Topologie et Fonctions de plusieurs variables

Franck Boyer

Licence MPCI - 2ième Année

Aix-Marseille Université

25 avril 2015

Table des matières

Chapitre I

Suites de $\mathbb{R}^d$. Notion de norme.

Dans tout le cours chapitre, $d \geq 1$ désigne un nombre entier. On va travailler dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ des d-uplets de nombres réels.

1 Suites convergentes

Définition I.1

On appelle suite d'éléments de $\mathbb{R}^d$ *toute famille* $(x_n)_{n\geq 0}$ *d'éléments de* $\mathbb{R}^d$ *indexée par l'ensemble* $\mathbb{N}$ *des entiers naturels. On peut également considérer des suites qui commencent à un indice non nul* $(x_n)_{n\geq n_0}$.

On notera $x_n = \begin{pmatrix} x_{n,1} \\ \vdots \\ x_{n,d} \end{pmatrix}$ *les* d *coordonnées de l'élément* x_n *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^d$.

Définition I.2

Soit $l = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$. *On dit qu'une suite* $(x_n)_n$ *d'éléments de* $\mathbb{R}^d$ *converge vers* l *quand* n *tend vers l'infini, si pour tout* $1 \leq i \leq d$, *la suite de nombres réels* $(x_{n,i})_n$ *converge vers* l_i.

Proposition I.3

La limite l *de la suite* $(x_n)_n$, *si elle existe, est unique.*

Preuve :

Ceci est la conséquence directe de l'unicité de la limite pour les suites de nombres réels. ■

Exemple I.4

Si $x_0 \in \mathbb{R}^d$ *est un élément quelconque de* $\mathbb{R}^d$ *et* A *une matrice réelle carrée de taille* d, *on peut définir par récurrence la suite* $(x_n)_n$ *par*

$$x_{n+1} = Ax_n, \ \ \forall n \geq 0.$$

Le comportement de toutes les composantes de x_n *est couplé et il est donc difficile de séparer l'étude de chacune des composantes. On verra par la suite qu'avec les bons outils d'analyse et d'algèbre, on pourra étudier complètement le comportement de telles suites.*

Prenons dès maintenant des exemples :

- *Si* $A = \mathrm{Id}$, *alors la suite* $(x_n)_n$ *est stationnaire et converge donc vers* x_0.
- *Si* $A = \lambda \mathrm{Id}$ *avec* $|\lambda| > 1$, *alors* $(x_n)_n$ *ne converge pas sauf si* $x_0 = 0$.
- *Si* $A = \lambda \mathrm{Id}$ *avec* $|\lambda| < 1$, *alors* $(x_n)_n$ *converge vers* $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *pour toute valeur de* x_0.
- *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *l'analyse du comportement de la suite est plus complexe. tout d'abord, on constate que la deuxième composante de* x_n *est stationnaire :*
$$x_{n,2} = x_{0,2}, \ \ \forall n \geq 0,$$
On a alors la formule suivante
$$x_{n+1,1} = x_{n,1} + x_{0,2}, \ \ \forall n \geq 0,$$
et il s'agit donc d'une suite arithmético géométrique que l'on peut calculer explicitement
$$x_{n,1} = x_{0,1} + n x_{0,2}.$$
In fine, on obtient que la suite $(x_n)_n$ *converge si et seulement si* $x_{0,2} = 0$ *et sa limite vaut alors* x_0.
- *Si* $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 1.2 \\ -0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$ *il devient difficile de trouver une expression immédiate de* x_n *en fonction de* n. *On peut pourtant établir que, dans ce cas, on a convergence vers* 0 *de la suite pour tout choix de la donnée initiale.*
- *En modifiant un peu la matrice de la façon suivante* $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 1.2 \\ \mathbf{-1} & 0.2 \end{pmatrix}$, *le comportement est radicalement différent puisqu'on peut établir que, sauf si* $x_0 = 0$, *tous les coefficients de la suite vont tendre vers l'infini.*

La définition ci-dessus est donc relativement simple à comprendre. La convergence d'une suite d'éléments de $\mathbb{R}^d$ est ainsi définie **coordonnées par coordonnées**. En revanche, d'un point de vue pratique, il peut être délicat de toujours se ramener à l'étude séparée des composantes comme dans l'exemple précédent. Pour cela, on va introduire des outils qui vont simplifier l'analyse de telles suites.

Définition I.5 (Norme l^2, Norme l^1, Norme l^∞)

Pour tout élément $x \in \mathbb{R}^d$, *on définit les trois quantités suivantes :*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i)^2},$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq d} |x_i|.$$

Elles sont appelées respectivement, norme l^1, *norme* l^2 *et norme* l^∞.

Remarque I.6

Dans le cas particulier où $d = 1$, *toutes ces normes sont égales et coïncident avec la valeur absolue.*

Remarque I.7

Dans le cas où $d = 2$, on peut identifier $\mathbb{R}^2$ à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, et on a alors

$$\|(a,b)\|_2 = |a+ib|, \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,$$

de sorte que la notion de norme l^2 sur $\mathbb{R}^2$ coïncide avec la notion de module d'un nombre complexe. D'après le théorème de Pythagore, la norme l^2 coïncide également avec la notion de **distance euclidienne** *dans le plan (mais aussi dans l'espace $\mathbb{R}^3$).*

L'objet de ces définitions est qu'elles permettent de ramener l'étude de la convergence de suites de $\mathbb{R}^d$ à l'étude d'une seule suite de nombres réels positifs. En effet, on a le résultat suivant :

Proposition I.8

Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^d$ et $l \in \mathbb{R}^d$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *La suite $(x_n)_n$ converge vers l.*
2. *La suite numérique $(\|x_n - l\|_1)_n$ tend vers 0.*
3. *La suite numérique $(\|x_n - l\|_2)_n$ tend vers 0.*
4. *La suite numérique $(\|x_n - l\|_\infty)_n$ tend vers 0.*

Preuve :

$1 \Rightarrow 2$ Supposons que la suite $(x_n)_n$ converge vers l. Alors pour tout $1 \leq i \leq d$, on a

$$|x_{n,i} - l_i| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Ainsi

$$\|x_n - l\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_{n,i} - l_i| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

comme une somme de d suites qui tendent vers 0.

$2 \Rightarrow 3$ Commençons par démontrer l'inégalité suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \text{ on a } \|x\|_2 \leq \|x\|_1. \tag{I.1}$$

En effet, pour tout $1 \leq i \leq d$, on a

$$(x_i)^2 \leq |x_i| \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j| \right) \leq \|x\|_1 |x_i|,$$

et ainsi en sommant sur i, on trouve

$$\sum_{i=1}^{d} (x_i)^2 \leq \|x\|_1^2,$$

ce qui est bien l'inégalité annoncée.

L'implication que l'on souhaite démontrer est alors immédiate, par le théorème des gendarmes, car on a

$$0 \leq \|x_n - l\|_2 \leq \|x_n - l\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

$3 \Rightarrow 4$ Là encore on va démontrer l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \text{ on a } \|x\|_\infty \leq \|x\|_2. \tag{I.2}$$

Celle-ci est vraie car pour tout $1 \leq i \leq d$, on a $|x_i| \leq \|x\|_2$.

On obtient alors le résultat par le théorème des gendarmes car

$$0 \leq \|x_n - l\|_\infty \leq \|x_n - l\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

$4 \Rightarrow 1$ Soit $1 \leq i \leq d$, on a alors pour tout $n \geq 0$:

$$0 \leq |x_{n,i} - l_i| \leq \|x_n - l\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

ce qui démontre que $(x_{n,i})_n$ converge vers l_i, toujours par le théorème des gendarmes.

Ceci étant vrai pour tout $1 \leq i \leq d$, on a bien démontré la convergence de la suite $(x_n)_n$ vers l, au sens de la définition donnée plus haut.

■

Ce résultat montre que, pour étudier la convergence d'une suite d'éléments de $\mathbb{R}^d$ vers un élément $l \in \mathbb{R}^d$, il suffit d'étudier $\|x_n - l\|$ où $\|\cdot\|$ désigne l'une des trois normes étudiées ci-dessus.

Remarque I.9

Les outils essentiels de la démonstration du résultat précédent sont les inégalités (I.1) *et* (I.2). *On a en réalité des inégalités un peu plus précises :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{d}\|x\|_2,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{d}\|x\|_\infty,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq d\|x\|_\infty,$$

et de plus toutes ces inégalités sont optimales (i.e. les constantes sont les meilleures).
On dit que les normes l^1, l^2 et l^∞ sont équivalentes. On retrouvera cette notion plus loin dans le cours.

2 Normes

Essayons de formaliser un peu la notion de norme que nous avons introduite précédemment sur trois exemples.

Définition I.10

On dit qu'une application $N : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ est une **norme** *si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $N(x) \geq 0$.*
2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$*
$$N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$
3. **Homogénéité :** *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a*
$$N(\lambda x) = |\lambda| N(x).$$
4. **Inégalité triangulaire :** *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a*
$$N(x+y) \leq N(x) + N(y).$$

De façon résumée nous pouvons dire qu'une norme permet de *mesurer* les éléments de $\mathbb{R}^d$.

Exemple I.11

Comme leur nom l'indique, les trois applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies plus haut sont bien des normes au sens de la définition ci-dessus.
Les trois premières propriétés sont immédiates à vérifier mais l'inégalité triangulaire n'est pas aussi simple.

- *Pour la norme l^1, l'inégalité triangulaire découle immédiatement de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$. En effet, on a*

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i+y_i| \leq \sum_{i=1}^d (|x_i|+|y_i|) = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

- *Pour la norme l^2, l'inégalité triangulaire n'est pas évidente à démontrer et nous l'admettrons pour le moment (vous verrez la démonstration, qui est très importante, en TD).*
- *Pour la norme infini, on procède de la façon suivante : on fixe $1 \leq i \leq d$ et on utilise l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ puis la définition de la norme infini :*

$$|x_i+y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty,$$

et comme ceci est vrai pour tout i, on en déduit que

$$\|x+y\|_\infty = \sup_i |x_i+y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Exemple I.12

Il existe beaucoup d'autres normes sur $\mathbb{R}^d$. Prenons quelques exemples :

- *Si $1 < p < \infty$, l'application*

$$x \mapsto \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

est une norme sur $\mathbb{R}^d$, appelée norme l^p.

- *Dans $\mathbb{R}^2$, les applications suivantes sont des normes :*

$$N(x) = \sqrt{x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2},$$

$$N(x) = \max(|x_1 - x_2|, |x_1 + 3x_2|).$$

Exercice I.1

En dimension $d = 1$, montrer que si N est une norme sur $\mathbb{R}$, alors il existe un unique $\alpha > 0$ tel que

$$N(x) = \alpha|x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, on connaît parfaitement toutes les normes sur $\mathbb{R}$, ce sont les multiples positifs de la valeur absolue.

Nous allons maintenant énoncer un des théorèmes fondamentaux du chapitre qui exprime que **toutes** les normes sur $\mathbb{R}^d$ permettent d'étudier, de façon équivalente, la convergence des suites de $\mathbb{R}^d$.

