Master Mathématiques et Applications $1^{ère}$ année

Aix-Marseille Université
Année 2015-2016

Analyse Fonctionnelle
TD 4 : Grands théorèmes de l'analyse fonctionnelle

Avec corrigés

Les numéros de Théorèmes, Propositions, etc ... font référence aux notes de cours.

Exercice 1

Soit (X, d) un espace métrique complet et Ω un ouvert de X. Montrer que (Ω, d) est un espace de Baire.

Corrigé :

On remarque déjà que (Ω, d) n'est pas complet en général (pour cela il faudraitque Ω soit fermé d'après la Proposition I.29) donc, on ne peut pas appliquer directement le théorème de Baire.

En revanche, si on note $\overline{\Omega}$ l'adhérence de Ω dans (X, d), l'espace $(\overline{\Omega}, d)$ est un sous-espace fermé d'un espace complet, c'est donc un espace complet (Proposition I.29).

Soit $(U_n)_n$ une famille d'ouverts denses de (Ω, d).

— Comme Ω est lui-même ouvert dans (X, d), les U_n sont des ouverts de (X, d) et donc des ouverts de $(\overline{\Omega}, d)$ vu que $U_n \subset \Omega \subset \overline{\Omega}$.

— Par ailleurs, pour tout n, U_n est dense dans $\overline{\Omega}$. En effet, si $x \in \overline{\Omega}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $y \in \Omega$ tel que $d(x, y) \leq \varepsilon/2$ et comme U_n est dense dans Ω, il existe $z \in U_n$ tel que $d(y, z) \leq \varepsilon/2$. Il s'en suit que
$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$
et le résultat est démontré.

— Ainsi, la famille $(U_n)_n$ est une famille d'ouverts denses dans l'espace complet $(\overline{\Omega}, d)$ et donc le théorème de Baire nous dit que l'intersection $\bigcap_{n\geq 0} U_n$ est également un ensemble dense dans $\overline{\Omega}$. Comme c'est un sous-ensemble de Ω, il est clair que c'est également un sous-ensemble dense de Ω.

■

Exercice 2

Soit (X, d) un espace métrique complet. On suppose que X s'écrit comme réunion dénombrable des fermés $(F_n)_n$, alors l'ensemble
$$\Omega = \bigcup_n \overset{\circ}{F}_n,$$
est un ouvert dense dans X.

Corrigé :

Comme Ω est une réunion d'ouverts, c'est bien sûr un ouvert. Il s'agit de montrer la densité de Ω dans X.

Pour tout n, on note

$$\tilde{F}_n = F_n \cap \Omega^c,$$

qui est un fermé de X (car intersection de deux fermés). On va montrer qu'il est d'intérieur vide. En effet, si U est un ouvert contenu dans $\tilde{F}_n$, alors nous avons

$$U \subset F_n$$
$$U \subset \Omega^c.$$

La première inclusion implique que $U \subset \overset{\circ}{F}_n$ et donc en particulier $U \subset \Omega$. Comme on a également $U \subset \Omega^c$, on a finalement

$$U \subset \Omega \cap \Omega^c = \emptyset,$$

et donc $U = \emptyset$.

Enfin, comme l'union des F_n est l'espace entier, nous avons

$$\bigcup_n \tilde{F}_n = \left(\bigcup_n F_n\right) \cap \Omega^c = \Omega^c.$$

D'après le théorème de Baire, Ω^c est donc d'intérieur vide en tant qu'union dénombrable de fermés d'intérieur vide.

Ceci implique que $\overline{\Omega}^c$, qui est égal à l'intérieur de Ω^c est l'ensemble vide et donc que

$$\overline{\Omega} = X,$$

ce qui montre bien la densité de Ω. ■

Exercice 3

Soit I un intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Alors la fonction dérivée f' est continue en tout point d'un sous-ensemble dense de I.

Corrigé :

On se donne un intervalle compact $[a, b] \subset I$ et on prend un $\varepsilon > 0$ tel que $[a - \varepsilon, b + \varepsilon] \subset I$. Pour tout $n \geq 1/\varepsilon$, on définit la suite de fonctions sur $[a, b]$ définie par

$$g_n(x) = \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Comme f est continue sur I, chaque g_n est continue sur $[a, b]$ et de plus, nous avons la convergence simple

$$g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f'(x).$$

D'après le théorème de la limite simple de Baire (Théorème II.23), l'ensemble des points de continuité de f' dans $[a, b]$ est dense dans $[a, b]$.

En répétant l'argument sur tous les intervalles compacts inclus dans I, on obtient le résultat annoncé. ■

Exercice 4 (Quelques applications classiques du théorème de Baire)

1. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que pout $x \in \mathbb{R}^+$, la suite $(f(kx))_k$ est bornée.*
   Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
   Indication : On pourra introduire les ensembles $F_N = \{x \geq 0,\ \sup_k |f(kx)| \leq N\}$.
2. *Soit E un espace de Banach et $T : E \to E$ une application linéaire continue. On suppose que*

   $$\textit{pour tout } x \in E, \textit{ il existe } n_x \geq 1 \textit{ tel que } T^{n_x}(x) = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n_x \textit{ fois}}(x) = 0.$$

   Alors T est nilpotent : il existe $n \geq 1$ tel que

   $$T^n = 0.$$

   Montrer sur un exemple que ce résultat peut ne plus être vrai si on supprime les hypothèses sur E et T.

Corrigé :

1. Pour tout $N \geq 0$, on pose

$$F_N = \left\{ x \in \mathbb{R}^+, \ \sup_{k \geq 1} |f(kx)| \leq N \right\} = \bigcap_{k \geq 1} \frac{1}{k} |f|^{-1}([-N, N]) \cap \mathbb{R}^+.$$

Comme f est continue, F_N est une intersection de fermés, c'est donc un fermé.

Par ailleurs, l'hypothèse nous dit que tout point de $\mathbb{R}^+$ est dans l'un des F_N (il suffit de prendre N plus grand que la quantité finie $\sup_k |f(kx)|$).

On a donc $\mathbb{R}^+ = \bigcup_N F_N$ et comme $\mathbb{R}^+$ est complet (car c'est un fermé de $\mathbb{R}$), le théorème de Baire nous dit qu'il existe au moins un N_0 tel que F_{N_0} soit d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^+$. Autrement dit, il existe un intervalle ouvert non vide $]a, b[$ contenu dans F_{N_0}. Si $a < 0$, on voit que l'on peut toujours le remplacer par $b/2$ et obtenir que $]b/2, b[$ est contenu dans F_{N_0}. Ainsi, on peut supposer à bon droit que $a > 0$.

La propriété $]a, b[\subset F_{N_0}$ nous dit exactement que

$$\forall x \in]a, b[, \forall k \geq 0, \ \ |f(kx)| \leq N_0. \qquad (\star)$$

On pose alors $A = \frac{ab}{b-a}$ (on verra d'où vient cette valeur *magique* dans un instant). Montrons que f est bornée par N_0 sur $[A, +\infty[$.

Soit donc $y \geq A$. On souhaite montrer que l'intervalle $[y/b, y/a]$ contient un entier, pour cela il suffit de s'assurer que sa longueur est au moins égale à 1. Or nous avons justement par choix de A,

$$\left| \frac{y}{a} - \frac{y}{b} \right| = y \frac{b-a}{ab} = \frac{y}{A} \geq 1,$$

ainsi, il existe un entier $k \in [y/b, y/a]$ et si on pose maintenant $x = y/k$, on a bien évidemment

$$y = kx, \ \text{ et } \ x \in [a, b],$$

donc on peut appliquer ($\star$) avec ces valeurs de k et de x et ainsi obtenir $|f(y) = f(kx)| \leq N_0$.

