# Limites. Continuité.

**Exercice 1.** 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a $|f(x,y)| \leq \|(x,y)\|_2^2$. En déduire la limite de $f$ en $(0,0)$.

2. On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \dfrac{(x-1)^2 + y^2(2-2x+x^2)}{(x-1)^2+y^2}$.
Montrer que $|g(x,y) - 1| \leq \|(x,y) - (1,0)\|_2^2$. En déduire la limite de $g$ en $(1,0)$.

**Exercice 2.** 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

a) Pour $x \in \mathbb{R}^*$ fixé, calculer $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$. En déduire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$.

b) Pour $y \in \mathbb{R}^*$ fixé, calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$. En déduire $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$.

c) Montrer que $f(x,y)$ n'admet pas de limite quand $(x,y) \to (0,0)$.
*Indication : On construira deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ qui convergent vers $(0,0)$, mais telles que $\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$.*

2. On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

a) Pour $x \in \mathbb{R}^*$ fixé, calculer $\lim\limits_{y\to 0} g(x,y)$. En déduire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left(\lim\limits_{y\to 0} g(x,y)\right)$.

b) Pour $y \in \mathbb{R}^*$ fixé, calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x,y)$. En déduire $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \left(\lim\limits_{x\to 0} g(x,y)\right)$.

c) Montrer que $g(x,y)$ n'admet pas de limite quand $(x,y) \to (0,0)$.

**Exercice 3.** Etudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3. $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4. $k : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1+x^2+y^2}{y}\sin(y) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

**Exercice 4.** Pour les fonctions suivantes, donner si possible une valeur en $(0,0)$ pour que la fonction soit continue sur $\mathbb{R}^2$ :

a) $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

b) $g(x,y) = \dfrac{x+y^2}{2x^2+3y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

**Exercice 5.** Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. On rappelle qu'on dit que $A$ est dense dans $\mathbb{R}^d$ si $\overline{A} = \mathbb{R}^d$.

1. Soient $f$ et $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ deux fonctions continues. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble dense dans $\mathbb{R}^d$. On suppose que $f = g$ sur $A$. Montrer que $f = g$ sur $\mathbb{R}^d$
2. Soit $u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^d$ une application continue qui vérifie $u(x+y) = u(x) + u(y)$ pour tout $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^d$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}\ u(x) = xa$.

**Exercice 6.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$. On définit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $F(x,y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ si $x \neq y$ et $F(x,x) = f'(x)$. Montrer que $F$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 7.** Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{\max(1, \|x\|)} x$. Montrer que $f$ est 2-lipschitzienne.

**Exercice 8.** Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}^d$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on définit la distance de $x$ à $A$ par $d(x,A) = \inf\{\|x-a\|, a \in A\}$

1. Montrer que $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x,A) = 0$.
2. Montrer que l'application $x \mapsto d(x,A)$ est 1-lipschitzienne.

**Exercice 9.** Trouver un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui soit continue mais pas uniformément continue.

**Exercice 10.** Montrer que l'image d'un ouvert (resp. d'un fermé) par une application continue n'est pas nécessairement un ouvert (resp. un fermé).

**Exercice 11.** Soient $(d_1, d_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $f$ une fonction de $\mathbb{R}^{d_1}$ dans $\mathbb{R}^{d_2}$.

1. Montrer que si $f$ continue alors pour tout sous ensemble $A$ de $\mathbb{R}^{d_2}$ on a $f^{-1}\left(\overset{\circ}{A}\right) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(A)}}$.

2. Réciproquement, supposons que pour tout sous ensemble $A$ de $\mathbb{R}^{d_2}$ on ait $f^{-1}\left(\overset{\circ}{A}\right) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(A)}}$.
Montrer que $f$ est continue.

**Exercice 12.** Soient $(d_1, d_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $f$ une fonction de $\mathbb{R}^{d_1}$ dans $\mathbb{R}^{d_2}$.

1. Montrer que si $f$ est continue, alors pour tout sous ensemble $A$ de $\mathbb{R}^{d_1}$ on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

2. Réciproquement, supposons que pour tout sous ensemble $A$ de $\mathbb{R}^{d_1}$ on ait $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. On veut montrer que $f$ est continue.
Soit $x \in \mathbb{R}^{d_1}$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$. Il s'agit de montrer que $f(x_n) \to f(x)$. On va raisonner par l'absurde et supposer que ce n'est pas vrai.

a. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(x_{\phi(n)})_n$ telle que $\|f(x) - f(x_{\phi(n)})\| \geq \varepsilon$ pour tout $n$.

b. On pose $A = \{x_{\phi(n)},\ n \geq 1\}$. Montrer que $x \in \overline{A}$. En déduire que $f(x) \in \overline{f(A)}$.

c. Etablir une contradiction et conclure.