Définition I.13 (Normes équivalentes)

Deux normes N_1 et N_2 sur $\mathbb{R}^d$ sont dites **équivalentes**, *si on peut trouver deux nombres positifs $\underline{c} > 0$ et $\overline{c} > 0$ tels que*

$$\underline{c}N_1(x) \leq N_2(x) \leq \overline{c}N_1(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Théorème I.14

Toutes les normes sur $\mathbb{R}^d$ sont équivalentes.

La démonstration de ce théorème nécessite des notions plus avancées de topologie, c'est pourquoi nous la verrons plus loin dans le cours.

Corollaire I.15

Soit N une norme quelconque sur $\mathbb{R}^d$, $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^d$ et $l \in \mathbb{R}^d$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *La suite $(x_n)_n$ converge vers l.*
2. *La suite de nombres positifs $(N(x_n - l))_n$ converge vers 0.*

Preuve :

On a déjà vu ce résultat pour des normes particulières qui sont $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. Mais, d'après le théorème précédent, si N est une norme quelconque, il existe $\underline{c}$ et $\overline{c}$ tels que

$$\underline{c}N(x_n - l) \leq \|x_n - l\|_\infty \leq \overline{c}N(x_n - l), \quad \forall n \geq 0.$$

Par le théorème de comparaison, on voit bien que $N(x_n - l) \to 0$ si et seulement si $\|x_n - l\|_\infty \to 0$. ■

3 Suites de Cauchy

Comme d'habitude, il est utile d'avoir un critère pour déterminer si une suite converge sans connaître *a priori* sa limite. C'est l'objet du critère de Cauchy qui suit.

Définition I.16 (Suites de Cauchy)

On dit qu'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^d$ est de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, \forall p \geq 0, \quad \|x_n - x_{n+p}\|_\infty \leq \varepsilon.$$

D'après le théorème d'équivalence des normes, on ne change rien à cette définition en remplaçant la norme $\|\cdot\|_\infty$ par n'importe quelle autre norme.

Une suite est donc de Cauchy si, au bout d'un certain rang, tous les termes de la suite sont proches deux-à-deux (plus précisément : aussi proches que l'on souhaite !)

Théorème I.17

Une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^d$ converge **si et seulement si** *elle est de Cauchy.*

Preuve :

- Supposons que $(x_n)_n$ soit de Cauchy, alors pour tout $1 \leq i \leq d$, on a

  $$|x_{n,i} - x_{n+p,i}| \leq \|x_n - x_{n+p}\|_\infty,$$

  ce qui prouve que la suite de réels $(x_{n,i})_n$ vérifie le critère de Cauchy dans $\mathbb{R}$. A ce titre, nous savons que la suite $(x_{n,i})_n$ est convergente.

  Ceci étant vrai pour tout i, nous avons bien obtenu la convergence de la suite $(x_n)_n$.
- Si maintenant la suite $(x_n)_n$ converge vers une limite notée $l \in \mathbb{R}^d$, nous avons grâce à l'inégalité triangulaire

  $$\|x_n - x_{n+p}\|_\infty \leq \|x_n - l\|_\infty + \|x_{n+p} - l\|_\infty, \;\; \forall n, p \geq 0.$$

  Si on prend n assez grand, on peut donc rendre cette quantité plus petite que n'importe quel $\varepsilon > 0$ et le tour est joué.

■

4 Boules ouvertes et fermées.

Nous savons maintenant mesurer, grâce aux normes, la *longueur* d'un élément de $\mathbb{R}^d$. Ceci permet de définir des objets utiles pour la suite.

Définition I.18 (Boules)

Soit $a \in \mathbb{R}^d$ et $R \geq 0$, et N une norme sur $\mathbb{R}^d$

- *On appelle* **boule ouverte** *centrée en a et de rayon R pour la norme N, l'ensemble*

$$B_N(a,R) = \{x \in \mathbb{R}^d,\ \ N(x-a) < R\}.$$

- *On appelle* **boule fermée** *centrée en a et de rayon R pour la norme N, l'ensemble*

$$\overline{B_N}(a,R) = \{x \in \mathbb{R}^d,\ \ N(x-a) \leq R\}.$$

Quand il n'y a pas d'ambiguité sur la norme utilisée, il arrive qu'on supprime l'indice N dans la notation.

Exemple I.19

On rappelle qu'en dimension 1, la fonction **valeur absolue** *est une norme (et c'est la seule à multiple positif près). On a alors*

$$B_{|\cdot|}(a,R) =]a-R, a+R[,$$

$$\overline{B_{|\cdot|}}(a,R) = [a-R, a+R].$$

En réalité, les boules ouvertes dans $\mathbb{R}$, sont exactement les intervalles ouverts bornés et les boules fermées sont les intervalles fermés bornés. En effet, nous avons (à vérifier en exercice) pour tout $a < b$

$$]a,b[= B_{|\cdot|}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right),$$

$$[a,b] = \overline{B_{|\cdot|}}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right).$$

Proposition I.20

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^d$, $a \in \mathbb{R}^d$ et $R > 0$. Alors on a

$$B_N(a,R) = a + RB_n(0,1),$$

$$\overline{B_N}(a,R) = a + R\overline{B_N}(0,1).$$

Ainsi, toutes les boules ouvertes et fermées de $\mathbb{R}^d$ s'obtiennent par homothétie et translation à partir des boules $B_N(0,1)$ et $\overline{B_N}(0,1)$. Ces deux boules sont respectivement appelées **boule unité ouverte** *et* **boule unité fermée**.

Preuve :

On ne traite que le cas des boules ouvertes car celui des boules fermées s'obtient de façon analogue.

- Si $x \in B_N(a,R)$, par définition, on a $N(x-a) < R$ et par homogénéité de la norme, on en déduit que $N\left(\frac{x-a}{R}\right) < 1$, on a alors

$$x = a + R\frac{x-a}{R} \in a + RB_N(0,1).$$

- Inversement si $x \in \mathbb{R}^d$ s'écrit $x = a + Ry$ avec $y \in B_N(0,1)$, alors on a

$$N(x-a) = N(Ry) = RN(y) < R,$$

et donc $x \in B_N(a,R)$.

■

Exemple I.21 (Boules unités de $\mathbb{R}^2$)

Pour visualiser les boules de $\mathbb{R}^d$, il suffit donc de visualiser les boules unités.

- *Pour la norme l^2 : les boules unités coïncidents avec les disques de centre 0 et de rayon 1.*
- *Pour la norme l^∞ : les boules unités sont les carrés de côté 2 parallèles aux axes et centrés en 0.*
- *Pour la norme l^1 : les boules unités sont les carrés de côté $\sqrt{2}$ centrés en 0 et tournés d'un huitième de tour.*

On peut utiliser la notion de boule pour réinterpréter les notions de suites convergentes et de suites de Cauchy, comme on peut le faire dans $\mathbb{R}$ avec les intervalles.

Proposition I.22 (Convergence et suites de Cauchy revues et corrigées)

Soit N une norme quelconque sur $\mathbb{R}^d$.

1. *Une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^d$ converge vers $l \in \mathbb{R}^d$ si et seulement si pour toute boule ouverte centrée en l et de rayon aussi petit que l'on veut $B_N(l,\varepsilon)$, alors tous les x_n sont dans $B_N(l,\varepsilon)$ à partir d'un certain rang n_0. Autrement dit,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq 0, \;\; \forall n \geq n_0, \;\; x_n \in B_N(l,\varepsilon).$$

2. *Une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^d$ est de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une boule ouverte B de rayon ε telle que tous les x_n sont dans B à partir d'un certain rang.*

5 Topologie dans les espaces vectoriels de dimension finie

On vient de voir dans les paragraphes précédents un certain nombre de notions de topologie dans l'espace $\mathbb{R}^d$. En réalité toutes ces notions se transposent sans **aucune difficulté supplémentaire** au cas de n'importe quel $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On a ainsi la même définition pour les normes :

Définition I.23

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On dit qu'une application $N : E \mapsto \mathbb{R}$ est une **norme** *si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $x \in E$, $N(x) \geq 0$.*
2. *Pour tout $x \in E$*
$$N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$
3. **Homogénéité :** *Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a*
$$N(\lambda x) = |\lambda| N(x).$$
4. **Inégalité triangulaire :** *Pour tous $x, y \in E$, on a*
$$N(x+y) \leq N(x) + N(y).$$

Le couple (E,N) est alors appelé $\mathbb{R}$**-espace vectoriel normé**.

- Exemple : l'emsemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$. On peut le munir de diverses normes comme par exemple
$$\|P\| = \max(|P(0)|, |P'(0)|, \cdots, |P^{(n)}(0)|),$$
ou encore
$$\|P\| = \sum_{i=0}^{n} |P(x_i)|,$$
où $x_0 < \cdots < x_n$ sont des points deux à deux distincts.

- L'ensemble des matrices $M_{n,m}(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{n\times m}$ et possède donc une structure d'espace vectoriel de dimension finie. On peut considérer par exemple la norme suivante

$$\|A\| = \sum_{i,j} |a_{ij}|.$$

On verra dans un paragraphe ultérieur et en TD que cet espace possède des normes plus naturelles que d'autres que l'on étudiera plus précisément.

Remarque I.24

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie d. Soit $(e_1, \cdots, e_d)$ une base de cet espace. Muni d'une telle base, on peut construire un isomorphisme de $\mathbb{R}^d$ sur E :

$$\varphi : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \varphi(x) = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i \in E.$$

- *Si maintenant N est une norme sur E, on vérifie que $x \in \mathbb{R}^d \mapsto N(\varphi(x))$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$.*
- *Réciproquement si $\tilde{N}$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$, l'application $y \in E \mapsto \tilde{N}(\varphi^{-1}(y))$ est une norme sur E.*

Ainsi toutes les notions que l'on va définir sur $\mathbb{R}^d$ s'adapteront par le biais d'un tel isomorphisme à un tel espace E.
Par exemple, une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E converge vers un élément l de E si et seulement si, dans n'importe quelle base de E, les suites des coordonées des x_n converge vers les coordonnées de l. Ceci est encore équivalent à dire que, pour n'importe quelle norme N sur E, on a $N(x_n - l) \to 0$.

Chapitre II

Parties ouvertes et fermées de $\mathbb{R}^d$

Dans toute la suite, on munit $\mathbb{R}^d$ de la norme l^∞ bien que tous les résultats énoncés sont valables dans n'importe quel $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie (E, N).

1 Parties ouvertes de $\mathbb{R}^d$

Définition II.1

On dit qu'une partie $A \subset \mathbb{R}^d$ est **ouverte** *si :*

$$\forall x \in A, \exists \delta > 0, \quad B(x, \delta) \subset A.$$

On dit aussi que A est un ouvert.

Remarque II.2

L'ensemble vide $\emptyset$ est ouvert. De même l'ensemble $A = \mathbb{R}^d$ est aussi ouvert.

De façon informelle, on peut dire que A est ouverte si tout point $x \in A$ a tous ses "voisins" suffisament proches qui sont aussi dans A.

Remarque II.3 (A propos de l'équivalence des normes)

Le théorème I.14 nous dit que toutes les normes sur $\mathbb{R}^d$ sont équivalentes. On vérifie aisément que ceci implique que pour toutes normes N_1 et N_2 nous avons

$$\forall a \in \mathbb{R}^d, \forall R > 0, \exists r > 0, \quad \textit{tel que} \quad B_{N_1}(a, r) \subset B_{N_2}(a, R).$$

Cette propriété nous dit que la définition des ensembles ouverts de $\mathbb{R}^d$ de dépend pas de la norme choisie.