Ceci montre que f est bornée sur $[A, +\infty[$. Mais comme elle est continue, on sait déjà qu'elle est bornée sur le compact $[0, A]$ et donc elle est finalement bornée sur $[0, +\infty[$.

2. On introduit les ensembles $F_n = \text{Ker}\, T^n$ qui sont bien des fermés de E car T^n est continu. Par hypothèse nous avons $E = \bigcup_n F_n$ et E complet donc le théorème de Baire implique que l'un des F_n est d'intérieur non vide. Comme F_n est un sous-espace vectoriel il ne peut être d'intérieur non vide que s'il est égal à l'espace entier E (Voir l'exercice 16 du TD1). D'où le résultat.

Le contre-exemple se déroule dans l'espace $E = \mathbb{R}[X]$ (qui n'est jamais complet on le rappelle car il possède une base algébrique dénombrable) et avec l'opérateur de dérivation $T : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}[X]$.

Pour tout polynôme P, on a bien $T^{n_P} P = 0$ avec $n_P = \text{degP}+1$ par exemple mais il est bien clair que l'application T^n n'est identiquement nulle pour aucun entier n.

■

Exercice 5 (Fonctions continues nulle-part dérivables)

On travaille dans l'espace $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie.
Pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$, on considère le sous-ensemble suivant

$$U_{\varepsilon,n} = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \ \ \forall x \in [0, 1], \exists y \in [0, 1], \ \textit{tel que } 0 < |x - y| < \varepsilon, \ \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| > n \right\}.$$

1. *Montrer que $U_{\varepsilon,n}$ est un ouvert de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.*
2. *Montrer que $U_{\varepsilon,n}$ est dense dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.*
3. *En déduire que l'ensemble E des fonctions continues sur $[0, 1]$ et nulle part dérivables est dense dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.*

Corrigé :

1. — On fixe ε et n et on va montrer que le complémentaire de $U_{\varepsilon,n}$ est un fermé. Soit donc $(f_k)_k$ une suite d'éléments de $U^c_{\varepsilon,n}$ qui converge uniformément vers une fonction continue f. Il s'agit de montrer que f n'est pas dans $U_{\varepsilon,n}$.

— Par définition, pour tout k, f_k n'est pas dans $U_{\varepsilon,n}$, ce qui signifie

$$\exists x_k \in [0,1], \text{tel que } \forall y \in [0,1] \text{ vérifiant } 0 < |y - x_k| < \varepsilon, \text{ on a } \left|\frac{f_k(x_k) - f_k(y)}{x_k - y}\right| \leq n. \tag{1}$$

— Comme $[0,1]$ est compact, on peut extraire de $(x_k)_k$ une sous-suite convergente. Ainsi, quitte à considérer la sous-suite correspondante de $(f_k)_k$ (ce qui ne change rien à la convergence uniforme vers f), on peut finalement supposer que la suite $(x_k)_k$ est elle-même convergente. On note $\bar{x} = \lim_{+\infty} x_k$ la limite de cette suite.

— On fixe maintenant $y \in [0,1]$ tel que $0 < |\bar{x} - y| < \varepsilon$ et on veut montrer que

$$\left|\frac{f(\bar{x}) - f(y)}{\bar{x} - y}\right| \leq n,$$

ce qui montrera bien que f n'est pas dans $U_{\varepsilon,n}$.
Pour tout k, on pose

$$y_k = \min(\max(x_k + (y - \bar{x}), 0), 1).$$

Les $\min$ et $\max$ sont là pour assurer que y_k est bien dans l'intervalle d'étude $[0,1]$. On vérifie aisément que $\lim_{+\infty} y_k = y$ et que $|y_k - x_k| \leq |y - \bar{x}| < \varepsilon$.
On en déduit que, pour k assez grand, on a $x_k \neq y_k$ car $(x_k - y_k)_k$ converge vers $\bar{x} - y$ qui est non nul.
Ainsi, pour k assez grand, on peut appliquer à $y = y_k$ la propriété (1) ce qui donne

$$\left|\frac{f_k(x_k) - f_k(y_k)}{x_k - y_k}\right| \leq n, \ \ \forall k \geq k_0.$$

Comme $(f_k)_k$ converge uniformément vers f, nous pouvons utiliser le théorème de double limite pour obtenir

$$\lim_{+\infty} f_k(x_k) = f(\bar{x}), \ \text{ et } \lim_{+\infty} f_k(y_k) = f(y),$$

ainsi on peut passer à la limite dans l'inégalité précédente et obtenir

$$\left|\frac{f(\bar{x}) - f(y)}{\bar{x} - y}\right| \leq n,$$

ce qui conclut la preuve.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, il s'agit de construire une fonction proche de f (au sens de la norme de la convergence uniforme) mais qui oscille fortement. On fixe $\delta > 0$.
On commence par utiliser la densité des fonctions polynômes dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ (Théorème de Weierstrass que nous verrons plus loin dans le cours). Il existe donc un polynôme P_δ tel que

$$\|f - P_\delta\|_\infty \leq \delta.$$

On fixe maintenant ε et n et on va essayer d'approcher P_δ par une fonction de $U_{\varepsilon,n}$. On remarque que, d'après l'inégalité des accroissements finis, nous avons

$$\left|\frac{P_\delta(x) - P_\delta(y)}{x - y}\right| \leq \sup_{[0,1]} |P'| = M, \ \ \forall x \neq y \in [0,1].$$

On pose maintenant

$$f_{\delta,\alpha} = P_\delta + \delta \sin(x/\alpha).$$

Il est clair que $\|f_\delta - P_\delta\|_\infty \leq \delta$. De plus, pour x et y distincts nous avons

$$\begin{aligned}\left|\frac{f_{\delta,\alpha}(x) - f_{\delta,\alpha}(y)}{x - y}\right| &\geq \delta \left|\frac{\sin(x/\alpha) - \sin(y/\alpha)}{x - y}\right| - \left|\frac{P_\delta(x) - P_\delta(y)}{x - y}\right| \\ &\geq \delta \left|\frac{\sin(x/\alpha) - \sin(y/\alpha)}{x - y}\right| - M.\end{aligned}$$

Si on choisit $\alpha < \varepsilon/\pi$, alors pour tout $x \in [0,1]$, nous pouvons poser $y = x \pm \alpha\pi$ (le signe étant choisi pour que $y \in [0,1]$), ce qui donne

$$\left|\frac{f_{\delta,\alpha}(x) - f_{\delta,\alpha}(y)}{x - y}\right| \geq \frac{2\delta}{\alpha\pi} - M.$$

Si maintenant, on choisit α suffisament petit pour que $\frac{2\delta}{\alpha\pi} - M > n$ et $\alpha < \varepsilon/\pi$, alors nous avons bien

$$f_{\delta,\alpha} \in U_{\varepsilon,n}, \ \text{ et } \ \|f_{\delta,\alpha} - P_\delta\|_\infty \leq \delta.$$

Au final, par inégalité triangulaire, on a

$$\|f - f_{\delta,\alpha}\|_\infty \leq \|f - P_\delta\|_\infty + \|P_\delta - f_{\delta,\alpha}\|_\infty \leq 2\delta.$$

3. D'après le théorème de Baire, l'ensemble
$$F = \bigcap_{n\geq 1} U_{1/n,n},$$
est dense dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Il s'agit de montrer que les éléments de F ne sont dérivables en aucun point.
Soit $f \in F$ et $x \in [0,1]$. Par définition, pour tout $n \geq 1$, nous avons $f \in U_{1/n,n}$, ce qui signifie qu'il existe y_n tel que
$$0 < |x-y_n| \leq 1/n, \quad \left|\frac{f(x)-f(y_n)}{x-y_n}\right| \geq n,$$
et donc
$$\lim_{n\to+\infty} y_n = x, \quad \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{f(x)-f(y_n)}{x-y_n}\right| = +\infty.$$
Ainsi, f n'est pas dérivable en x.

