Suites vectorielles et normes

Exercice 1. Déterminer la nature et la limite éventuelle des suites vectorielles suivantes :

1. $x_n = \begin{pmatrix} \frac{1+2n^2}{1+n+n^2} \\ e^{\frac{1}{1+n}} \end{pmatrix}$ 2. $x_n = \begin{pmatrix} n\sin(1/n) \\ \alpha^n \cos(1/n) \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est fixé.

3. $x_n = \begin{pmatrix} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n} \\ e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \\ (-1)^n \tan\left(\frac{1}{n}\right) \end{pmatrix}$ 4. $x_n = \begin{pmatrix} (-1)^n \cosh(1/n) \\ \frac{n\ln n}{n^2+1} \end{pmatrix}$

Exercice 2. On considère la suite récurrente de $\mathbb{R}^2$ $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ fixé où

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2. \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x-2y \\ -3x+y \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Il n'est pas évident de prévoir le comportement de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pose donc $u_n = x_{n,1} + x_{n,2}$ et $v_n = 3x_{n,1} - 2x_{n,2}$. Exprimer u_{n+1} (resp. v_{n+1}) en fonction de u_n (resp. v_n).
2. Expliciter x_n en fonction de n et en déduire le comportement de la suite.

Exercice 3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{d}\|x\|_2 \le d\|x\|_\infty$$

et que ces inégalités sont optimales (cela signifie que pour chacune de ces inégalités il existe un $x \neq 0$ qui réalise l'égalité).

Exercice 4. On considère la matrice $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et on définit la suite récurrente de $\mathbb{R}^3$: $x_{n+1} = Ax_n$ avec $x_0 \in \mathbb{R}^3$ fixé.

1. Expliciter les composantes de x_{n+1} en fonction des composantes de x_n. Peut-on facilement en conclure le comportement de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a $\|Ax\|_\infty \le \frac{5}{6}\|x\|_\infty$, puis que $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\|_\infty = 0$ pour toute valeur de x_0. En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Trouver $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que $\|Ax\|_1 = \frac{7}{6}\|x\|_1$. Peut-on conclure de la même façon sur la convergence de la suite à l'aide de la norme ℓ^1 ?

Exercice 5. Soit $x = (x_i)_{1\le i\le d} \in \mathbb{R}^d$ et $y = (y_i)_{1\le i\le d} \in \mathbb{R}^d$ deux vecteurs fixés.

1. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

   a) On définit le polynôme $P(t) = \|x\|_2^2 + 2t\sum_{i=1}^d x_i y_i + t^2\|y\|_2^2$. Montrer que $P(t) \ge 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   b) En utilisant le discriminant du polynôme P, montrer que $\left|\sum_{i=1}^d x_i y_i\right| \le \|x\|_2\|y\|_2$.

2. En déduire l'inégalité triangulaire pour la norme ℓ^2.

Exercice 6. 1. Pour tout $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on pose $N_1(x) = \max(|x_1 + x_2|, |x_1 - 2x_2|)$. Montrer que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et représenter l'ensemble des vecteurs de norme inférieure ou égale à 1 pour cette norme.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on pose $N_2(x) = \sup_{t\in[0,1]} |x_1 + tx_2|$. Montrer que N_2 est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}^2$, on pose $N_3(x) = |3x_1 + 2x_2|$. Montrer que N_3 n'est pas une norme sur $\mathbb{R}^2$.
4. Pour $x \in \mathbb{R}^2$, on pose $N_4(x) = |x_1| + x_2^2$. Montrer que N_4 n'est pas une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7. Pour tout $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on pose $N_1(x) = \max(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, |x_1 - x_2|)$ et $N_2(x) = \sqrt{x_1^2/9 + x_2^2/4}$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}^2$ et représenter l'ensemble des vecteurs de norme inférieure ou égale à 1 pour ces normes.
2. Montrer que $N_2 \leq \|.\|_\infty \leq \|.\|_2 \leq N_1 \leq \|.\|_1 \leq 4N_2$.

Exercice 8. Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$ et $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq d} \in M_d(\mathbb{R})$. On pose :

$$|||A||| = \sup_{x\in\mathbb{R}^d; \|x\|=1} \|Ax\|.$$

1. Montrer qu'on définit ainsi une norme sur $M_d(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, le vecteur $y = \frac{x}{\|x\|}$ est de norme égale à 1. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a $\|Ax\| \leq |||A||| \|x\|$.
3. On munit $\mathbb{R}^d$ de la norme $\|.\|_1$. Montrer que $|||A|||_1 = \max_{1\leq j\leq d} \left(\sum_{i=1}^{d} |a_{i,j}| \right)$.
4. On munit maintenant $\mathbb{R}^d$ de la norme $\|.\|_\infty$. Montrer que $|||A|||_\infty = \max_{1\leq i\leq d} \left(\sum_{j=1}^{d} |a_{i,j}| \right)$.
5. A-t-on $|||A|||_1 = |||A|||_\infty$ pour toute $A \in M_d(\mathbb{R})$?
6. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = Ax_n$ où $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Calculer $|||A|||_1$ et $|||A|||_\infty$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

Exercice 9. Soient $p > 1$ et $q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $x = (x_i)_{1\leq i\leq d} \in \mathbb{R}^d$ et $y = (y_i)_{1\leq i\leq d} \in \mathbb{R}^d$. On pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \|y\|_q = \left(\sum_{i=1}^{d} |y_i|^q \right)^{1/q}.$$

1. En utilisant la concavité de ln, montrer que pour a, $b \geq 0$, on a $ab \leq \dfrac{1}{p}a^p + \dfrac{1}{q}b^q$.
2. Etablir $\dfrac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \dfrac{1}{p}\dfrac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \dfrac{1}{q}\dfrac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q} \quad \forall\, 1 \leq i \leq d$, et en déduire $\sum_{i=1}^{d} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$.
3. En écrivant $(|x_i| + |y_i|)^p = |x_i|\,(|x_i| + |y_i|)^{p-1} + |y_i|\,(|x_i| + |y_i|)^{p-1}$, montrer $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.
4. Conclure que $\|.\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$.
5. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ fixé, montrer que $\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.