Exemple II.4

- *La boule ouverte de centre a et de rayon $R > 0$ est un ouvert (la définition est donc cohérente). En effet, soit $x \in B(a, R)$. On a donc $\|x - a\|_\infty < R$. On a alors*

$$B(x, R - \|x - a\|_\infty) \subset B(a, R),$$

car d'après l'inégalité triangulaire pour $y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$y \in B(x, R - \|x - a\|_\infty) \Rightarrow \|y - x\|_\infty < R - \|x - a\|_\infty \Rightarrow \|y - a\|_\infty \leq \|y - x\|_\infty + \|x - a\|_\infty < R.$$

Ceci prouve bien que $B(a, R)$ est un ouvert.
En particulier en dimension 1, les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont bien des ouverts au sens de la définition précédente.

- *La boule fermée de centre 0 et de rayon $R > 0$ n'est pas ouverte ! En effet, si x est tel que $\|x\|_\infty = R$, alors on ne peut pas trouver de $\delta > 0$ tel que $B(x,\delta) \subset \overline{B}(0,R)$.*
  Supposons qu'un tel $\delta > 0$ existe. On a alors
  $$\|(1+\frac{\delta}{2R})x - x\|_\infty \leq \frac{\delta}{2} < \delta,$$
  ce qui prouve que $(1+\frac{\delta}{2R})x \in B(x,\delta)$ et donc que $(1+\frac{\delta}{2R})x \in \overline{B}(0,R)$ ce qui signifie que
  $$(1+\frac{\delta}{2R})\underbrace{\|x\|_\infty}_{=R} \leq R,$$
  c'est une contradiction.
  Bien entendu, la même démonstration s'applique aux boules qui ne sont pas centrées en 0.

Proposition II.5

- *Toute réunion d'une famille quelconque (même infinie) d'ouverts est encore ouverte.*
- *Toute intersection* **finie** *d'ouverts est encore ouverte.*

Preuve :

- Soit $\mathcal{U}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^d$. On veut montrer que $A = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} B$ est un ouvert. Soit donc $x \in A$. Par définition de l'union, il existe au moins un $U \in \mathcal{U}$ tel que $x \in U$.
  Comme ce U est un ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $B(x,\delta) \subset U$, mais comme $U \subset A$, on a bien
  $$B(x,\delta) \subset A,$$
  ce qui montre que A est ouvert.
- Soit $U_1, \cdots, U_n$ un nombre fini d'ouverts de $\mathbb{R}^d$. On note $A = U_1 \cap \cdots \cap U_n$ et on veut montrer que A est ouvert.
  Soit $x \in A$. Pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, on a $x \in U_k$ et U_k est un ouvert donc il existe $\delta_k > 0$ tel que $B(x,\delta_k) \subset U_k$.
  On pose maintenant $\delta = \min(\delta_1,\ldots,\delta_n)$. On a bien $\delta > 0$ et de plus pour tout $1 \leq k \leq n$ on a
  $$B(x,\delta) \subset B(x,\delta_k) \subset U_k,$$
  et donc
  $$B(x,\delta) \subset U_1 \cap \cdots \cap U_n = A,$$
  ce qui montre bien que A est ouvert.

■

Exercice II.1

- *Tout ouvert A non vide de $\mathbb{R}^d$ peut s'écrire comme une réunion* **dénombrable** *de boules ouvertes. Autrement dit, il existe une famille dénombrable de boules ouvertes $(B_n)_n$ telles que*
  $$A = \bigcup_n B_n.$$
- *En dimension $d = 1$, tout ouvert non vide A peut s'écrire comme une réunion* **dénombrable** *d'intervalles ouverts disjoints.*

Remarque II.6

- *Il faut prendre garde au fait qu'une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert. Ainsi si on considère la famille dénombrable $(U_k)_{k\geq 1}$ d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ définis par*
$$U_k =]0, 1 + \frac{1}{k}[.$$
On peut alors calculer $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k =]0,1]$, qui n'est pas un intervalle ouvert !
- *Il faut aussi bien avoir en tête que l'union de deux ensembles qui ne sont pas ouverts peut être ouverte. Par exemple dans $\mathbb{R}$, la réunion de $A_1 = [0,1[$ et de $A_2 =]-1,0]$ (qui ne sont pas ouverts) est donnée par $A =]-1,1[$ qui est un ouvert !*

2 Parties fermées de $\mathbb{R}^d$

Définition II.7

Une partie $A \subset \mathbb{R}^d$ est dite **fermée** *si et seulement si son complémentaire $A^c = \mathbb{R} \setminus A$ est un ouvert.*

On a la caractérisation suivante, plus utile, des fermés.

Proposition II.8 (Caractérisation des fermés par les suites)

Une partie $A \subset \mathbb{R}^d$ est fermée si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de A qui converge on a $\lim_\infty x_n \in A$.

Preuve :

- Supposons que A est fermée. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de A qui converge vers une limite $l \in \mathbb{R}^d$. On veut montrer que $l \in A$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $l \notin A$. Ceci signifie que $l \in A^c$ et comme, par hypothèse, A^c est ouvert. Il existe $\delta > 0$ tel que $B(l,\delta) \subset A^c$.

  Or, par définition de la limite, il existe n assez grand tel que $\|x_n - l\|_\infty < \delta$ et donc $x_n \in B(l,\delta) \subset A^c$ et cela contredit le fait que $x_n \in A$. D'où le résultat.
- Supposons maintenant que toute suite d'éléments de A qui converge a sa limite dans A. On veut montrer que A est fermé, c'est-à-dire que A^c est ouvert.

  Supposons que A^c n'est pas ouvert. Il existe alors $x \in A^c$ tel qu'aucune boule $B(x,\delta)$ ne soit contenue dans A^c. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, la boule $B(x, \frac{1}{n})$ n'est pas contenue dans A^c, ce qui signifie qu'il existe au moins une élément $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$.

  Nous avons donc $\|x_n - x\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, ce qui montre que $(x_n)_n$ converge vers x. Par hypothèse, ceci implique que $x \in A$, ce qui est en contradiction avec le fait que $x \in A^c$.

■

Proposition II.9

1. *Toute réunion* **finie** *de fermés est un fermé.*
2. *Toute intersection quelconque d'une famille de fermés est fermée.*

Preuve :

1. Soient $F_1, \dots, F_k$ des fermés de $\mathbb{R}^d$. Montrons que $A = F_1 \cup \dots \cup F_k$ est encore fermé.
   On utilise la formule
   $$A^c = F_1^c \cap \dots \cap F_k^c,$$
   qui montre que A^c est une intersection finie d'ouverts, c'est donc un ouvert et donc A est un fermé.
2. De la même façon on utilise le fait que le complémentaire d'une intersection est l'union des complémentaires.

■

Remarque II.10

- *Il existe (beaucoup !) de parties de $\mathbb{R}^d$ qui ne sont ni ouvertes ni fermées. Par exemple en dimension 1 tous les intervalles semi-ouverts de la forme $[a, b[$ avec $-\infty < a < b < +\infty$ ne sont ni ouverts (à cause de la borne a), ni fermés (à cause de la borne b).*
- *Il existe seulement deux parties de $\mathbb{R}^d$ qui sont* **à la fois** *ouvertes et fermées : l'ensemble vide $\emptyset$ et $\mathbb{R}^d$ tout entier.*

Exercice II.2

Montrer que tout sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^d$ est fermé.

3 Intérieur - Adhérence - Frontière

Définition II.11

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ une partie quelconque de $\mathbb{R}^d$. On appelle **intérieur de** *A et on note $\overset{\circ}{A}$, l'ensemble défini par*

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in A,\ \exists \delta > 0,\ tq\ B(x, \delta) \subset A\}.$$

Proposition II.12

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$.

- *On a $\overset{\circ}{A} \subset A$ et de plus $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert.*
- *$\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.*
- *A est ouvert si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.*

Preuve :

- Le fait que $\overset{\circ}{A} \subset A$ est clair d'après la définition. Montrons que c'est un ouvert.
  Soit $x \in \overset{\circ}{A}$. Par définition, il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset A$. On va montrer qu'en fait $B(x, \delta) \subset \overset{\circ}{A}$.
  En effet, on a déjà vu que si $y \in B(x, \delta)$, alors
  $$B(y, \delta - \|y - x\|_\infty) \subset B(x, \delta) \subset A,$$
  ce qui prouve bien que $y \in \overset{\circ}{A}$.
- On veut montrer que $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A. Cela signifie que si U est un ouvert vérifiant $U \subset A$, alors $U \subset \overset{\circ}{A}$.
  Soit U un tel ouvert et $x \in U$. Comme U est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset U \subset A$. Par définition, cela montre que $x \in \overset{\circ}{A}$ et on a donc bien montré l'inclusion $U \subset \overset{\circ}{A}$.
- Ce dernier point est trivial d'après tout ce qui précède.

■

Remarque II.13

On déduit du résultat précédent que $\overset{\circ}{A}$ est la réunion de tous les ouverts contenus dans A.

Définition II.14

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ une partie quelconque de $\mathbb{R}^d$. On appelle **adhérence de** *A (on dit aussi* **fermeture***) et on note $\overline{A}$, l'ensemble des limites de suites d'éléments de A qui convergent.*

Proposition II.15

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$.

- *On a*
$$x \in \overline{A} \iff \forall \delta > 0, \ \ B(x,\delta) \cap A \neq \emptyset.$$
- *On a $A \subset \overline{A}$ et de plus $\overline{A}$ est fermé.*
- *$\overline{A}$ est le plus petit fermé qui contient A.*
- *A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.*

Preuve :

- Supposons que $x \in \overline{A}$ et donnons-nous $\delta > 0$. Par définition, il existe une suite $(x_n)_n$ de points de A qui converge vers x. Donc pour un n assez grand, on a à la fois $x_n \in A$ et $\|x_n - x\|_\infty < \delta$, ce qui prouve que $x_n \in B(x,\delta) \cap A$. Cet ensemble est donc bien non vide.
  Supposons maintenant que $B(x,\delta) \cap A$ est non vide pour tout $\delta > 0$. Alors, en particulier, pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Par construction $(x_n)_n$ est une suite de points de A et de plus, on a
$$\|x_n - x\|_\infty < \frac{1}{n}, \ \ \forall n \geq 1,$$
  ce qui montre que $(x_n)_n$ converge vers x. Par définition, cela implique que $x \in \overline{A}$.
- Soit $x \in A$. On considère la suite constante définie par $x_n = x$. Il s'agit bien d'une suite d'éléments de A qui converge (vers x bien sûr !), sa limite x est donc bien dans $\overline{A}$. Ceci prouve que $A \subset \overline{A}$.
  Montrons que $\overline{A}$ est fermé. On va utiliser la caractérisation des fermés par les suites. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\overline{A}$ qui converge vers un certain $x \in \mathbb{R}^d$. On veut montrer que $x \in \overline{A}$.
  Si les x_n étaient tous dans A, alors par définition on aurait bien que $x \in \overline{A}$. Or, ils ne sont pas nécessairement dans A mais seulement "proches" de A. On peut formaliser cela de la façon suivante :
$$\forall n \geq 1, \ \ \exists y_n \in A, \ \ \text{tel que } \ \|x_n - y_n\|_\infty < \frac{1}{n}.$$
  En effet, d'après le premier point de la proposition, pour tout $n \geq 1$, on a $B(x_n, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$.
  Mais alors $(y_n)_n$ est une suite de points de A et de plus, par l'inégalité triangulaire, on a
$$\|x - y_n\|_\infty \leq \|x - x_n\|_\infty + \|x_n - y_n\|_\infty \leq \|x - x_n\|_\infty + \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$
  et donc la suite $(y_n)_n$ tend vers x. Ceci prouve bien que $x \in \overline{A}$ et donc que $\overline{A}$ est bien un fermé.
- Soit F un fermé qui contient A : $A \subset F$. On veut montrer que $\overline{A} \subset F$. Soit donc $x \in \overline{A}$ et $(x_n)_n$ une suite de points de A qui converge vers x. Comme $A \subset F$, la suite $(x_n)_n$ est aussi une suite de points de F et donc, d'après la caractérisation des fermés par les suites, la limite x de cette suite est aussi dans F.
- Ce dernier point est trivial d'après ce qui précède.