■

Exercice 6 (Théorème de Schur)

On considère l'espace l^1 des suites sommables.
On note $\bar{B}$ la boule unité de l^∞ que l'on munit de la distance d définie par
$$d(x,y) = \sum_{n\geq 0} 2^{-n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}.$$
Soit $(x^k)_k \subset l^1$ une suite d'éléments de l^1 qui converge faiblement vers 0. On veut montrer qu'elle converge fortement vers 0.

1. *Vérifier que l'espace $(\bar{B}, d)$ est complet et que la convergence dans cette espace est équivalente à la convergence simple (voir le Théorème I.64 du cours pour un énoncé analogue pour $1 < p < +\infty$).*
2. *On fixe $\varepsilon > 0$ et on considère, pour $n \geq 0$, l'ensemble*
$$F_n = \{y \in l^\infty, \ \ \|y\|_{l^\infty} \leq 1, \ \ |(x^k, y)| \leq \varepsilon, \ \ \forall k \geq n\}.$$
Démontrer que F_n est un fermé de $(\bar{B}, d)$.
3. *Montrer qu'il existe $N \geq 0$ tel que, pour tout $k \geq N$ on peut trouver une suite $y^k \in l^\infty$ vérifiant*
$$\|y^k\|_{l^\infty} \leq 1,$$
$$|(x^k, y^k)| \leq \varepsilon,$$
et
$$y^k_n = \mathrm{sgn}(x^k_n), \ \ \forall n \geq N.$$
4. *En déduire que*
$$\forall k \geq N, \ \ \|x^k\|_{l^1} \leq 2\sum_{n=0}^{N}|x^k_n| + \varepsilon.$$
5. *Montrer que $(x^k)_k$ converge vers 0 fortement dans l^1.*

Corrigé :

1. La preuve est tout à fait identique à celle du cours. Pour les deux points présentés ici on n'utilise pas le fait que p est fini.
2. Pour montrer que F_n est fermé dans $(\bar{B}, d)$, on peut raisonner avec des suites : si $(y^p)_p$ est une suite d'éléments de F_n qui converge au sens de d, c'est-à-dire simplement, vers une limite $y \in \bar{B}$, il faut montrer que $y \in F_n$.
Il est bien clair que $y \in \bar{B}$. On fixe désormais un $k \geq n$ et on veut montrer que $|(x^k, y)| \leq \varepsilon$.
Nous avons par définition
$$|(x^k, y^p)| \leq \varepsilon, \ \ \forall p \geq 0.$$

On écrit alors pour tout $N \geq 1$ et tout $p \geq 0$

$$\begin{aligned}|(x^k, y)| &\leq |(x^k, y - y^p)| + |(x^k, y^p)| \\ &\leq \sum_{m=0}^{N} |x_m^k (y_m - y_m^p)| + \sum_{m=N+1}^{+\infty} |x_m^k (y_m - y_m^p)| + |(x^k, y^p)| \\ &\leq \sum_{m=0}^{N} |x_m^k (y_m - y_m^p)| + 2 \sum_{m=N+1}^{+\infty} |x_m^k| + |(x^k, y^p)|.\end{aligned}$$

Dans la dernière inégalité on a utilisé que y^p et y vérifient $\|y\|_{l^\infty} \leq 1$ et $\|y^p\|_{l^\infty} \leq 1$.
Par hypothèse le troisième terme est plus petit que $\varepsilon > 0$. On rappelle de plus que k est fixé, et qu'on peut donc maintenant choisir N pour que le second terme ci-dessus soit plus petit qu'un certain $\eta > 0$ fixé. Il reste

$$|(x^k, y)| \leq \sum_{m=0}^{N} |x_m^k (y_m - y_m^p)| + \eta + \varepsilon.$$

Les entiers k et N sont fixés, on peut donc maintenant utiliser la convergence simple de y^p vers y dans la somme (finie et de taille fixée) qui apparaît à droite. On obtient donc

$$|(x^k, y)| \leq \eta + \varepsilon.$$

Comme cette inégalité est valable pour toute valeur de η, on a finalement montré que $|(x^k, y)| \leq \varepsilon$.
Ceci était vrai pour tout $k \geq n$, donc on a bien obtenu que $y \in F_n$.

3. Par hypothèse, la suite $(x^k)_k$ converge faiblement vers 0. Cela nous dit exactement que l'union des F_n est la boule unité $\bar{B}$ toute entière. Comme $(\bar{B}, d)$ est complet et que les F_n sont fermés, on peut appliquer le Théorème de Baire qu'il y a au moins un de ces fermés qui est d'intérieur non vide dans $(\bar{B}, d)$.
Il existe donc n_0, $y_0 \in F_{n_0}$, et $r > 0$ tels que

$$\forall y \in \bar{B}, d(y, y_0) < r, \ \ y \in F_{n_0}.$$

On choisit maintenant N (que l'on astreint à être plus grand que n_0) tel que

$$\sum_{n \geq N+1} 2^{-n} < r,$$

de sorte que toute suite $y \in \bar{B}$ qui coincide avec y_0 sur les N premiers termes, on a $d(y, y_0) < r$ et donc $y \in F_{n_0}$.
Ainsi, pour tout $k \geq N$, on peut prendre pour y la suite y^k qui coincide avec y_0 sur les N premiers termes et qui vaut sgn (x_n^k) pour les termes suivants. Cette suite vérifie bien $d(y^k, y_0) < r$ et donc appartient à $F_{n_0} \subset F_N$.
On a alors

$$\forall k \geq N, \ \ |(x^k, y^k)| \leq \varepsilon,$$

ce qui donne

$$\forall k \geq N, \ \ \left| \sum_{n=0}^{N} x_n^k y_k^0 + \sum_{n \geq N+1} |x_n^k| \right| \leq \varepsilon.$$

On obtient donc

$$\forall k \geq N, \ \ \sum_{n \geq N+1} |x_n^k| \leq \varepsilon + \left| \sum_{n=0}^{N} x_n^k y_k^0 \right|,$$

et finalement

$$\forall k \geq N, \ \ \|x^k\|_{l^1} \leq 2 \sum_{n=0}^{N} |x_n^k| + \varepsilon.$$

4. Comme $(x^k)_k$ converge faiblement vers 0, on a en particulier la convergence simple et on peut donc passer à la limite dans la somme de droite de l'inégalité précédente (il faut bien remarquer que N ne dépend pas de k !). On a donc finalement

$$\limsup_{k \to \infty} \|x^k\|_{l^1} \leq \varepsilon.$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$ que nous avions fixé au tout début de l'exercice, on a bien montré que $(x^k)_k$ tend vers 0 fortement dans l^1.

