Compacité

Exercice 1. Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^4 = 1\}, \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^4 < 1\},$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^5 = 2\}, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + xy + y^2 \leqslant 1\},$$
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + 8xy + y^2 \leqslant 1\}, \quad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y^2 = x(1-2x)\}.$$

Exercice 2. Soient F un fermé, et K un compact de $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$). On note

$$S = F + K = \{x + y;\ x \in F \text{ et } y \in K\}.$$

Montrer que S est fermé. Vérifier que si K est seulement supposé fermé, le résultat est faux.

Exercice 3.

1. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact. Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que
$$\forall x \in K,\ f(x) > 0.$$
Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que
$$\forall x \in K,\ f(x) \geq \lambda.$$
2. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que
$$\forall t \in [a,b],\ f(t) < t.$$
Montrer qu'il existe un réel $\lambda < 1$ tel que
$$\forall t \in [a,b],\ f(t) \leqslant \lambda t.$$

Exercice 4. Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose dans cette question que $\lim_{\|x\|_\infty \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.
2. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall M > 0,\ \exists R > 0$ tel que $\|x\|_\infty > R \implies |f(x)| > M$.

(ii) Pour toute partie bornée B de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^d$.

(iii) Pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^d$.

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On définit la *distance* d'un élément x_0 de E à une partie A de E, notée $d(x_0, A)$, par la formule

$$d(x_0, A) = \inf_{x \in A} \|x - x_0\|.$$

1. Supposons A compact. Montrer que pour tout $x_0 \in E$ il existe $y \in A$ tel que $d(x_0, A) = \|y - x_0\|$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que A est fermé. (On remarquera que pour toute partie B de A on a $d(x_0, B) \geq d(x_0, A)$.)
3. Montrer que l'application qui à x_0 associe $d(x_0, A)$ est continue sur E (sans aucune hypothèse sur A).

4. En déduire que si A est un fermé de E et B un compact de E tels que A et B sont disjoints, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$\|a - b\| \geq \delta \qquad \forall (a, b) \in A \times B.$$

5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que A et B sont deux fermés disjoints.

Exercice 6. Soient K un compact non vide de $\mathbb{R}^d$ et f une fonction continue de K dans K telle que

$$\forall x \in K, \forall y \in K, \text{ tels que } x \neq y, \text{ on ait } \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe a. *Indication : On pourra étudier le minimum de la fonction $g(x) = \|f(x) - x\|$.*
2. Soit $u_0 \in K$ quelconque, montrer que la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers le point fixe a. *Indication : On pourra étudier la suite $\|u_n - a\|$.*

Exercice 7. Soient K_1 un compact non vide de $\mathbb{R}^d$, K_2 un compact non vide de $\mathbb{R}^p$ et f une fonction continue de $K_1 \times K_2$ dans $\mathbb{R}$. On pose, pour tout $x \in K_1$,

$$\mu(x) = \sup_{y \in K_2} \{f(x, y)\}$$

Justifier le fait que $\mu(x)$ soit bien défini pour tout $x \in K_1$, puis montrer que μ est une fonction continue.

Exercice 8. Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^d$.
1. Soit $b \in \mathbb{R}^d$. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

a) il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers b.

b) pour tout ouvert U contenant b, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}, u_k \in U\}$ est infini.

Lorsque l'une de ces deux propositions est satisfaite, on dit que b est une **valeur d'adhérence** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K n'admettant qu'une seule valeur d'adhérence. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| > 1$. On suppose qu'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(\lambda x_n + x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée x. L'objectif est d'établir que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

a) Montrer que si la suite $(x_n)_n$ converge vers une limite l alors nécessairement $l = \dfrac{x}{1+\lambda}$.

b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence notée a. Puis prouver que $x - \lambda a$ est encore une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Définissons alors la suite $(w_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^d$ par :

$$\begin{cases} w_0 &= a \\ w_{p+1} &= x - \lambda w_p, \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ \|w_p - l\|_\infty = |\lambda|^p \|a - l\|_\infty.$$

d) En déduire que, si $a \neq l$, la suite $(w_p)_{p\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Conclure.