■

Proposition II.16 (Quelques propriétés utiles)

- *Si $A \subset B$, alors on a $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.*
- *Pour toute partie A de $\mathbb{R}^d$, on a*
$$(\overline{A})^c = (\overset{\circ}{\widehat{A^c}}),$$
$$\left(\overset{\circ}{A}\right)^c = \overline{(A^c)}.$$

Preuve :

A faire en TD. ■

Définition II.17

Soit A une partie de $\mathbb{R}^d$. On appelle **frontière de** *A (on dit aussi* **bord***) et on note ∂A, l'ensemble défini par*

$$\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}.$$

Proposition II.18

Pour tout $A \subset \mathbb{R}^d$, ∂A est un fermé.

Preuve :

Par définition on a

$$\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap (\overset{\circ}{A})^c,$$

or $\overset{\circ}{A}$ est ouvert donc $\overset{\circ}{A}^{c}$ est fermé de même que $\overline{A}$. Ainsi ∂A est l'intersection de deux fermés, c'est bien un fermé. ■

Exercice II.3

Soit $a \in \mathbb{R}^d$ et $R > 0$. Déterminer l'intérieur, la fermeture et la frontière de la boule ouverte $B(a, R)$. Mêmes questions avec la boule fermée $\overline{B}(a, R)$.

Exercice II.4

Soit E un sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{R}^d$ (pensez à une droite ou à un plan en dimension $d = 3$ par exemple). Démontrer que $\overset{\circ}{E} = \emptyset$. On pourra considérer un vecteur $\xi \notin E$.

Chapitre III

Limites de fonctions en un point. Fonctions continues

1 Rappel pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

On rappelle tout d'abord la définition suivante que vous connaissez depuis votre tendre enfance.

Définition III.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une application et $a \in \overline{I}$. On dit que f admet $l \in \mathbb{R}$ pour limite en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \delta > 0, \ \ \forall x \in I, \ \ \textit{tq}\ |x-a| < \delta, \textit{on a}\ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

- *Si la limite existe, elle est unique.*
- *Si $a \in I$ et que la limite existe, elle vaut nécessairement $l = f(a)$, on dit alors que f est continue en a.*

Le fait de demander que $a \in \overline{I}$ est très naturel car si cette condition n'est pas vérifiée, il est impossible de "se rapprocher" de a en restant dans I. Autrement dit, il va exister un seuil $\delta > 0$ tel que

$$\text{Il n'existe aucun } x \in I \text{ tel que } |x - a| < \delta.$$

Dans ces conditions la propriété précédente serait toujours vraie, indépendamment de l, ce qui n'a évidemment aucun sens.

Remarque III.2

La limite de f en $a \in \overline{I}$ se note également $\lim_{x\to a} f(x)$ ou $\lim_a f$.
Quand $a \in I$, on peut également considérer la limite épointée de f en a, définie comme la limite en a de la restriction de f à $I \setminus \{a\}$. Cette dernière limite est alors notée $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$. On a alors

$$f \textit{ est continue en un point } a \in I \textit{ si et seulement si } \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = f(a).$$

La condition $a \in \overline{I \setminus \{a\}}$ (qui dit que a est un point d'accumulation de I, voir le devoir à la maison !) signifie qu'on veut pouvoir s'approcher de a en restant dans I et sans être jamais égal à a.

Pour comprendre ce que signifie cette hypothèse, on va plutôt essayer de comprendre sa contraposée. Supposons donc que $a \in \overline{I}$ mais que $a \notin \overline{I \setminus \{a\}}$. Cela implique en particulier que $a \in I$ et que, pour un certain $\delta > 0$, nous avons

$$x \in I, \ \text{et}\ |x - a| < \delta \Rightarrow x = a.$$

Autrement dit, a est le seul point de I dans la boule $B(a, \delta)$. On comprend bien alors pourquoi on ne peut pas considérer dans ce cas une limite épointée.

Remarque III.3 (non essentielle pour la suite)

On peut également considérer les limites à gauche et à droite de la façon suivante

- *Si* $a \in \overline{I \cap]-\infty, a[}$, *on définit la limite à gauche de* f *en* a *par la formule*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{a^-} f = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{a} f_{|I \cap]-\infty, a[}.$$

- *Si* $a \in \overline{I \cap]a, +\infty[}$, *on définit la limite à droite de* f *en* a *par la formule*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{a^+} f = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{a} f_{|I \cap]a, +\infty[}.$$

Si ces deux limites existent et sont égales alors la limite épointée de f *en* a *existe également et vaut la valeur commune de ces deux limites.*

Définition III.4

Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $f : I \mapsto \mathbb{R}$ *une application. On dit que* f *est continue sur* I *si elle est continue en tout point* $a \in I$.

Exemple III.5

- $I = \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{x}{|x|}$, *alors* f *est continue sur* I *mais n'admet pas de limite en* 0.
- $I = \mathbb{R}^*$, $f(x) = |x|x$, *alors* f *est continue sur* I *et admet* 0 *comme limite en* 0.
- $I =]0, 1]$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, *alors* f *est continue sur* I *et admet* 1 *comme limite en* 0.
- $I = [0, 1]$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$. *Alors* f *n'est pas continue en* 0, *elle n'admet pas de limite en* 0 *mais elle admet une limite épointée en* 0

$$\lim_{x \to 0} x \neq 0 \frac{\sin x}{x} = 1.$$

- $I =]0, 1]$, $f(x) = \sin(1/x)$, *alors* f *est continue sur* I *mais n'admet pas de limite en* 0.

2 Définitions pour les fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^p$

Dans la suite $p \geq 1$ est un entier.

Définition III.6

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ *une partie quelconque de* $\mathbb{R}^d$, $f : A \mapsto \mathbb{R}^p$ *une application et* $a \in \overline{A}$.
On dit que f *admet* $l \in \mathbb{R}^p$ *pour limite en* a *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \delta > 0, \ \ \forall x \in A, \ \ \textit{tq } \|x - a\|_\infty < \delta, \textit{on a } \|f(x) - l\|_\infty < \varepsilon.$$

- *Si la limite existe, elle est unique.*
- *Si* $a \in A$ *et que la limite existe, elle vaut nécessairement* $l = f(a)$, *on dit alors que* f *est continue en* a.

Définition III.7

Soit A *une partie de* $\mathbb{R}^d$ *et* $f : A \mapsto \mathbb{R}^p$ *une application. On dit que* f *est continue sur* A *si elle est continue en tout point* $a \in A$.

Remarque III.8

- *Dans cette définition, il y a deux normes l^∞ différentes qui sont utilisées : celle sur $\mathbb{R}^d$ et celle sur $\mathbb{R}^p$. Malgré que la notation soit la même il faut faire très attention aux objets en présence.*
- *D'après le théorème d'équivalence des normes en dimension finie (Théorème I.14), on obtient une définition* **équivalente**, *si on utilise n'importe quelle norme N sur $\mathbb{R}^d$ et n'importe quelle norme $\tilde{N}$ sur $\mathbb{R}^p$. Celle-ci devient*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \delta > 0,\ \ \forall x \in A,\ \text{tq } N(x-a) < \delta, \text{on a } \tilde{N}\big(f(x) - f(a)\big) < \varepsilon.$$

- *Parler de la limite d'une fonction f définie sur A en un point qui n'est pas adhérent à A n'a aucun sens car il n'y a aucune valeur de f connue près de ce point ...*

En réalité, comme on va le voir ci-dessous, toute l'étude des limites de fonctions à valeurs vectorielles peut se résumer à l'étude de fonctions à valeurs réelles. La difficulté de ce chapitre viendra plutôt du fait que le nombre de **variables** peut être plus grand que 1.

Lemme III.9

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^d$, $a \in \overline{A}$ et $l \in \mathbb{R}^p$. Soit $f : A \to \mathbb{R}^p$ une fonction. Nous avons l'équivalence suivante

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \ \ \Leftrightarrow \ \ \lim_{x \to a} \|f(x) - l\| = 0.$$

Théorème III.10 (des gendarmes, cas $p = 1$)

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}^d$, $a \in \overline{A}$, et $f, g_1, g_2 : A \to \mathbb{R}$ trois fonctions **à valeurs réelles** *vérifiant*

$$g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x),\ \ \forall x \in A.$$

On suppose que les limites $\lim_a g_1$ et $\lim_a g_2$ existent et sont égales. Alors la limite $\lim_a f$ existe et vaut la valeur commune des deux limites précédentes.

Remarque III.11

Dans le théorème précédent, il suffit que les inégalités aient lieu au voisinage de a, c'est-à-dire qu'il existe $R > 0$ tel que

$$g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x),\ \ \forall x \in A \cap B(a, R).$$

En effet, les valeurs de f, g_1 et g_2 en dehors de $A \cap B(a, R)$ n'ont aucune influence sur la limite en a de ces fonctions.

On utilise **très** souvent le corollaire suivant.

Corollaire III.12

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}^d$, $a \in \overline{A}$, $f : A \to \mathbb{R}^p$, $l \in \mathbb{R}^p$ et $g : A \to \mathbb{R}$. On suppose que

$$\|f(x) - l\| \leq g(x),\ \ \forall x \in A,$$

et que $\lim_a g = 0$.
Alors on a

$$\lim_a f = l.$$

Remarque III.13

Là encore il suffit que l'inégalité soit vérifiée au voisinage du point a. Voir la remarque III.11.

Notons pour terminer la petite propriété suivante que l'on utilise assez souvent (parfois même sans le dire)

Proposition III.14

Soit $f : A \to \mathbb{R}^p$ une fonction qui admet une limite en un point $a \in \overline{A}$, alors f est bornée au voisinage du point a. Cela signifie qu'il existe $R > 0$ et $M \geq 0$ tels que

$$\forall x \in A \cap B(a, R), \;\; \|f(x)\|_\infty \leq M.$$

Preuve :
Soit $l = \lim_a f$. On utilise la définition de la limite avec, par exemple, $\varepsilon = 1$. On en déduit l'existence d'un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in A, \;\; \|x - a\| < \delta \Rightarrow \; \|f(x) - l\|_\infty \leq \varepsilon = 1.$$

Si on pose $R = \delta$ et $M = 1 + \|l\|_\infty$, on a bien

$$\forall x \in A \cap B(a, R), \;\; \|f(x)\|_\infty \leq \|f(x) - l\|_\infty + \|l\|_\infty \leq 1 + \|l\|_\infty = M.$$

■

3 Caractérisations par les suites

Proposition III.15

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$, $f : A \to \mathbb{R}^p$, $a \in \overline{A}$ et $l \in \mathbb{R}^p$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. *f admet l comme limite en a.*
2. *Pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers a, on a*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l.$$

Preuve :

$1 \Rightarrow 2$ On utilise simplement les définitions.