■

Exercice 7 (Une preuve directe (due à Hahn) du théorème de Banach-Steinhaus)

Soit E un Banach et F un espace vectoriel normé quelconque. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues. On suppose que

$$\forall x \in E, \sup_{i\in I} \|T_i x\|_F < +\infty.$$

On veut montrer que $\sup_{i\in I} \|T_i\|_{L(E,F)} < +\infty$.
On raisonne par l'absurde en supposant que

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{L(E,F)} = +\infty. \tag{2}$$

1. *Montrer qu'il existe deux suites $(T_n)_n \subset \{T_i, i \in I\}$ et $(x_n)_n \subset E$ telles que, pour tout $n \geq 1$, on a*

$$\|T_n x_n\|_F \geq n + \sum_{j=1}^{n-1} \|T_n x_j\|_F,$$

$$\|x_n\|_E \leq 2^{-n} \min_{j\leq n-1} \|T_j\|^{-1}.$$

2. *Montrer que la série $\sum_n x_n$ converge dans E. On note x sa somme.*
3. *Montrer pour tout n on a*

$$\sum_{j=n+1}^{+\infty} \|T_n x_j\|_F \leq 1.$$

4. *Montrer enfin que $\|T_n x\|_F \geq n-1$ pour tout n et conclure.*

Corrigé :

1. Pour $n = 1$, d'après (2), on peut trouver $T_1 \in \{T_i, i \in I\}$ telle que $\|T_1\| > 2$. Ceci implique qu'on peut trouver $y_1 \in E$, tel que $\|y_1\|_E = 1$ et $\|T_1 y_1\|_F \geq 2$. On pose alors $x_1 = y_1/2$ qui vérifie bien la propriété souhaitée.
Supposons avoir contruit $x_1, ..., x_{n-1}$ et $T_1, ..., T_{n-1}$ et cherchons à construire x_n et T_n. D'après (2) on peut trouver $T_n \in \{T_i, i \in I\}$ telle que

$$\|T_n\| > 2^n \max_{j\leq n-1} \|T_j\| \left(n + \sum_{j=1}^{n-1} \sup_{i\in I} \|T_i x_j\|_F \right).$$

Cette application T_n étant choisie, on peut trouver, par définition de la norme dans $L(E,F)$ un élément $y_n \in E$ tel que $\|y_n\|_E = 1$ et

$$\|T_n y_n\|_F \geq 2^n \max_{j\leq n-1} \|T_j\| \left(n + \sum_{j=1}^{n-1} \sup_{i\in I} \|T_i x_j\|_F \right).$$

On pose alors

$$x_n = 2^{-n} \left(\min_{j\leq n-1} \|T_j\|^{-1} \right) y_n.$$

qui vérifie, par construction, la propriété sur $\|x_n\|_E$ et par ailleurs nous avons

$$n + \sum_{j=1}^{n-1} \|T_n x_j\|_F \leq n + \sum_{j=1}^{n-1} \sup_{i\in I} \|T_i x_j\|_F \leq \|T_n x_n\|_F.$$

2. D'après la propriété sur la norme de x_n, on voit que nous avons

$$\|x_n\|_E \leq \frac{2^{-n}}{\|T_1\|},$$

et donc la série $\sum_n \|x_n\|_E$ est convergente donc la série $\sum_n x_n$ est normalement convergente dans E. Comme E est complet, cette série est bien convergente.

3. Ecrivons la propriété sur les normes des x_n en échangeant les indices n et j

$$\|x_j\|_E \leq 2^{-j} \|T_n\|^{-1}, \ \ \forall n \leq j-1.$$

Ceci montre en particulier que

$$\|T_n x_j\|_F \leq \|T_n\| \|x_j\|_E \leq 2^j, \ \ \forall j \geq n+1,$$

ainsi la somme attendue s'estime de la façon suivante

$$\sum_{j=n+1}^{+\infty} \|T_n x_j\|_F \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} 2^{-j} \leq 1.$$

4. Pour estimer $T_n x$ on développe x en série et on évalue séparément les trois termes

$$T_n x = \sum_{j=1}^{n-1} T_n x_j + T_n x_n + \sum_{j=n+1} T_n x_j,$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}
\|T_n x\|_F &= \|T_n x_n\|_F - \sum_{j=1}^{n-1} \|T_n x_j\|_F - \sum_{j=n+1}^{+\infty} \|T_n x_j\|_F \\
&\geq \left(n + \sum_{j=1}^{n-1} \|T_n x_j\|_F \right) - \sum_{j=1}^{n-1} \|T_n x_j\|_F - 1 \\
&\geq n-1,
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

■

Exercice 8 (Caractérisation de l^p par la propriété de Hölder)

Cet exercice est une sorte d'inverse à la propriété de Hölder. On se donne une suite quelconque $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et un $1 \leq p \leq +\infty$. On suppose que

$$\forall y \in l^{p'}, \ \ \text{la série de terme général } (x_n y_n)_n \text{ est convergente.}$$

Alors, on a $x \in l^p$.
On pourra commencer par remarquer que les cas $p = 1$ et $p = \infty$ sont faciles et ne nécessitent pas le théorème de Banach-Steinhaus, puis se concentrer sur le cas $1 < p < +\infty$.

Corrigé :

— Cas $p = 1$: il suffit de prendre la suite $y_n = \mathrm{sgn}(x_n)$ qui est bien bornée. Par hypothèse, la série de terme général $x_n y_n = |x_n|$ est convergente et donc $x \in l^1$.

— Cas $p = +\infty$: Supposons que x n'est pas dans l^∞. On peut alors trouver une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ telle que

$$|x_{\varphi(n)}| \geq n^2, \ \ \forall n \geq 1.$$

Il suffit alors de poser

$$y_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin \varphi(\mathbb{N}) \\ \frac{\mathrm{sgn}(x_n)}{n^2} & \text{si } k = \varphi(n) \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

Nous avons clairement

$$\sum_{k \geq 0} |y_k| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

et donc $y \in l^1$.
Par hypothèse la série de terme général $(x_k y_k)_k$ est convergente, or nous avons

$$x_k y_k = 0, \ \text{si } k \notin \varphi(\mathbb{N}),$$

$$x_k y_k = \frac{|x_{\varphi(n)}|}{n^2} \geq 1, \ \ \forall k = \varphi(n).$$

En particulier la suite $(x_k y_k)_k$ ne tend pas vers 0, ce qui est une contradiction manifeste.

— Supposons maintenant $1 < p < +\infty$. Pour tout $N \geq 1$, on introduit l'application linéaire T_n sur $l^{p'}$ définie par

$$y \in l^{p'} \mapsto T_n(y) = \sum_{n=0}^{N} x_n y_n.$$

Nous avons affaire à des formes linéaires continues et un calcul que nous avons déjà effectué (Exercice 10 du TD2) montre que la norme de cette application linéaire est donnée par

$$\|T_n\| = \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'hypothèse de l'énoncé nous dit que

$$\forall y \in l^{p'}, \text{ la suite } (T_n y)_n \text{ est convergente et donc en particulier bornée.}$$

Comme $l^{p'}$ est complet, nous sommes exactement dans les conditions d'application du théorème de Banach-Steinhaus qui implique donc que

$$\sup_N \|T_N\|_{(L^{p'})'} < +\infty,$$

ce qui, d'après le calcul de ces normes fait ci-dessus, nous donne

$$\sup_N \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Ceci montre bien que $x \in l^p$ et le résultat est démontré.

