) G_{\mathcal{L},\sigma})$$
$$- (\nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} G_{\mathcal{K},\sigma} + \nu_{\mathcal{L}} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma} G_{\mathcal{L},\sigma}) = 0.$$

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma} \quad (\star)$$

On exprime $u^{\mathcal{T}}$ à l'aide de flux

Soit $w \in H^2(B(0,R))$ telle que $-\Delta w = u^{\mathcal{T}}$ dans Ω. On a alors

$$|\mathcal{K}| u_{\mathcal{K}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \left(- \int_\sigma \nabla w \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} G_{\mathcal{K},\sigma}.$$

On multiplie $(\star)$ par le flux de w

N.B. : $G_{\mathcal{K},\sigma} = -G_{\mathcal{L},\sigma}$

$$\sum_{\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E}} (u_{\mathcal{K}} G_{\mathcal{K},\sigma} + u_{\mathcal{L}} G_{\mathcal{L},\sigma}) + (\mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) G_{\mathcal{K},\sigma} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) G_{\mathcal{L},\sigma})$$
$$- (\nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} G_{\mathcal{K},\sigma} + \nu_{\mathcal{L}} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma} G_{\mathcal{L},\sigma}) = 0.$$

On ordonne par volumes de contrôle

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} |\mathcal{K}| |u_{\mathcal{K}}|^2 = \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} (x_{\mathcal{K}} - x_\sigma) G_{\mathcal{K},\sigma} \right) + \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} G_{\mathcal{K},\sigma} \right).$$

$$\|u^{\mathcal{T}}\|_{L^2}^2 = \underbrace{\sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} (x_{\mathcal{K}} - x_\sigma) G_{\mathcal{K},\sigma}\right)}_{=T_1} + \underbrace{\sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} G_{\mathcal{K},\sigma}\right)}_{=T_2}.$$

Premier terme

$$T_1 = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| (x_{\mathcal{K}} - x_\sigma) \otimes \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma}\right)}_{|\mathcal{K}|\mathrm{Id}} \left(\frac{1}{|\mathcal{K}|} \int_{\mathcal{K}} \nabla w\right) + O(\mathrm{size}(\mathcal{T})) \|\mathbf{v}^{\mathcal{T}}\|_{L^2} \|.$$

$$\|u^{\mathcal{T}}\|_{L^2}^2 = \underbrace{\sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} (x_{\mathcal{K}} - x_\sigma) G_{\mathcal{K},\sigma} \right)}_{=T_1} + \underbrace{\sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} G_{\mathcal{K},\sigma} \right)}_{=T_2}.$$

Premier terme

$$T_1 = \int_\Omega \mathbf{v}^{\mathcal{T}} \cdot \nabla w + O(\mathrm{size}(\mathcal{T})).$$

Le $O(\mathrm{size}(\mathcal{T}))$ contient des termes de la forme

$$\left| \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \nabla w - \frac{1}{|\mathcal{K}|} \int_{\mathcal{K}} \nabla w \right|^2 \leq C \frac{\mathrm{diam}(\mathcal{K})}{|\sigma|} \int_{\mathcal{K}} |\nabla^2 w|^2.$$

$$\|u^{\mathcal{T}}\|_{L^2}^2 = \underbrace{\sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} (x_{\mathcal{K}} - x_\sigma) G_{\mathcal{K},\sigma} \right)}_{=T_1} + \underbrace{\sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} G_{\mathcal{K},\sigma} \right)}_{=T_2}.$$

Premier terme

$$|T_1| \leq \|\mathbf{v}^{\mathcal{T}}\|_{L^2} \underbrace{\|\nabla w\|_{L^2}}_{\leq C\|u^{\mathcal{T}}\|_{L^2}} + O(\mathrm{size}(\mathcal{T}))\|\mathbf{v}^{\mathcal{T}}\|_{L^2} \underbrace{\|w\|_{H^2}}_{\leq C\|u^{\mathcal{T}}\|_{L^2}} .$$

Idem pour le deuxième terme

Retour

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma}. \quad (1)$$

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0. \quad (2)$$

$$|\mathcal{K}| A_{\mathcal{K}} \mathbf{v}_{\mathcal{K}} = - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}). \quad (3)$$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} = |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}}. \quad (4)$$

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma}. \quad (1)$$

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0. \quad (2)$$

$$|\mathcal{K}| A_{\mathcal{K}} \mathbf{v}_{\mathcal{K}} = - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}). \quad (3)$$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} = |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}}. \quad (4)$$

Obtention de l'estimation sous l'hypothèse $\nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| \leq C_0$.