$2 \Rightarrow 1$ C'est un raisonnement par l'absurde.

■

On utilise souvent cette caractérisation pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite par exemple en exhibant deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ convergeant vers a telles que $(f(x_n))_n$ et $(f(y_n))_n$ n'ont pas la même limite.

Corollaire III.16

f est continue sur A si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \subset A$ qui converge vers un point x de A, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x)$, ce que l'on résume en

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n \right).$$

Théorème III.17 (Critère de Cauchy pour les limites de fonctions)

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$, $f : A \mapsto \mathbb{R}^p$ une fonction et $a \in \overline{A}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *f admet une limite en a.*
2. *La propriété suivante est vérifiée :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \; \textit{tq} \; \forall x, y \in B(a, \delta) \cap A, \;\; \|f(x) - f(y)\|_\infty < \varepsilon. \qquad \text{(III.1)}$$

Preuve :

1. $\Rightarrow$ 2. Comme toujours, ce sens est évident et provient de l'inégalité triangulaire. Si l est la limite de f en a, on écrit

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq \|f(x) - l\|_\infty + \|l - f(a)\|_\infty,$$

et on utilise la définition de la limite.

2. $\Rightarrow$ 1. On va utiliser le critère de Cauchy pour les suites. Soit donc une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers a. Une telle suite existe par définition de l'adhérence de A.

En utilisant la propriété 2. et le fait que la suite $(x_n)_n$ converge vers a, on voit que la suite $(f(x_n))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}^p$. Cette suite admet donc une limite qu'on appelle l. On va montrer que l est bien la limite de la fonction f au point a.

D'après la proposition ci-dessus, il suffit de montrer que pour toute autre suite $(y_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $(f(y_n))_n$ converge également vers l.

D'après le raisonnement ci-dessus on sait déjà que la suite $(f(y_n))_n$ est convergente. On construit maintenant la suite z_n définie par

$$z_{2n} = x_n, \;\; z_{2n+1} = y_n.$$

Cette suite est également une suite d'éléments de A qui converge vers a et donc, par le même raisonnement $(f(z_n))_n$ est également convergente. Comme $(f(x_n))_n$ et $(f(y_n))_n$ sont toutes deux extraites de cette suite convergente, elles ont nécessairement la même limite.

Ceci démontre bien que l est la limite de la fonction f en a.

■

4 Opérations sur les fonctions continues

On admet les démonstrations de la plupart des résultats de cette section car ils s'obtiennent de façon similaire au cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en remplaçant la valeur absolue par la norme (le faire en exercice ! !).

Proposition III.18 (Sommes de deux fonctions continues)

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. Si $f : A \mapsto \mathbb{R}^p$ et $g : A \mapsto \mathbb{R}^p$ sont deux fonctions continues, alors l'application somme

$$f + g : x \in A \mapsto f(x) + g(x) \in \mathbb{R}^p,$$

est continue

Proposition III.19 (Produit de fonctions continues)

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. Si $\lambda : A \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction scalaire continue et $f : A \mapsto \mathbb{R}^p$ est une application continue, alors l'application produit

$$\lambda f : x \in A \mapsto \lambda(x) f(x) \in \mathbb{R}^p,$$

est continue.

Proposition III.20 (Quotient de fonctions continues)

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. Si $\lambda : A \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction scalaire continue et $f : A \mapsto \mathbb{R}^p$ est une application continue, alors :

- *Il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ tel que*

$$\{x \in \mathbb{R}^d, \;\; \lambda(x) \neq 0\} = U \cap A.$$

- *L'application quotient*

$$\frac{f}{\lambda} : x \in U \cap A \mapsto \frac{f(x)}{\lambda(x)} \in \mathbb{R}^p,$$

  est bien définie et continue sur $U \cap A$.

Preuve :
On va seulement démontrer l'existence de l'ouvert U.

- Soit $a \in A$ tel que $\lambda(a) \neq 0$. Montrons qu'il existe $\delta_a > 0$ (dépendant de a) tel que λ ne s'annulle pas sur $A \cap B(a, \delta_a)$.
  Pour cela, on pose $\varepsilon = \frac{1}{2}|\lambda(a)|$, et comme λ est continue, il existe bien un $\delta_a > 0$ tel que $\forall x \in A, \|x - a\|_\infty < \delta_a \Rightarrow |\lambda(x) - \lambda(a)| < \varepsilon$. Vérifions que ce δ_a vérifie la propriété souhaitée. En effet, si $x \in A \cap B(a, \delta_a)$ on a
  $$|\lambda(x)| = |\lambda(a) + \lambda(x) - \lambda(a)| \geq |\lambda(a)| - |\lambda(x) - \lambda(a)| \geq \frac{1}{2}|\lambda(a)| > 0,$$
  et donc λ ne s'annulle pas sur $B(a, \delta_a) \cap A$.
- Il suffit maintenant de prendre
  $$U = \bigcup_{a \in A} B(a, \delta_a),$$
  qui est bien un ouvert comme réunion (quelconque) de boules ouvertes.

■

Proposition III.21 (Composition de fonctions continues)

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$, et $f : A \mapsto \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^q$ deux fonctions continues, alors la composée
$$g \circ f : x \in A \mapsto g(f(x)) \in \mathbb{R}^q,$$
est continue.

5 Méthodologie

Remarque III.22 (Continuité le long de chemins)

Si $g : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^q$ est une fonction continue alors pour toute fonction continue $\gamma : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^p$, la composée $g \circ \gamma : I \mapsto \mathbb{R}^q$ est continue. L'application γ est appelée un **chemin** *dans $\mathbb{R}^p$ et on dit alors que g est continue le long des chemins.*
Cette remarque est souvent utilisée pour démontrer qu'une fonction g n'est pas continue ou n'admet pas de limite, ou encore pour intuiter la valeur d'une limite si on ne la connaît pas a priori.
L'idée est que l'on est plus à l'aise pour manipuler des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et qu'il ne faut pas se priver de s'y ramener si on le peut.

Exercice III.1

Etudier la continuité des applications suivantes définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par
$$f_1(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}, \quad f_2(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad f_3(x,y) = (x+y)\sin(1/x)\sin(1/y).$$
$$f_4(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^4}, \quad f_5(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$
$$f_6(x,y) = \frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2},$$
et qui prennent la valeur 0 en $(0,0)$.

Il faut remarquer qu'il existe des fonctions qui sont continues le long de toute droite passant par $(0,0)$ mais qui ne sont pas continues globalement (voir par exemple la fonction f_5) !

Remarque III.23

Il faut également se méfier des interversions de limites. Ainsi, pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, les trois quantités suivantes

$$l_1 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \quad l_2 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right), \ \text{ et } \ l_3 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right),$$

n'ont en général aucun lien entre elles.
On pourra par exemple considérer les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$f_1(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad f_3(x,y) = \frac{sin(x)}{y}, \quad f_4(x,y) = \frac{sin(y)}{x}.$$

Vérifier que :

- *Deux des trois limites ci-dessus peuvent exister sans que la troisième n'existe.*
- *L'une de ces limites peut exister mais pas les deux autres.*
- *Les limites l_2 et l_3 peuvent exister sans être égales.*

Démontrer néanmoins que si l_1 et l_2 existent, alors elles sont égales.

Pour démontrer qu'une fonction de plusieurs variables admet une limite l en un point, on commence par deviner la valeur possible de l en étudiant la limite de la fonction le long de chemins très simples (on prend souvent des droites par exemple). Si d'aventure la limite qu'on obtient dépend du chemin choisi alors on sait que la fonction n'admet pas de limite au point étudié.

En revanche, si on soupçonne l'existence de cette limite, on calcule la quantité $f(x,y) - l$ et on essaie de majorer $|f(x,y) - l|$ par une quantité la plus simple possible qui tend vers 0.

6 Quelques exemples fondamentaux

Proposition III.24

- *Les fonctions constantes sont continues.*
- *Les applications polynomiales (à plusieurs variables) sont continues.*

Définition III.25

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ et $f : A \mapsto \mathbb{R}^p$ une application. On dit que f est lipschitzienne sur A s'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall x, y \in A, \ \ \|f(x) - f(y)\|_\infty \leq K\|x-y\|_\infty.$$

Quand on veut préciser la valeur de la constante K, on dit que f est K-lipschitzienne.

Théorème III.26

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. Toute fonction lipschtizienne sur A est continue sur A.

Preuve :

Soit $a \in A$ et $\varepsilon > 0$, on pose $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. On a alors

$$\forall x \in A, \|x-a\|_\infty < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_\infty \leq K\delta < \varepsilon.$$

■

Corollaire III.27

L'application i-ième coordonnée $\varphi_i : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \varphi_i(x) = x_i$ est continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$.

Preuve :

Il suffit d'appliquer la définition de la norme infinie :

$$\forall a \in \mathbb{R}^d, \forall x \in \mathbb{R}^d, \text{ on a } |\varphi_i(x) - \varphi_i(a)| = |x_i - a_i| = |(x-a)_i| \leq \|x - a\|_\infty.$$

Ainsi φ_i est lipschitzienne et donc continue. ■

Si $f : A \subset \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^p$ est une application, on peut écrire f sous la forme

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix}, \ \forall x \in A,$$

où pour tout $1 \leq i \leq p$, $f_i : A \mapsto \mathbb{R}$ est la i-ième application coordonnée de f.

Si on note e_i le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x) e_i. \tag{III.2}$$

Proposition III.28

Une application $f : A \mapsto \mathbb{R}^p$ est continue si et seulement si pour tout $1 \leq i \leq p$, l'application f_i, i-ième coordonnée de f, est continue de A dans $\mathbb{R}$.

Preuve :

- Si on suppose que f est continue, on peut écrire $f_i = \varphi_i \circ f$ et comme φ_i est continue, par composition de fonctions continues, on obtient bien que f_i est continue.
- Si on suppose maintenant que toutes les f_i sont continues, alors d'après la formule (III.2), on voit que f est continue comme somme et produit de fonctions continues (les f_i et les fonctions constantes égales à e_i).

■

Corollaire III.29

Si N est une norme sur $\mathbb{R}^d$, alors N est une application continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$.

Preuve :

- Commençons par démontrer une première propriété utile. Tout élément $z \in \mathbb{R}^d$ s'écrit

  $$z = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i,$$

  de sorte que, par inégalité triangulaire et homogénéité, on a

  $$N(z) \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i| N(e_i) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} N(e_i) \right) \|z\|_\infty.$$

  On a donc obtenu l'existence d'une constante $C > 0$ qui ne dépend que de N telle que

  $$\forall z \in \mathbb{R}^d, \quad N(z) \leq C \|z\|_\infty. \tag{III.3}$$

- On a maintenant pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$N(x) = N(x - y + y) \leq N(x - y) + N(y),$$

et donc

$$N(x) - N(y) \leq N(x - y).$$

On peut échanger les rôles de x et y et ainsi obtenir

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y). \tag{III.4}$$

En utilisant l'inégalité (III.3), on trouve

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad |N(x) - N(y)| \leq C\|x - y\|_\infty.$$

Ceci implique que N est lipschitzienne et donc continue.