■

Exercice 9 (Interpolation de Lagrange)

On se donne un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, on considère la subdivision uniforme $(x_i^n)_{0\leq i\leq n}$ de $[a,b]$ définie par

$$x_i^n = a + \frac{i(b-a)}{n}.$$

1. *Pour tout n et $i \in \{0,...,n\}$, nous posons*

$$L_i^n(x) = \frac{\Pi_{j\neq i}(x - x_j^n)}{\Pi_{j\neq i}(x_i^n - x_j^n)}.$$

Montrer que L_i^n est un polynôme de degré exactement n et qui vérifie

$$L_i^n(x_j^n) = \delta_{ij}, \quad \forall i,j \in \{0,...,n\}.$$

2. *Pour toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, on définit le polynôme*

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i^n(x).$$

Montrer que p_n est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n qui coincide avec f aux points $(x_i^n)_{0\leq i\leq n}$.

Ce polynôme s'appelle le **polynôme d'interpolation de Lagrange** *de f aux points $(x_i^n)_i$.*

3. (a) *Montrer que l'application $I_n : \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ qui à toute fonction f associe son polynôme d'interpolation de Lagrange p_n, est linéaire et continue.*

(b) *On munit $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ de la norme infinie. Montrer que la norme de I_n est donée par*

$$\|I_n\| = \sup_{x\in[a,b]} \left(\sum_{i=0}^{n} |L_i^n(x)| \right).$$

(c) *Montrer que pour tout $i \in \{0,...,n\}$, nous avons*

$$|L_i^n(x_1^n)| = |L_i^n(a + (b-a)/(2n))| \geq \frac{C_n^i}{4n^2}.$$

En déduire que

$$\|I_n\| \geq \frac{2^n}{4n^2}.$$

(d) *Montrer qu'il existe au moins une fonction continue f pour laquelle la suite des polynômes de Lagrange associés $(I_n(f))_n$ n'est pas uniformément bornée dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. En particulier, cette suite de polynômes ne converge pas uniformément vers f.*

Corrigé :

1. Le fait que L_i^n est un polynôme de degré n ne fait aucun doute puisqu'il s'agit du produit de n polynômes de degré 1. Quand $i = j$, les deux facteurs du quotient de $L_i(x_i^n)$ sont égaux et on trouve donc bien une valeur de 1. Quand j n'est pas égal à i, il y a un des facteurs du dénominateur de L_i^n qui s'annulle en ce point et donc $L_i^n(x_j^n) = 0$.
2. D'après la question précédente, ce polynôme est bien de degré au plus n et coincide avec f aux noeuds choisis. Il s'agit de montrer que c'est bien le seul. Si q_n est n'importe quel polynôme vérifiant ces propriétés, nous voyons que $p_n - q_n$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui s'annulle en les $n+1$ points de la discrétisation. Ceci n'est possible que si $p_n - q_n = 0$.
3. (a) La linéarité de I_n ne fait aucun doute. Par ailleurs, pour tout x nous avons

$$|p_n(x)| \leq \sum_{i=0}^{n} |f(x_i^n)||L_i^n(x)| \leq \left(\sum_{i=0}^{n} |L_i^n(x)| \right) \|f\|_\infty.$$

Ce qui montre la continuité de I_n et l'estimation

$$\|I_n\| \leq \sup_{x\in[a,b]} \left(\sum_{i=0}^{n} |L_i^n(x)| \right).$$

(b) Il s'agit de montrer que l'inégalité obtenue à la question précédente est une égalité.

Comme la fonction

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{n} |L_i^n(x)|,$$

est continue sur le compact $[a, b]$, nous savons qu'elle atteint son supremum en un point $x_0 \in [a, b]$.

On construit maintenant une fonction f qui vérifie $\|f\|_\infty = 1$ et

$$f(x_i^n) = \mathrm{sgn}(L_i^n(x_0)).$$

Une telle construction est possible (par exemple on prend une fonction affine par morceaux qui relie les valeurs prescrites). Pour cette fonction f particulière, nous avons

$$I_n(f)(x_0) = p_n(x_0) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i^n) L_i^n(x_0) = \sum_{i=0}^{n} |L_i^n(x_0)| = \sup_{x\in[a,b]} \left(\sum_{i=0}^{n} |L_i^n(x)| \right),$$

et donc, nous avons

$$\|I_n(f)\|_\infty \geq \sup_{x\in[a,b]} \left(\sum_{i=0}^{n} |L_i^n(x)| \right),$$

ce qui prouve bien le résultat attendu, vu que $\|f\|_\infty = 1$.

(c) Par simplicité, on note $h = (b - a)/n$ le pas de la discrétidation. Vue la définition des points x_i^n, nous avons

$$L_i^n(a + h/2) = \frac{\Pi_{j\geq i}(h/2 - jh)}{\Pi_{j\neq i}((i - j)h)},$$

d'où

$$|L_i^n(a + h/2)| = \frac{\Pi_{j=0}^n |1/2 - j|}{(1/2 - i)i!(n - i)!} = \frac{\Pi_{j=2}^n |1/2 - j|}{4|1/2 - i|i!(n - i)!},$$

et donc

$$|L_i^n(a + h/2)| \geq \frac{(n - 1)!}{4(1/2 - i)i!(n - i)!} = \frac{1}{4n|i - 1/2|} \frac{n!}{i!(n - i)!} \geq \frac{C_n^i}{4n^2}.$$

Il s'en suit

$$\|I_n\| \geq \sum_{i=0}^{n} |L_i^n(a + h/2)| \geq \sum_{i=0}^{n} \frac{C_n^i}{4n^2} = \frac{2^n}{4n^2}.$$

(d) L'espace $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie est un espace de Banach. Si, pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ la suite $I_n(f)$ était bornée, le théorème de Banach-Steinhaus nous dirait alors que la suite des normes $(\|I_n\|)_n$ serait bornée.

Or, l'estimation de la question précédente, nous montre que $\lim_{n\to\infty} \|I_n\| = +\infty$. D'où le résultat.

Commentaire : En réalité, on peut trouver une expression explicite d'une fonction continue pour laquelle l'interpolation de Lagrange ne converge pas uniformément vers i-celle (phénomène de Runge). Mais la preuve précédente se généralise en réalité à n'importe quel choix de points d'interpolation, ce qui est bien plus fort.

■

Exercice 10 (Non convergence d'une série de Fourier)

Pour toute fonction continue 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on définit ses coefficients de Fourier par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt.$$

On définit alors la série de Fourier de f comme la série de fonctions

$$x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}.$$

On veut montrer que cette série ne converge pas pour toute fonction continue f.