- On multiplie (4) par $u_{\mathcal{K}}$ et on somme. En utilisant (2), il vient

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} (u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) F_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \int_\Omega u^{\mathcal{T}} f.$$

$$u_\mathcal{K} + \mathbf{v}_\mathcal{K} \cdot (x_\sigma - x_\mathcal{K}) - \nu_\mathcal{K}|\mathcal{K}|F_{\mathcal{K},\sigma} = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\sigma - x_\mathcal{L}) - \nu_\mathcal{L}|\mathcal{L}|F_{\mathcal{L},\sigma}. \quad (1)$$

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0. \quad (2)$$

$$|\mathcal{K}|A_\mathcal{K}\mathbf{v}_\mathcal{K} = -\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma}(x_\sigma - x_\mathcal{K}). \quad (3)$$

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma} = |\mathcal{K}|f_\mathcal{K}. \quad (4)$$

Obtention de l'estimation sous l'hypothèse $\nu_\mathcal{K}|\mathcal{K}| \leq C_0$.

- On multiplie (4) par $u_\mathcal{K}$ et on somme. En utilisant (2), il vient

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} (u_\mathcal{K} - u_\mathcal{L})F_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \int_\Omega u^\mathcal{T} f.$$

- On utilise (1), on réordonne par maille,

$$\sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \mathbf{v}_\mathcal{K} \cdot \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma}(x_\mathcal{K} - x_\sigma) \right) + \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} \nu_\mathcal{K}|\mathcal{K}||F_{\mathcal{K},\sigma}|^2 = \int_\Omega u^\mathcal{T} f.$$

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}}|\mathcal{K}|F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}}|\mathcal{L}|F_{\mathcal{L},\sigma}. \quad (1)$$

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0. \quad (2)$$

$$|\mathcal{K}|A_{\mathcal{K}}\mathbf{v}_{\mathcal{K}} = -\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(x_\sigma - x_{\mathcal{K}}). \quad (3)$$

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} = |\mathcal{K}|f_{\mathcal{K}}. \quad (4)$$

Obtention de l'estimation sous l'hypothèse $\nu_{\mathcal{K}}|\mathcal{K}| \leq C_0$.

- On multiplie (4) par $u_{\mathcal{K}}$ et on somme. En utilisant (2), il vient

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} (u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}})F_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \int_\Omega u^{\mathcal{T}} f.$$

- On utilise (1), on réordonne par maille, puis on utilise (3)

$$\sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{E}} |\mathcal{K}|\mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (A_{\mathcal{K}}\mathbf{v}_{\mathcal{K}}) + \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \nu_{\mathcal{K}}|\mathcal{K}||F_{\mathcal{K},\sigma}|^2 = \int_\Omega u^{\mathcal{T}} f.$$

Correspond à $\displaystyle\int_\Omega (A(x)\nabla u, \nabla u)\, dx = \int_\Omega f u\, dx.$

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}}|\mathcal{K}|F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}}|\mathcal{L}|F_{\mathcal{L},\sigma}. \quad (1)$$

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0. \quad (2)$$

$$|\mathcal{K}|A_{\mathcal{K}}\mathbf{v}_{\mathcal{K}} = -\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(x_\sigma - x_{\mathcal{K}}). \quad (3)$$

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} = |\mathcal{K}|f_{\mathcal{K}}. \quad (4)$$

Obtention de l'estimation sous l'hypothèse $\nu_{\mathcal{K}}|\mathcal{K}| \leq C_0$.

- On multiplie (4) par $u_{\mathcal{K}}$ et on somme. En utilisant (2), il vient

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} (u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}})F_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \int_\Omega u^{\mathcal{T}} f.$$

- On utilise (1), on réordonne par maille, puis on utilise (3)

$$\|\mathbf{v}^{\mathcal{T}}\|_{L^2}^2 + \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \nu_{\mathcal{K}}|\mathcal{K}||F_{\mathcal{K},\sigma}|^2 \leq C\|f\|_{L^2}\|u^{\mathcal{T}}\|_{L^2}.$$

On conclut par l'inégalité de Poincaré

$$\|u^{\mathcal{T}}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{v}^{\mathcal{T}}\|_{L^2}^2 + \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \nu_{\mathcal{K}}|\mathcal{K}||F_{\mathcal{K},\sigma}|^2 \leq C'\|f\|_{L^2}^2.$$

Retour