■

L'inégalité (III.4) démontrée ci-dessus est fort utile et parfois appelée **inégalité triangulaire inversée**. Il peut être bon de la retenir.

7 Propriétés topologiques associées à la continuité

A la lumière des définitions précédentes, on peut donner des caractérisations équivalentes, plus topologiques de la continuité des fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^p$.

Proposition III.30

Soit Ω un **ouvert** *de $\mathbb{R}^d$ et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^p$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *f est continue sur Ω.*
2. *Pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$, l'image réciproque $f^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.*

Preuve :

$1 \Rightarrow 2$ Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, on veut montrer que $f^{-1}(U)$ est ouvert. On raisonne par l'absurde en supposant que $f^{-1}(U)$ n'est pas ouvert. Il existe donc $a \in f^{-1}(U)$ tel qu'aucune boule ouverte $B(a, \delta)$ n'est incluse dans $f^{-1}(U)$. Tout d'abord, comme Ω est ouvert, il existe $\alpha > 0$ tel que $B(a, \alpha) \subset \Omega$. De plus, pour tout $n \geq 1$, nous avons

$$B(a, \frac{\alpha}{n}) \not\subset f^{-1}(U), \text{ et } B(a, \frac{\alpha}{n}) \subset \Omega.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n \in B(a, \frac{\alpha}{n}) \subset \Omega$ tel que $x_n \notin f^{-1}(U)$, c'est-à-dire $f(x_n) \notin U$, ou encore $f(x_n) \in U^c$.

Par construction, la suite $(x_n)_n$ est dans Ω et tend vers a et donc, comme on a supposé que f est continue, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$. Mais pour tout n, on a $f(x_n) \in U^c$ et U^c est un fermé, donc $f(a) \in U^c$. Ceci exprime que $a \notin f^{-1}(U)$. Ceci est absurde et prouve le résultat.

$2 \Rightarrow 1$ On veut montrer que f est continue sur Ω. Soit donc $a \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$. On pose $U = B(f(a), \varepsilon)$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Par hypothèse, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ qui contient a car $f(a) \in U$ par construction.

Par définition des ouverts, cela signifie qu'il existe $\delta > 0$ tel que $B(a, \delta) \subset f^{-1}(U)$. Cette assertion signifie exactement que

$$\forall x \in \Omega, \text{ tq } \|x - a\|_\infty < \delta, \text{ on a } \|f(x) - f(a)\|_\infty < \varepsilon.$$

■

De façon analogue on peut montrer que :

Exercice III.2

Soit A un **fermé** *de $\mathbb{R}^d$ et $f : A \mapsto \mathbb{R}^p$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *f est continue sur A.*
2. *Pour tout fermé $F \subset \mathbb{R}^p$, l'image réciproque $f^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}^d$.*

Ces deux résultats permettent aussi de montrer aisément que certains ensembles sont ouverts ou fermés.

Théorème III.31 (Prolongement par continuité)

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$, B une autre partie de $\mathbb{R}^d$ telle que $A \subset B \subset \overline{A}$ et enfin $f : A \mapsto \mathbb{R}^p$ une fonction continue sur A. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *Il existe une fonction $\tilde{f} : B \mapsto \mathbb{R}^p$* **continue** *sur B telle $\tilde{f}_{|A} = f$.*
2. *f admet une limite en tout point de B.*

Si ces propriétés sont vérifiées, la fonction $\tilde{f}$ vérifiant les propriétés du premier point est définie de façon unique. On l'appelle : **le prolongement par continuité de f sur B.**

Preuve :

1. $\Rightarrow$ 2. Soit $a \in B \subset \overline{A}$. Par définition de la continuité de $\tilde{f}$, on sait que $\tilde{f}$ admet une limite (qui vaut $\tilde{f}(a)$) en a. Cela signifie que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \delta > 0,\ \ \forall x \in B,\ \text{tq}\ \|x-a\|_\infty < \delta,\ \text{on a}\ \|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)\|_\infty < \varepsilon.$$

Mais comme $A \subset B$ et que la restriction de $\tilde{f}$ à A est égale à f, on déduit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \delta > 0,\ \ \forall x \in A,\ \text{tq}\ \|x-a\|_\infty < \delta,\ \text{on a}\ \|f(x) - \tilde{f}(a)\|_\infty < \varepsilon,$$

ce qui exprime bien que f admet une limite en a.

2. $\Rightarrow$ 1. Supposons que f admette une limite en tout point de B. On définit alors $\tilde{f}$ de la façon suivante :

– Pour tout $a \in A$, $\tilde{f}(a) = f(a)$.

– Pour tout $a \in B \setminus A$, $\tilde{f}(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

Soit $a \in B$ et $\varepsilon > 0$.

– Si $a \in A$. Comme f est continue sur A, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x-a\|_\infty < \delta$, on ait $\|f(x) - f(a)\|_\infty < \varepsilon$, ou encore $\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)\|_\infty < \varepsilon$, par définition du prolongement $\tilde{f}$.

– Si $a \in B\setminus A$. Comme $\tilde{f}(a)$ est la limite de f en a, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x-a\|_\infty < \delta$, on ait $\|f(x) - \tilde{f}(a)\|_\infty < \varepsilon$, ou encore $\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)\|_\infty < \varepsilon$, par définition du prolongement $\tilde{f}$.

En résumé, dans tous les cas on a obtenu

$$\forall x \in A,\ \|x-a\|_\infty < \delta \Rightarrow \|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)\|_\infty < \varepsilon.$$

Pour démontrer la continuité de $\tilde{f}$ sur B il faut montrer que cette propriété est encore vraie pour tout $x \in B$ et pas seulement dans A. Il reste donc à étudier la situation dans $B \setminus A$.

Soit donc $x \in B \setminus A$ tel que $\|x-a\|_\infty < \delta/2$. Comme $\tilde{f}(x)$ est la limite de f en x, il existe $\delta' > 0$ tel que $\forall y \in A, \|y-x\|_\infty < \delta' \Rightarrow \|\tilde{f}(x) - f(y)\|_\infty < \varepsilon$. Deplus, on peut toujours choisir $\delta' < \delta/2$.

Ainsi, comme x est dans $\overline{A}$, il existe un $y \in A$ tel que $\|y-x\|_\infty < \delta' < \delta/2$ et donc tel que $\|\tilde{f}(x) - f(y)\|_\infty < \varepsilon$. Mais alors on a

$$\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)\|_\infty \leq \underbrace{\|\tilde{f}(x) - f(y)\|_\infty}_{\leq\varepsilon} + \underbrace{\|f(y) - \tilde{f}(a)\|_\infty}_{\leq\varepsilon},$$

cette dernière inégalité étant due au fait que

$$\|y-a\|_\infty \leq \|y-x\|_\infty + \|x-a\|_\infty < \delta/2 + \delta/2 = \delta.$$

■

Proposition III.32

Toute fonction lipschitzienne sur un ensemble A se prolonge par continuité à $\overline{A}$.

Preuve :

Pour démontrer qu'une telle fonction f se prolonge par continuité à $\overline{A}$, il suffit de montrer que f admet une limite en tout point $a \in \overline{A} \setminus A$. Pour cela, on va utiliser le critère de Cauchy pour les fonctions (Théorème III.17).

Soit donc $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \frac{\varepsilon}{2K}$, de sorte que :

$$\forall x, y \in B(a, \delta), \text{ on a } \|x - y\|_\infty \leq \|x - a\|_\infty + \|y - a\|_\infty < 2\delta \leq \frac{\varepsilon}{K},$$

et donc, en utilisant le caractère Lipschitz de f, on a

$$\forall x, y \in B(a, \delta), \text{ on a} \|f(x) - f(y)\|_\infty \leq K\|x - y\|_\infty < \varepsilon,$$

ce qui montre bien que le critère de Cauchy pour f en a est vérifié et donc que f admet une limite en a. ■

8 Continuité des applications linéaires

8.1 Cadre général

Rappel : L'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^p$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $d \times p$, on le note $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$.

Théorème III.33

Toute application **linéaire** $u : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^p$ *est continue.*
De façon plus précise, il existe une constante $M > 0$ *(qui dépend de* u*) telle que*

$$\forall x \in R^d, \quad \|u(x)\|_\infty \leq M\|x\|_\infty. \tag{III.5}$$

En particulier, toute application linéaire est Lipschitzienne.

Preuve :

Il suffit de démontrer (III.5). En effet, dans ce cas, on obtient le caractère Lipschitz trivialement par linéarité de u

$$\|u(x) - u(y)\|_\infty = \|u(x - y)\|_\infty \leq M\|x - y\|_\infty, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^d,$$

et on en déduit la continuité.

Tout élément de $\mathbb{R}^d$ s'écrit sous la forme $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i$, et on a donc

$$\|u(x)\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^d x_i u(e_i) \right\|_\infty \leq \sum_{i=1}^d |x_i| \|u(e_i)\|_\infty \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^d \|u(e_i)\|_\infty \right)}_{=M} \|x\|_\infty,$$

ce qui démontre le résultat. ■

Remarque III.34

Comme d'habitude, ce résultat reste vrai si on prend n'importe quelle norme N_1 *sur* $\mathbb{R}^d$ *et n'importe quelle norme* N_2 *sur* $\mathbb{R}^p$*. Cela peut néanmoins changer la valeur de la constante* M*.*

Définition et proposition III.35

Il existe une plus petite valeur de M *pour laquelle* (III.5) *est vraie, on la note* $|||u|||$.
On a alors les formules suivantes

$$|||u||| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ \|x\|_\infty \leq 1}} \|u(x)\|_\infty = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

Remarque III.36

- *Il faut donc retenir que l'on a*
$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \|u(x)\|_\infty \leq |||u|||\ \|x\|_\infty,$$
et que $|||u|||$ est la plus petite valeur pour laquelle cette propriété est vraie.
- *Il faut également retenir que la notation $|||u|||$ peut être trompeuse car sa valeur dépend des normes considérées sur l'espace de départ et l'espace d'arrivée. En cas de confusions possibles, on pourra par exemple noter*
$$|||u|||_{N_1,N_2},$$
ou de toute autre façon permettant de lever toute ambiguité.

Preuve :

Notons S_1 et S_2, les deux supremum suivants

$$S_1 = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^d\\ \|x\|_\infty\leq 1}} \|u(x)\|_\infty,$$

$$S_2 = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^d\\ x\neq 0}} \frac{\|u(x)\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

On va montrer qu'ils sont bien définis, qu'ils sont égaux et qu'ils vérifient la propriété annoncée.

- On a vu qu'il existe un M tel que (III.5) soit vérifiée. On constate alors aisément que M majore les deux ensembles dont on souhaite prendre le supremum. Comme toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet un $\sup$, on a bien obtenu l'existence de S_1 et de S_2. De plus, M étant un majorant, nous avons
$$S_1 \leq M, \text{ et } S_2 \leq M,$$
et ce, pour toute valeur de M qui convient.
- Montrons que $S_1 = S_2$.
Pour tout x, vérifiant $\|x\|_\infty \leq 1$, on a
$$\|u(x)\|_\infty \leq \frac{\|u(x)\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq S_2,$$
et donc $S_1 \leq S_2$.
Maintenant, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$, on a
$$\frac{\|u(x)\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \left\| u\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right)\right\|_\infty \leq S_1,$$
car $x/\|x\|_\infty$ est de norme égale à 1. On a donc prouvé que $S_2 \leq S_1$, d'où le résultat.
- Par définition de S_2, il est clair que l'on a
$$\|u(x)\|_\infty \leq S_2 \|x\|_\infty,$$
et donc que $S_1 = S_2$ est bien la plus petite valeur qui vérifie cette propriété.