1. *Montrer que l'espace $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions continues, 2π-périodiques, muni de la norme infinie est un espace de Banach.*
2. *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on définit la somme partielle symétrique de la série de Fourier en $x = 0$*

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f).$$

Montrer que S_N est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et que sa norme vaut

$$\|S_n\| = \int_0^{2\pi} |D_N(x)|\, dx,$$

où D_N est la fonction définie par

$$D_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{-inx}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. *Montrer que*

$$D_N(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(x(N + 1/2))}{\sin(x/2)}, \ \ \forall x \notin 2\pi\mathbb{Z},$$

$$D_N(x) = \frac{2N+1}{2\pi}, \ \ \forall x \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

4. *Montrer que*

$$\int_0^{2\pi} |D_N(x)|\, dx \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty.$$

5. *Conclure.*

Corrigé :

1. L'espace $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est, pour la norme infinie, un sous-espace fermé de $\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et c'est donc un à ce titre un espace de Banach.
2. La linéarité de S_N ne fait aucun doute, de plus, on constate que

$$|c_n(f)| \leq \|f\|_\infty, \ \ \forall n,$$

et donc S_N est continue avec $\|S_N\| \leq (2N + 1)$ mais cette estimation est beaucoup trop grossière. Par définition de c_n et D_N, nous avons

$$S_N(f) = \int_0^{2\pi} f(t) D_N(t)\, dt,$$

et donc

$$|S_N(f)| \leq \left(\int_0^{2\pi} |D_N(t)|\, dt \right) \|f\|_\infty,$$

ce qui montre l'inégalité

$$\|S_N\| \leq \int_0^{2\pi} |D_N(t)|\, dx.$$

Pour montrer l'égalité, N étant fixé, on considère la suite $(f_k)_k$ de fonctions continues 2π-périodiques définies par

$$f_k(x) = \frac{D_N(t)}{\sqrt{D_N(t)^2 + 1/k}}.$$

Celles-ci vérifient

$$\|f_k\|_\infty \leq 1, \ \ \forall k,$$

$$\|f_k\|_\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

et

$$f_k(t) \xrightarrow[k\to\infty]{} \operatorname{sgn}(D_N(t)).$$

Nous écrivons maintenant

$$|S_N(f_k)| = \left| \int_0^{2\pi} D_N(t) f_k(t)\, dt \right| \leq \|S_N\| \|f_k\|_\infty,$$

et nous passons à la limite quand $k \to \infty$ pour obtenir finalement (par convergence dominée dans l'intégrale) l'inégalité

$$\left| \int_0^{2\pi} |D_N(t)|\, dt \right| \leq \|S_N\|.$$

Cela donne bien le résultat attendu.

3. Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ tous les termes de la somme sont égaux à 1 et le résultat est clair. Si x n'est pas dans $2\pi\mathbb{Z}$, on peut factoriser e^{-iNx} et utiliser le calcul de la somme partielle de la série géométrique

$$D_N(x) = \frac{e^{-iNx}}{2\pi} \sum_{n=0}^{2N} e^{inx} = \frac{e^{-iNx}}{2\pi} \frac{1 - e^{i(2N+1)x}}{1 - e^{ix}}.$$

Ainsi, on trouve

$$D_N(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)}.$$

4. Pour N fixé et pour tout $1 \leq k \leq N$, nous introduisons l'intervalle

$$I_{k,N} = \left[\pi \frac{k+1/4}{N+1/2}, \pi \frac{k+3/4}{N+1/2} \right].$$

Ces intervalles sont disjoints deux à deux et inclus dans $[0, 2\pi]$, de sorte que nous avons

$$\int_0^{2\pi} |D_N(x)|\, dx \geq \sum_{k=1}^{N} \int_{I_{k,N}} |D_N(x)|\, dx.$$

Les intervalles $I_{k,N}$ sont choisis pour que le numérateur de la fraction qui définit D_N ne soit pas petit et plus précisément, on a

$$\forall x \in I_{k,N}, |\sin((N+1/2)x)| \geq 1/2.$$

Dans le même temps, on a

$$\forall x \in I_{k,N}, |\sin(x/2)| \leq |x/2| \leq \frac{1}{2} \sup I_{k,N} = \pi \frac{k+3/4}{2N+1}.$$

Ainsi, on trouve (vu que $|I_{k,N}| = \pi/(2N+1)$)

$$\int_{I_{k,N}} |D_N(x)|\, dx \geq \frac{1}{4\pi^2} |I_{k,N}| \frac{N+1/2}{k+3/4} \geq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{k+3/4} \geq \frac{1}{2k\pi}.$$

Ainsi, on a

$$\int_0^{2\pi} |D_N(x)|\, dx \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty,$$

et donc on a bien le résultat attendu. De façon plus précise, on a obtenu une minoration en $\log N$ de l'intégrale. On peut même montrer que c'est bien le bon comportement asymptotique.

5. On va raisonner par l'absurde en supposant que pour toute fonction f, la série de Fourier $S_N(f)$ est convergente. Comme $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est complet et que l'application linéaire S_N est continue, le théorème de Banach-Steinhaus implique alors que la suite des normes $(\|S_N\|_N)_N$ est bornée.

   Or nous avons montré dans les questions précédentes que cette suite de normes tend vers l'infini, ce qui montre une contradiction et prouve le résultat attendu..

■

Exercice 11

Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et N une norme quelconque sur $\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})$. On suppose que

— *$(\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R}), N)$ est complet.*

— *Pour toute suite $(f_n)_n$ qui converge dans $(\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R}), N)$ vers une limite f, on a*

$$(f_n)_n \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } K.$$

Alors, la norme N est équivalente à la norme infinie, c'est-à-dire

$$\exists C_1, C_2 > 0,\ \ C_2 N(f) \leq \|f\|_\infty \leq C_1 N(f),\ \ \forall f \in \mathcal{C}^0(K,\mathbb{R}).$$

Corrigé :

Pour tout $x \in K$, on définit la forme linéaire suivante

$$T_x : f \in \mathcal{C}^0(K,\mathbb{R}) \mapsto f(x).$$

Par la seconde hypothèse, pour tout $x \in K$, et pour toute suite $(f_n)_n$ qui converge dans $(\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R}), N)$, la convergence simple de la suite (f_n) vers f, nous assure que

$$T_x(f_n) = f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = T_x f,$$

et donc que la forme linéaire T_x est continue sur $(\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R}), N)$.

Par ailleurs, pour tout $f \in \mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})$, nous avons

$$\sup_{x\in K} |T_x f| = \sup_{x\in K} |f(x)| < +\infty,$$

car f est continue et K est compact.

D'après la première hypothèse, l'espace $(\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R}), N)$ est complet et toutes les hypothèses du théorème de Banach-Steinhaus sont vérifiées.

On en déduit qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\sup_{x\in K} \|T_x\| \leq C.$$

Cette propriété s'écrit encore sous la forme

$$|f(x)| = |T_x(f)| \leq C\, N(f),\ \ \forall x \in K, \forall f \in \mathcal{C}^0(K,\mathbb{R}),$$

et donc

$$\|f\|_\infty \leq C\, N(f),\ \ \forall f \in \mathcal{C}^0(K,\mathbb{R}),$$

ce qui montre exactement la propriété annoncée.

Notons que d'après le théorème d'isomorphisme de Banach (Théorème II.33), ceci implique que N et $\|.\|_\infty$ sont des normes équivalentes, c'est-à-dire qu'on a automatiquement l'autre inégalité

$$N(f) \leq C\, \|f\|_\infty,\ \ \forall f \in \mathcal{C}^0(K,\mathbb{R}).$$

Ceci utilise la complétude des deux espaces $(\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R}), N)$ et $(\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$. ■

Exercice 12 (Projections dans un Banach)

Soit E un espace de Banach et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, i.e. tels que $E = F \oplus G$. On note p_F (resp. p_G) la projection sur F (resp. sur G) parallèlement à G (resp. à F).
On a alors

$$p_F \text{ et } p_G \text{ sont continues} \iff F \text{ et } G \text{ sont fermés}.$$

Corrigé :

Par définition des projections, nous avons Ker $p_F = G$ et Ker $p_G = F$ et donc la continuité des projections implique le caractère fermé des deux espaces. La difficulté est de montrer le résultat réciproque.

