Analyse Fonctionnelle - Examen du 7 Janvier 2015

Durée : 3h

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Le barême tiendra compte de la longueur manifeste du sujet.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Enoncer le théorème d'Ascoli.
2. Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \mapsto X$ une application.
   (a) Rappeler ce que signifie la propriété : f est contractante sur X.
   (b) Démontrer que si f est contractante, elle admet un unique point-fixe dans X.

Exercice 2

Soit $(\alpha_k)_k$ une suite de nombres réels telle que $\sum_{k\geq 0} |\alpha_k| < +\infty$. On se donne par ailleurs une suite $(q_k)_k$ d'éléments de $[0, 1]$ **distincts deux à deux**.

1. Démontrer que pour toute fonction continue $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, la série de terme général $(\alpha_k f(q_k))_k$ est convergente.
2. On suppose désormais que

$$\sum_{k\geq 0} \alpha_k q_k^n = 0, \ \ \forall n \geq 0.$$

   Le but de l'exercice est de montrer que les $(\alpha_k)_k$ sont nécessairement tous nuls.

   (a) Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$\sum_{k\geq 0} \alpha_k P(q_k) = 0.$$

   (b) Démontrer (en précisant tous les arguments) que pour toute fonction continue $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ on a

$$\sum_{k\geq 0} \alpha_k f(q_k) = 0.$$

   (c) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to [0, 1]$ une fonction continue à support dans $[-1, 1]$ telle que $\varphi(0) = 1$.

      i. Dessiner une telle fonction φ.

      ii. On fixe $k_0 \geq 0$. Démontrer soigneusement que

$$\lim_{\delta\to 0} \left(\sum_{k\geq 0} \alpha_k \varphi\left(\frac{q_k - q_{k_0}}{\delta}\right)\right) = \alpha_{k_0}.$$

      Indication : On pourra commencer, pour un $\varepsilon > 0$ fixé, par choisir (en le justifiant) un indice $k_1 > k_0$ tel que $\sum_{k\geq k_1} |\alpha_k| \leq \varepsilon$.

      iii. Conclure.

Exercice 3

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert dont on note la norme $\| \cdot \|$.
Soit $A : H \to H$ un opérateur linéaire continu qui vérifie de plus, pour un certain $\alpha > 0$, la condition

$$\langle Au, u \rangle \geq \alpha \|u\|^2, \;\; \forall u \in H.$$

Le but de l'exercice est de montrer que A est bijectif.

1. Démontrer tout d'abord que A est injectif.
2. On fixe $b \in H$. Pour un $\rho > 0$ donné, on considère l'application

$$f : u \in H \mapsto u - \rho(Au - b) \in H.$$

   (a) Pour tous $u_1, u_2 \in H$, en calculant $\|f(u_1) - f(u_2)\|^2$, montrer que

$$\|f(u_1) - f(u_2)\|^2 \leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 \|A\|^2) \|u_1 - u_2\|^2.$$

   (b) Montrer que l'on peut choisir $\rho > 0$ de sorte que f soit contractante.

   (c) Conclure.

Exercice 4

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On suppose que F est fermé pour la topologie de $L^2(]0,1[)$ (dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ le produit scalaire et $\|.\|_2$ la norme associée).
Le but de l'exercice est de montrer que F est de dimension finie.

1. Démontrer que F est fermé dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. En déduire que $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_2$ sont des normes équivalentes sur F.
2. Justifier rapidement l'existence de l'opérateur de projection orthogonale sur F dans $L^2(]0,1[)$. On le note P_F.
3. Démontrer que pour tout $x \in [0,1]$, l'application

$$\psi_x : f \in L^2(]0,1[) \mapsto (P_F f)(x) \in \mathbb{R},$$

   est bien définie et constitue une forme linéaire continue sur L^2. En déduire qu'il existe $g_x \in L^2(]0,1[)$ telle que

$$(P_F f)(x) = \langle f, g_x \rangle_2, \;\; \forall f \in L^2(]0,1[).$$

4. Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de la boule unité fermée de $(F, \|.\|_\infty)$.

   (a) Démontrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_n$ qui converge **faiblement** dans $L^2(]0,1[)$ vers une fonction notée $f \in L^2(]0,1[)$.

   (b) Démontrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a la convergence simple

$$f_{\varphi(n)}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} (P_F f)(x).$$

   (c) Démontrer que $(f_{\varphi(n)})_n$ converge **fortement** vers $P_F f$ dans $L^2(]0,1[)$. En déduire que $f \in F$.

   (d) Démontrer que $(f_{\varphi(n)})_n$ converge vers f dans $(F, \|.\|_\infty)$.

   (e) Conclure.