■

Théorème III.37

L'application $u \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p) \mapsto |||u|||$ est une norme sur l'espace vectoriel $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$.
Cette norme est dite associée *aux normes infinies sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^p$. Si on change les normes que l'on prend sur ces deux espaces, on change bien sûr la triple norme associée.*

Preuve :

Il nous faut vérifier les différentes propriétés d'une norme.

- Pour tout $u \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$, il est bien clair que $|||u|||$ est positif. De plus, si $|||u||| = 0$, cela signifie que $u(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et donc que $u = 0$.
- Soit maintenant $u \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$|||\lambda u||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\lambda u(x)\|_\infty}{\|x\|_\infty} = |\lambda| \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_\infty}{\|x\|_\infty} = |\lambda| |||u|||.$$

- Soient $u, v \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$ et $x \in \mathbb{R}^d$. Nous avons

$$\|u(x) + v(x)\|_\infty \leq \|u(x)\|_\infty + \|v(x)\|_\infty \leq |||u||| \|x\|_\infty + |||v||| \|x\|_\infty = (|||u||| + |||v|||) \|x\|_\infty,$$

comme $|||u + v|||$ est le plus petit réel vérifiant cette propriété, nous avons bien obtenu

$$|||u + v||| \leq |||u||| + |||v|||.$$

■

Exercice III.3

On considère les trois espaces $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ munis de leurs normes infinies respectives. Soient $u \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$ et $v \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$. Montrer que $u \circ v \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^q)$ et que l'on a

$$|||u \circ v||| \leq |||u||| \, |||v|||.$$

Exercice III.4

Soit $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit $A = (X - x_1) \cdots (X - x_k)$ avec $k < n$ un polynôme scindé à racines simples.

1. *Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Quelle est sa dimension ?*
2. *Vérifier que l'application*

$$N(P) = \sum_{i=1}^{k} |P(x_i)| + \sum_{i=k+1}^{n+1} |P^{(k)}(0)|,$$

   est une norme sur E.
3. *On considère l'application $f : E \mapsto E$ qui à tout polynôme P associe le reste R de la division euclidienne de P par A. Montrer que f est 1-lipschitzienne pour la norme N, en déduire que f est continue.*

8.2 Matrices et normes matricielles

Il existe un lien étroit entre matrices et applications linéaires. Rappelons-le ici.

Proposition III.38

Pour toute application linéaire $u \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$, il existe une unique matrice $A \in M_{p,d}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad u(x) = A.x.$$

Réciproquement, pour toute telle matrice A, il existe une unique application linéaire associée.

Rappelons que la matrice en question dépend implicitement de la base choisie (ici les bases canoniques de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^p$) et que si on change les bases, alors on change la matrice de u.

Définition et proposition III.39

L'application $|||\cdot|||_\infty$ *définie sur* $M_{p,d}(\mathbb{R})$ *par*

$$|||A|||_\infty = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^d \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty},$$

est une norme sur $M_{p,d}(\mathbb{R})$*, appelée* norme associée à la norme infinie.

Exercice III.5

On a la formule suivante

$$|||A|||_\infty = \sup_{1\leq i\leq p} \left(\sum_{j=1}^{d} |a_{i,j}|\right).$$

Chapitre IV

Compacité

Encore une fois, toutes les notions de ce paragraphe sont valables dans n'importe quel $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie.

1 Définition. Caractérisation. Premières propriétés

Définition IV.1

Soit A une partie quelconque de $\mathbb{R}^d$. On dit que A est compacte (ou que A est un compact) si : pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de A, on peut trouver au moins *une sous-suite (ou suite extraite) $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge* **vers un élément de** A.

Un compact est donc un ensemble dans lequel **toutes** les suites ont des bonnes propriétés de convergence, **à sous-suite près**.

Commençons par montrer quelques propriétés de base sur les compacts.

Proposition IV.2

Soit A un compact de $\mathbb{R}^d$. Si F est un fermé contenu dans A, alors F est compact.

Preuve :

Soit $(x_n)_n$ une suite quelconque d'éléments de F. Comme $F \subset A$, la suite $(x_n)_n$ est aussi une suite d'éléments de A. Par compacité de A, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ et un élement $l \in A$ tels que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers l.

Mais, par ailleurs, tous les $x_{\varphi(n)}$ sont dans le **fermé** F et donc leur limite l appartient nécessairement à F également. On a donc bien montré que F est compact. ■

Proposition IV.3

Soit A un compact de $\mathbb{R}^p$ et B un compact de $\mathbb{R}^q$, alors $A \times B$ est un compact de $\mathbb{R}^{p+q}$.

Preuve :

Soit $(x_n)_n$ une suite d'élements de $A \times B$. Par définition du produit cartésient, celle-ci s'écrit $x_n = (a_n, b_n)$ avec $a_n \in A$ et $b_n \in B$.

On considère la suite $(a_n)_n$, qui est une suite d'éléments de A. Comme A est supposé compact, il existe une sous-suite $(a_{\varphi(n)})_n$ et un élément $a \in A$ tels que $(a_{\varphi(n)})_n$ converge vers a.

Toute la subtilité consiste maintenant à considérer la suite $(b_{\varphi(n)})_n$ qui est une suite d'éléments du compact B. On peut donc trouver une nouvelle sous-suite $(b_{\varphi(\psi(n))})_n$ et un élément $b \in B$ tels que $(b_{\varphi(\psi(n))})_n$ converge vers b.

Comme, par ailleurs, $(a_{\varphi(\psi(n))})_n$ est une suite extraite de $(a_{\varphi(n)})_n$, elle converge vers a.

Ainsi, on a bien

$$x_{\varphi(\psi(n))} = (a_{\varphi(\psi(n))}, b_{\varphi(\psi(n))}) \xrightarrow[n\to\infty]{} (a, b),$$

c'est-à-dire qu'on a trouvé une sous-suite convergente de la suite $(x_n)_n$, ce qu'il fallait démontrer.

■

Proposition IV.4

1. *Tout intervalle fermé borné $[\alpha, \beta]$ est un compact de $\mathbb{R}$.*
2. *Tout intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$ est de la forme $I = [\alpha, \beta]$.*

Preuve :

1. Soit donc $(x_n)_n$ une suite de réels appartenant à $[\alpha, \beta]$.
   Pour tout $k \geq 0$, on note
   $$y_k = \sup_{n \geq k} x_n.$$
   Comme la suite $(x_n)_n$ est bornée, ce supremum est bien défini et vérifie $\alpha \leq y_k \leq \beta$ pour tout k.
   De plus, on a la propriété suivante
   $$\forall k \geq 0, \;\; y_{k+1} \leq y_k,$$
   car le premier supremum est pris sur un sous-ensemble du second.
   En conséquence, la suite $(y_k)_k$ est minorée et décroissante, elle est donc convergente et sa limite est égale à la borne inférieure de la suite que l'on note
   $$l = \inf_k (\sup_{n \geq k} x_n).$$
   - Par définition, on a $l \leq y_0 \sup_{n \geq 0} x_n$, il existe donc un indice noté $\varphi(1)$ tel que $x_{\varphi(1)} \geq l - 1$.
   - Supposons avoir contruit des indices $\varphi(1) < \varphi(2) < \cdots < \varphi(m)$ tels que
     $$\forall 1 \leq k \leq m, \;\; x_{\varphi(k)} \geq l - \frac{1}{k}.$$
     Par définition, on a $l \leq y_{\varphi(m)+1} = \sup_{n \geq \varphi(m)+1} x_n$ et il existe donc un indice noté $\varphi(m+1)$ tel que $\varphi(m+1) > \varphi(m)$ et tel que $x_{\varphi(m+1)} \geq l - \frac{1}{m+1}$.

   Grâce à cette construction, on a donc une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui vérifie
   $$\forall m \geq 1, \;\; x_{\varphi(m)} \geq l - \frac{1}{m}.$$
   Mais par ailleurs, on a
   $$x_{\varphi(m)} \leq \sup_{n \geq \varphi(m)} x_n = y_{\varphi(m)}.$$
   D'où
   $$\forall m \geq 1, \;\; y_{\varphi(m)} \geq x_{\varphi(m)} \geq l - \frac{1}{m}.$$
   Les deux quantités qui encadrent $x_{\varphi(m)}$ convergent vers la même limite l, ce qui prouve donc le résultat, par le théorème des gendarmes.
2. Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$. On note $\beta = \sup I$ et $\alpha = \inf I$ (ces deux bornes peuvent *a priori* être infinies, mais on va voir qu'il n'en est rien).
   Par définition de la borne supérieure d'un ensemble non vide, il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de I qui converge vers $\beta = \sup I$. Comme I est supposé compact, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers un élément de I. Ceci montre que, nécessairement, $\beta \in I$. En particulier, β est donc fini.
   De la même façon, on montre que $\alpha \in I$.
   Comme I est un intervalle, on a nécessairement $[\alpha, \beta] \subset I$.
   Mais par ailleurs, $\forall x \in I$, on a $\alpha \leq x \leq \beta$, c'est-à-dire $I \subset [\alpha, \beta]$.
   On a donc bien, finalement, l'égalité des deux ensembles $I = [\alpha, \beta]$.

∎

De tous les résultats précédents, on en déduit le résultat fondamental de ce paragraphe.

Théorème IV.5

Une partie A de $\mathbb{R}^d$ est compacte **si et seulement si** *elle est* bornée *et* fermée.

On rappelle qu'un ensemble est dit borné, s'il existe $R > 0$ tel que $A \subset B(0, R)$. On a également la caractérisation suivante

$$A \text{ est bornée} \iff \exists R > 0 \text{ tel que } A \subset [-R, R]^d.$$

Preuve :

- $\Rightarrow$ Supposons A compacte et montrons qu'elle est fermée et bornée. Pour montrer que A est fermée, on va montrer que $A = \overline{A}$. Comme on a toujours l'inclusion $A \subset \overline{A}$, il suffit de montrer l'inclusion inverse. Soit donc $l \in \overline{A}$.

  Par définition de l'adhérence, il existe donc une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers l. Mais, comme A est compacte, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge **vers un élément de** A ! Mais cette sous-suite converge aussi vers l, ce qui prouve que $l \in A$ et donc que A est fermé.

  Montrons maintenant que A est bornée. Supposons que ca ne soit pas le cas. Dans ce cas, on a

  $$\forall n \geq 1, \ \exists x_n \in A, \text{ tel que } \|x_n\|_\infty \geq n.$$

  Comme A est supposé compact, on peut trouver une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers un élément $l \in A$. Mais on a alors

  $$\|x_{\varphi(n)}\|_\infty \geq \varphi(n),$$

  or $\|x_{\varphi(n)}\|_\infty$ converge vers $\|l\|_\infty$ alors que $\varphi(n)$ tend vers l'infini, ce qui n'est pas possible !