Supposons que F et G sont fermés (ce sont donc des Banach vu que E est complet) et considérons l'application

$$\Phi : (f, g) \in F \times G \mapsto f + g \in E.$$

Il s'agit clairement d'une application linéaire, bijective (car $E = F \oplus G$) et continue (inégalité triangulaire).

Comme $F \times G$ et E sont des Banach, nous en déduisons que l'application réciproque est continue. Or, cette application réciproque s'écrit

$$\Phi^{-1}(x) = (p_F(x), p_G(x)) \in F \times G, \ \ \forall x \in E,$$

ce qui montre le résultat par définition de l'espace produit.

Preuve alternative (avec le théorème du graphe fermé) : p_F est linéaire de E (complet) dans F (complet car fermé dans E) donc elle est continue si et et seulement si son graphe est fermé.

Soit $(x_n, y_n) \in E \times F$ une suite d'éléments du graphe de p_F qui converge vers un élément $(x, y) \in E \times F$. Il faut montrer que (x, y) est dans le graphe de p_F.

Par définition on a $y_n = p_F(x_n)$, ce qui signifie que

$$y_n \in F, \text{ et } x_n - y_n \in G.$$

Comme F et G sont fermés, on peut passer à la limite et obtenir que

$$y \in F, \text{ et } x - y \in G.$$

Ceci montre exactement que $x = y + (x - y)$ avec $y \in F$ et $x - y \in G$ et donc que $y = p_F(x)$. Le résultat est démontré.
■

Exercice 13 (Projections alternées, lemme de Lions)

Soit H un espace de Hilbert et V_1, V_2 deux sous-espaces fermés de H. On suppose que $H = V_1 + V_2$ (la somme n'étant pas nécessairement directe). On note P_1 et P_2 les projections orthogonales sur V_1 et V_2 respectivement. On rappelle que ce sont des opérateurs linéaires continus de norme 1.

1. *Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que*

   $$\textit{Pour tout } v \in H, \textit{ il existe } v_1 \in V_1 \textit{ et } v_2 \in V_2 \textit{ tels que } v = v_1 + v_2 \textit{ et } \|v_1\| \leq C\|v\|, \|v_2\| \leq C\|v\|. \quad (\star)$$

2. *En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que*

   $$\forall v \in H, \ \ \|v\| \leq C(\|P_1 v\| + \|P_2 v\|).$$

3. *On note maintenant Q_i, pour $i = 1, 2$, la projection orthogonale sur l'orthogonal $V_i^\perp$. On rappelle que $Q_i = \mathrm{Id} - P_i$.*
   En appliquant la question précédente à $Q_1 v$ et en écrivant $Q_1 v = P_2 Q_1 v + Q_2 Q_1 v$, démontrer qu'il existe $0 < k < 1$ tel que

   $$\|Q_2 Q_1\| \leq k.$$

   En déduire que, pour tout point $v_0 \in H$, la suite obtenue par projection successive sur les espaces Q_1 puis Q_2 converge vers 0.

Remarque : le résultat demeure si on suppose seulement que $V_1 + V_2$ est dense dans H mais on perd la convergence géométrique.

Corrigé :

1. On munit l'espace produit $V_1 \times V_2$ de la norme $\|(v_1, v_2)\| = \|v_1{}_H + \|v_2\|_H$ qui en fait un espace complet car chacun des espaces V_1 et V_2 sont complets car fermés dans H qui est lui-même complet.

   On considère l'application

   $$\Phi : (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 \mapsto v_1 + v_2 \in H.$$

   Elle est clairement linéaire, surjective (car par hypothèse $V = V_1 + V_2$), et les espaces mis en jeu sont complets.

   Nous sommes donc dans les conditions d'applications du théorème de l'application ouverte qui nous dit qu'il existe $c > 0$ tel que

   $$B_H(0, c) \subset \Phi(B_{V_1 \times V_2}(0, 1)),$$

ou encore par homogénéité

$$B_H(0,1) \subset \Phi(B_{V_1\times V_2}(0,1/c)).$$

Cette propriété signifie que

$$\forall v \in H, \|v\| \leq 1,\ \ \exists, v_1 \in v_1, v_2 \in V_2,\ \text{t.q. } \|v_1\| + \|v_2\| \leq 1/c,\ \text{ et } \Phi(v_1,v_2) = v,$$

et donc en particulier

$$\forall v \in H, \|v\| \leq 1,\ \ \exists, v_1 \in v_1, v_2 \in V_2,\ \text{t.q. } \|v_1\| \leq 1/c \text{ et } \|v_2\| \leq 1/c,\ \text{ et } v = v_1 + v_2.$$

On obtient le résultat attendu avec $C = 1/c$ par homogénéité, en remarquant que pour un $v \in H$ non nul quelconque, on peut appliquer ce qui précède à $v/\|v\|$.

2. On prend un $v \in H$ quelconque non nul, et on choisit une décomposition $v = v_1 + v_2$ vérifiant ($\star$). On écrit alors

$$\|v\|_H^2 = (v,v)_H = (v, v_1+v_2)_H = (v,v_1)_H + (v,v_2)_H.$$

Comme $v_1 \in V_1$ on peut remplacer v par sa projection sur V_1 dans le premier terme. Idem pour le second terme. On obtient

$$\|v\|^2 = (P_1 v, v_1)_H + (P_2 v, v_2)_H,$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz il vient

$$\|v\|^2 \leq \|P_1 v\|\|v_1\| + \|P_2 v\|\|v_2\| \leq C(\|P_1 v\| + \|P_2 v\|)\|v\|,$$

d'où le résultat par simplification par $\|v\|$.

3. Suivons les indications de l'énoncé et écrivons

$$\|Q_1 v\| \leq C(\|P_1 Q_1 v\| + \|P_2 Q_1 v\|).$$

Par définition, $P_1 Q_1 = 0$ et donc il reste

$$\|Q_1 v\| \leq C\|P_2 Q_1 v\|.$$

On écrit alors

$$Q_1 v = P_2 Q_1 v + Q_2 Q_1 v,$$

et comme les deux termes sont orthogonaux, le théorème de Pythagore nous donne

$$\|Q_1 v\|^2 = \|P_2 Q_1 v\|^2 + \|Q_2 Q_1 v\|^2,$$

et donc

$$\begin{aligned}
\|Q_2 Q_1 v\|^2 &= \|Q_1 v\|^2 - \|P_2 Q_1 v\|^2 \\
&\leq \|Q_1 v\|^2 - \frac{1}{C^2}\|Q_1 v\|^2 \\
&= \left(1 - \frac{1}{C^2}\right)\|Q_1 v\|^2 \\
&\leq \left(1 - \frac{1}{C^2}\right)\|v\|^2.
\end{aligned}$$

Le résutat suit avec

$$k = \left(1 - \frac{1}{C^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

qui est bien un nombre strictement entre 0 et 1 (on remarque que C est nécessairement strictement plus grande que 1).

■

Exercice 14 (Principe de sélection continue. Existence d'un inverse à droite)

Soient X, Y, Z trois espaces de Hilbert et $F \in L(X, Z)$, $G \in L(Y, Z)$ deux opérateurs linéaires continus.

