2014-2014 **Topologie et Fonctions de plusieurs variables**
Aix-Marseille Université **Licence MPCI, 2ème année**

Normes, boules, ouverts, fermés.

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à d. Soient $x_0 < x_1 < \ldots < x_d$ des nombres dans $\mathbb{R}$. On définit $N : E \to \mathbb{R}_+$ par $N(P) = \max_{0 \leq i \leq d} |P(x_i)|$.

1. Montrer que N est une norme.
2. L'application N serait-elle encore une norme sur $\mathbb{R}_{d+1}[X]$?

Exercice 2.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ quelconque. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^d$. On note B la boule unité fermée. Montrer que le vecteur $y = \dfrac{x}{N(x)}$ appartient à B.
2. Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^d$, B_1 et B_2 leurs boules unités fermées respectives. Montrer que
$$B_1 \subset B_2 \Rightarrow \big(\forall x \in \mathbb{R}^d, N_2(x) \leqslant N_1(x)\big).$$

Exercice 3.

1. Montrer que $]0,1[\times]0,1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $[0,1] \times [0,1]$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que $[0,1[\times]0,1[$ n'est ni ouvert, ni fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.

1. Montrer que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x + y \leqslant 0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x + y > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est ni un ouvert ni un fermé de $\mathbb{R}$.
4. Soient U_1 et U_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^{d_1}$ et $\mathbb{R}^{d_2}$. Montrer que $U_1 \times U_2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de $\mathbb{R}^d$ où $d \in \mathbb{N}^*$. On note l sa limite. Montrer que $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{l\}$ est un fermé.
Indication : On montrera que l'ensemble complémentaire est un ouvert.

Exercice 6.

1. Montrer que si A et B sont deux ensembles ouverts de $\mathbb{R}^d$, alors leur somme $A + B$ est aussi un ouvert de $\mathbb{R}^d$.
2. On pose
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad xy = 1\}, \text{ et } B = \{0\} \times \mathbb{R}.$$
   (a) Montrer que A et B sont des fermés de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Calculer $A + B$ et montrer que ce n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que si A et B sont deux fermés de $\mathbb{R}^d$ et que, de plus, l'un de ces deux ensembles est borné, alors leur somme $A + B$ est fermée.

Exercice 7.

1. Montrer qu'**il n'existe pas** dans $\mathbb{R}$ de partie A qui soit à la fois : non vide, majorée, ouverte et fermée.
2. On veut maintenant montrer que les seules parties de $\mathbb{R}$ qui soient à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}$. Pour cela, on suppose qu'il existe $A \subset \mathbb{R}$ à la fois ouverte et fermée et telle que $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que, quitte à considérer le complémentaire A^c de A, on peut toujours supposer qu'il existe $a < b$ tels que $a \in A$ et $b \notin A$.
   (b) Montrer que la partie $]-\infty, a[\cup\big(A \cap [a,b]\big)$ est non vide, majorée, ouverte et fermée. Conclure.

Exercice 8. 1. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble $E = [0,1[\times]0,1[$ dans $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer l'adhérence et l'intérieur des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 3x-1 > y\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1\}$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1 < x < 3 \text{ et } 2 \leqslant y \leqslant 5\}$$

Exercice 9. Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose que $A \subset B$. Montrer que $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
2. Montrer que $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ et trouver un contre–exemple à l'inclusion réciproque.
3. Montrer que $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Exercice 10. Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$.

1. On suppose que $A \subset B$. Montrer que $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et trouver un contre–exemple à l'inclusion réciproque.

Exercice 11. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$.

1. Montrer que $\overset{\circ}{\widehat{A^c}} = \left(\overline{A}\right)^c$ et $\overline{A^c} = \left(\overset{\circ}{A}\right)^c$.
2. Montrer que grâce aux égalités montrées dans la question 1., on aurait pu déduire les résultats de l'exercice 10 à partir de ceux de l'exercice 9.

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel de dimension finie d.

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_d)$ une base de $\mathbb{R}^d$. Pour $x \in E$, on note $(x_1, \ldots, x_d)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, c'est à dire que $(x_1, \ldots, x_d)$ est le seul d-uplet tel que $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i$. On définit alors pour $x \in E$, $N(x) = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$. Montrer que N est une norme sur E.
2. Soit F un sev de E. Montrer que F est fermé, puis déterminer $\overset{\circ}{F}$.

   Indication : Si $F \neq E$, on montrera que $\overset{\circ}{F} = \emptyset$ en utilisant un vecteur $z \notin F$.

Exercice 13. Soit $d \geq 1$ et $E = M_d(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille d.

1. Montrer que le sous-ensemble $GL_d(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ouvert de E. Vérifier que $\overline{GL_d(\mathbb{R})} = E$.
2. Montrer que l'ensemble $S_d(\mathbb{R})$ des matrices symétriques est un fermé de E.
3. Montrer que l'ensemble $O_d(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de taille d est fermé et borné dans E.