- $\Leftarrow$ Comme A est borné, il existe $R > 0$ tel que $A \subset [-R, R]^d$. Or, $[-R, R]$ est un compact de $\mathbb{R}$ d'après la proposition IV.4 et donc $[-R, R]^d$ est un produit cartésien de compacts, c'est donc un compact de $\mathbb{R}^d$ d'après la proposition IV.3.

  Finalement A est un fermé (par hypothèse) contenu dans un compact, c'est donc un compact d'après la proposition IV.2.

■

S'en suivent des propriétés utiles et tout à fait triviales à démontrer :

Proposition IV.6

- *L'intersection d'un fermé et d'un compact est un compact.*
- *Toute union finie de compacts est compacte.*
- *Toute intersection* **quelconque** *de compacts est compacte.*
- *Si A est un ensemble borné quelconque, alors $\overline{A}$ est compact.*

Exemple IV.7

- *Les ensembles finis sont des compacts.*
- *Les boules fermées sont des compacts.*
- *Les sphères sont des compacts.*
- *Un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^d$ est compact si et seulement s'il est trivial $E = \{0\}$.*

2 Fonctions continues sur les compacts

Nous allons voir trois propriétés fondamentales des fonctions continues définies sur des compacts.

Théorème IV.8

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ et $f : A \mapsto \mathbb{R}^p$ une application continue.
Si A est un compact non vide, alors $f(A)$ est aussi un compact non vide.

Preuve :

Prenons une suite $(y_n)_n$ quelconque dans $f(A)$. Par définition de $f(A)$, pour tout $n \geq 0$, il existe $x_n \in A$ tel que $y_n = f(x_n)$.

La suite $(x_n)_n$ ainsi construite est une suite de points de A qui est compact par hypothèse. Il existe donc une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers une limite $l \in A$.

Mais alors, par continuité de f (caractérisation par les suites), on sait que la suite $(y_{\varphi(n)})_n = (f(x_{\varphi(n)}))_n$ converge vers $f(l)$ et comme $l \in A$, on a bien $f(l) \in f(A)$. On a donc bien montré l'existence d'une sous-dsuite de $(y_n)_n$ qui converge dans $f(A)$, ce qui prouve que $f(A)$ est bien un compact. ■

Le théorème qui suit est l'un des plus importants de l'analyse.

Théorème IV.9

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un compact non vide. Toute fonction continue $f : A \mapsto \mathbb{R}$ est **bornée** *et atteint ses deux bornes, c'est-à-dire qu'il existe $\underline{x} \in A$ et $\overline{x} \in A$ tels que*

$$f(\underline{x}) = \inf_A f = \min_A f,$$

$$f(\overline{x}) = \sup_A f = \max_A f.$$

Bien entendu, $\overline{x}$ et $\underline{x}$ ne sont pas uniques en général (si f est constante par exemple ...).

Preuve :

- Montrons tout d'abord que f est bornée sur A. Comme f est continue, et que A est compact, d'après le théorème précédent, on a vu que $f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$. Comme tout ensemble compact est borné, on en déduit que $f(A)$ est borné et donc que la fonction f est bornée sur A.
- Montrons maintenant que f atteint son maximum en un point de A. Le raisonnement pour le minimum serait identique (on peut aussi appliquer ce qui suit à $-f$).

  On note $M = \sup_A f$, qui est un nombre fini d'après ce qui précède. Par définition du supremum, pour tout $n \geq 1$, on peut trouver $x_n \in A$ tel que

  $$M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M. \tag{IV.1}$$

  Comme A est compacte, on peut extraire de $(x_n)_n$ une suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge dans A vers une limite notée $\overline{x} \in A$. Par continuité de f, on a $f(x_{\varphi(n)}) \to f(\overline{x})$ et donc d'après (IV.1), on obtient

  $$f(\overline{x}) = M = \sup_A f,$$

  ce qui prouve bien le résultat annoncé.

■

Exercice IV.1

Soit $u \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$ une application linéaire. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que

$$\|u(x_0)\|_\infty = |||u|||\, \|x_0\|_\infty.$$

Définition IV.10

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble quelconque et $f : A \mapsto \mathbb{R}^p$ une application définie sur A. On dit que f est uniformément continue sur A si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \ \forall x, y \in A,\ \ \|x - y\|_\infty \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Proposition IV.11

1. *Toute application uniformément continue sur A est continue sur A.*
2. *Toute application Lipschitzienne sur A est uniformément continue sur A.*

Les réciproques de ces implications sont fausses.

Preuve :

Les preuves (élémentaires) sont laissées en exercice.

Contentons-nous de donner des contre-exemples aux réciproques. L'application $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. L'application $x \in [0,1] \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,1]$ mais pas Lipschitzienne. ■

Le théorème fondamental de la fin de ce paragraphe est le résultat suivant :

Théorème IV.12 (de Heine)

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un **compact non vide**. *Toute application continue sur A est uniformément continue sur A.*

Preuve :

On va raisonner par l'absurde et supposer qu'une fonction f, continue sur A, n'est pas uniformément continue sur A. Il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x, y \in A$ vérifiant $\|x-y\|_\infty \leq \delta$ et $\|f(x) - f(y)\|_\infty > \varepsilon$.

Appliquons cette assertion pour $\delta = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Il existe donc $x_n, y_n \in A$ tels que

$$\|x_n - y_n\|_\infty \leq \frac{1}{n} \text{ et } \|f(x_n) - f(y_n)\|_\infty > \varepsilon.$$

Comme A est compact, on peut extraire des deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ des sous-suites convergentes notées $(x_{\varphi(n)})_n$ et $(y_{\varphi(n)})_n$ et dont les limites sont notées $\overline{x} \in A$ et $\overline{y} \in A$.

Par hypothèse, on a

$$\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\|_\infty \leq \frac{1}{\varphi(n)},$$

et donc en passant à la limite on trouve

$$\|\overline{x} - \overline{y}\|_\infty \leq 0,$$

ce qui prouve que $\overline{x} = \overline{y}$. Mais comme f est continue, on a aussi

$$\varepsilon \leq \|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\|_\infty \to \|f(\overline{x}) - f(\overline{x})\|_\infty = 0,$$

ce qui est absurde car $\varepsilon > 0$. ■

Exercice IV.2

- *Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est continue et admet des limites finies en $\pm\infty$, alors elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*
- *Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est continue et périodique : il existe $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors f est uniformément continue.*

Un exemple d'application du théorème de Heine à la convergence d'une méthode numérique de calcul des intégrales de fonctions continues sur des compacts. Cette méthode est appelée *méthode des rectangles à gauche* pour des raisons géométriques assez évidentes.

Théorème IV.13 (Convergence de la méthode des rectangles à gauche)

Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \geq 1$, on considère le découpage uniforme de l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \cdots, n-1$, définis par $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$.
Si on définit alors le nombre réel suivant

$$S_n^{RG}(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i),$$

on a la convergence suivante

$$S_n^{RG}(f) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Preuve :
Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur le compact $[a,b]$, le théorème de Heine nous dit qu'elle y est uniformément continue. Il existe donc un $\delta > 0$ tel que $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.
Choisisons ensuite un entier $n_0 \geq \frac{b-a}{\delta}$. Pour tout $n \geq n_0$ nous avons

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n^{RG}(f)\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f(x_i)\right|\\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x)-f(x_i)|\,dx\\ &\leq \varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} 1\,dx = (b-a)\varepsilon,\end{aligned}$$

car pour tout $i \in \{0,\cdots,n-1\}$, et tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$, on a $|x-x_i| \leq |x_{i+1}-x_i| \leq \frac{b-a}{n} \leq \delta$.
Ceci prouve le résultat. ∎

3 Equivalence des normes sur $\mathbb{R}^d$

On peut maintenant conclure le chapitre de Topologie par la démonstration du théorème fondamental que l'on a énoncé au début du chapitre.

Théorème IV.14 (Equivalence des normes en dimension finie)

Toutes les normes sur $\mathbb{R}^d$ sont équivalentes.
Autrement dit, pour toutes normes N_1 et N_2 définies sur $\mathbb{R}^d$, il existe $\underline{C} > 0$ et $\overline{C} > 0$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \underline{C}N_1(x) \leq N_2(x) \leq \overline{C}N_1(x).$$

Remarque IV.15

Ce théorème est valable dans n'importe quel $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de **dimension finie** *et s'énonce de la même façon : toutes les normes sur E son équivalentes.*

Preuve :
Il suffit de considérer le cas où N_1 est la norme infinie. En effet, si on démontre que tout norme N est équivalente à la norme infinie, alors deux normes quelconques seront aussi équivalentes en combinant les inégalités.
On va donc considérer $N_1 = \|\cdot\|_\infty$ et on note $N_2 = N$ pour simplifier l'écriture.

- On a déjà vu plus haut que la moitié de l'inégalité est vraie. En effet, on a

$$N(x) = N\left(\sum_{i=1}^d x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^d |x_i| N(e_i) \leq \left(\sum_{i=1}^d N(e_i)\right)\|x\|_\infty,$$

  et donc $\overline{C} = \sum_{i=1}^d N(e_i)$ convient.
- On a aussi vu plus haut (inégalité triangulaire inversée, etc ...) que l'application N est continue sur $\mathbb{R}^d$.
  De plus, on a vu que la sphère unité $S = \{x \in \mathbb{R}^d, \ \|x\|_\infty = 1\}$ est un compact non vide de $\mathbb{R}^d$. D'après le théorème fondamental sur les fonctions continues sur les compacts, on sait que N est bornée sur S et atteint ses bornes. Ce qui nous intéresse ici, c'est l'existence d'un $\underline{x} \in S$ en lequel N atteint son infimum

$$N(\underline{x}) = \inf_S N.$$

  Notons $\underline{C} = N(\underline{x})$. Par définition d'une norme, nous avons $\underline{C} > 0$ car si cette constante était nulle, cela impliquerait que $\underline{x} = 0$, ce qui n'est pas possible vu que $\underline{x} \in S$ (il est donc de norme infinie égale à 1).
  On a donc montré le résultat suivant

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \text{tel que } \|x\|_\infty = 1, \text{ on a } \underline{C} \leq N(x).$$

Prenons maintenant $x \in \mathbb{R}^d$ quelconque non nul, on peut appliquer l'inégalité précédente à $x/\|x\|_\infty$ qui est bien de norme 1. On trouve

$$\underline{C} \leq N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) = \frac{N(x)}{\|x\|_\infty},$$

et donc

$$\underline{C}\|x\|_\infty \leq N(x).$$

Ceci est donc vrai pour tout x non nul, mais également pour $x = 0$ de façon évidente, on a bien montré le résultat souhaité.

■

En conclusion de ce chapitre, il faut donc insister à nouveau sur le fait que, d'après le théorème précédent, toutes les définitions et les énoncés généraux dans lequel on fait intervenir la norme infinie, sont en réalité valables pour n'importe quel choix de normes sur $\mathbb{R}^d$ et même dans n'importe quel $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Il y a bien sûr un certain nombre de choses qui changent quand on change la norme : les boules et les sphères sont différentes, la valeur des normes $|||\cdot|||$ d'applications linéaires, etc ... Vous verrez en TD que le choix de la bonne norme peut parfois être crucial pour démontrer plus facilement certaines propriétés.