1. *On suppose que* $\mathrm{ImF} \subset \mathrm{ImG}$.
   (a) *On pose $Y_0 = \mathrm{Ker}(G)^\perp$. Montrer que Y_0 est un Hilbert.*
   (b) *On note $\tilde{G}$ la restriction de G à Y_0. Montrer que $\tilde{G} : Y_0 \to Z$ est injective et que $\mathrm{Im}(\tilde{G}) = \mathrm{Im}(G)$. Cette application réalise donc une bijection de Y_0 sur $\mathrm{Im}(G)$. On notera $\tilde{G}^{-1}$ l'inverse de cette application.*
   (c) *Pourquoi ne peut-on pas établir, a priori la continuité de $\tilde{G}^{-1}$?*
   (d) *Montrer que $\tilde{G}^{-1} \circ F$ est continue de X dans Y_0. En déduire qu'il existe un opérateur linéaire continu $\Phi \in L(X, Y)$ tel que*
   $$F = G \circ \Phi.$$
2. *Application : Montrer qu'un opérateur linéaire continu surjectif de Y dans Z admet un inverse à droite linéaire et continu.*
3. *Exemple : En revenant à l'exercice 13, démontrer qu'on peut choisir v_1 et v_2 dans ($\star$) de façon linéaire (et donc continue !) par rapport à v.*

Corrigé :

1. (a) L'espace Y_0 est l'orthogonal d'un ensemble (quelconque) donc il est nécessairement fermé. Comme Y est complet, Y_0 l'est aussi.
   (b) Soit $y \in Y_0$ tel que $\tilde{G}(y) = 0$. Par définition, cela signifie que $G(y) = 0$ et donc que $y \in \mathrm{Ker}(G)$. Par définition de Y_0, on a $y \perp Y_0$ et $y \in Y_0$, ce qui n'est possible que si $y = 0$.
   Soit $z \in \mathrm{Im}(G)$. On écrit $z = G(y)$ pour un certain $y \in Y$. Si on pose $y_0 \in P_{Y_0}(y)$ alors on a $y - y_0 \in Y_0^\perp = (\mathrm{Ker}(G)^\perp)^\perp$. Comme $\mathrm{Ker}(G)$ est fermé (c'est le noyau d'une application continue), nous déduisons que $y - y_0 \in \mathrm{Ker}(G)$ et donc
   $$z = G(y) = G(y_0) = \tilde{G}(y_0),$$
   ce qui montre que $z \in \mathrm{Im}(\tilde{G})$.
   (c) Pour établir de façon automatique la continuité de $\tilde{G}^{-1}$ nous pourrions appliquer le théorème d'isomorphisme de Banach mais pour cela, il faudrait que l'espace image $\mathrm{Im}(G)$ soit complet, c'est-à-dire fermé dans Z, ce qui n'est pas vrai en général avec les hypothèses que nous avons faites.
   (d) X et Y_0 sont des espaces complets. On peut donc appliquer le théorème du graphe fermé pour montrer la continuité de cette application.
   On se donne une suite $((x_n, y_n))_n \in X \times Y_0$ de points du graphe de $\tilde{G}^{-1} \circ F$ dont on suppose qu'elle converge vers un élément $(x, y) \in X \times Y_0$. Il faut montrer que c'est un élément du graphe.
   Par hypothèse, nous avons
   $$\forall n \geq 0,\ y_n = \tilde{G}^{-1} \circ F(x_n),$$
   et donc
   $$\forall n \geq 0,\ G(y_n) = \tilde{G}(y_n) = F(x_n).$$
   Comme F et G sont continues et que $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ convergent respectivement vers x et y, nous pouvons passer à la limite et obtenir
   $$G(y) = F(x).$$
   Comme par ailleurs $y \in Y_0$, ceci s'écrit
   $$y = \tilde{G}^{-1} \circ F(x),$$
   et le résultat est démontré. L'opérateur $\Phi = \tilde{G}^{-1} \circ F$ répond à la question.
   On remarque que nous avons montré la continuité de $\tilde{G}^{-1} \circ F$ **sans avoir montré** la continuité de $\tilde{G}^{-1}$.
2. On applique ce qui précède à $X = Z$ et $F = \mathrm{Id}$. L'hypothèse d'inclusion des images devient exactement équivalente à la surjectivite de G.
3. C'est une application immédiate de la question précédente avec $Z = H$, $Y = V_1 \times V_2$, $G = (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$.

■

Exercice 15 (Opérateurs possédant un adjoint dans les Hilbert)

Soient $(H_1, \langle .,. \rangle_1)$ et $(H_2, \langle .,. \rangle_2)$ deux espaces de Hilbert et $T : H_1 \to H_2$ une application linéaire. On suppose qu'il existe une autre application linéaire $S : H_2 \to H_1$ telle que

$$\langle Tx, y \rangle_2 = \langle x, Sy \rangle_1, \ \ \forall x \in H_1, y \in H_2.$$

Alors T et S sont continus. S'il existe, l'opérateur S vérifiant la propriété ci-dessus est appelé l'adjoint de T et est généralement noté T^*. On verra plus loin que tout opérateur continu admet un adjoint.

Corrigé :

On va appliquer le théorème du graphe fermé. On prend donc une suite $(x_n, Tx_n)_n \subset H_1 \times H_2$ d'éléments du graphe de T qui converge vers une limite notée $(x, y) \in H_1 \times H_2$. On fixe $z \in H_2$ et on applique l'hypothèse

$$\langle Tx_n, z \rangle_2 = \langle x_n, Sz \rangle_1,$$

puis on passe à la limite pour obtenir

$$\langle y, z \rangle_2 = \langle x, Sz \rangle_1,$$

et en appliquant à nouveau l'hypothèse on trouve

$$\langle y, z \rangle_2 = \langle Tx, z \rangle_2.$$

Cette égalité étant vraie pour tout choix de $z \in H_2$, on en déduit que $y = Tx$ et donc que la limite de la suite qui est $(x, y) = (x, Tx)$ est bien dans le graphe de T. ■

Exercice 16 (Opérateurs positifs dans les Hilbert)

Soit H un espace de Hilbert réel et $T : H \to H$ une application linéaire. On suppose que T est positif au sens suivant

$$\langle Tx, x \rangle \geq 0, \ \ \forall x \in H,$$

alors T est continu.

Corrigé :

Montrons que le graphe de T est fermé. Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge vers x dans H et telle que $(Tx_n)_n$ converge vers y. Il faut montrer que $y = Tx$. On pose $z = y - Tx$ et on écrit

$$\langle Tx_n + Th, x_n + h \rangle \geq 0, \forall n, \forall h \in H.$$

On peut passer à la limite dans tous les termes et il vient

$$\langle y + Th, x + h \rangle \geq 0,$$

ce qui s'écrit encore

$$\langle z + Tx + Th, x + h \rangle \geq 0.$$

On prend maintenant $h = -x + tk$, pour $t \in \mathbb{R}$ et $k \in H$ fixé, il vient

$$\langle z + tTk, tk \rangle \geq 0.$$

Ceci étant vrai pour tout t, nous en déduisons finalement

$$\langle z, k \rangle = 0, \ \ \forall k \in H,$$

et donc on a bien $z = 0$, ce qui montre $y = Tx$ et donc le résultat. ■