Devoir surveillé

18 Mars 2015 - Durée : 2h

Exercice 1. Questions de cours ou d'application immédiate du cours
Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

1. Soient $U_1, ..., U_n$ des ouverts non vides de $\mathbb{R}^d$. Démontrer que $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

   Donner un exemple montrant qu'une intersection infinie d'ouverts peut ne pas être un ouvert.
2. Donner la définition de la frontière ∂A d'une partie A de $\mathbb{R}^d$ et démontrer que c'est un fermé de $\mathbb{R}^d$.
3. Parmi les inclusions suivantes, lesquelles sont toujours vraies pour toutes parties A, B de $\mathbb{R}$?
$$\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B},$$
$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B},$$
   Justifier à chaque fois vos réponses (soit par une preuve soit par un contre-exmple le cas échéant)

Exercice 2. Un problème de point fixe
On considère une fonction $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ qui vérifie la propriété suivante : il existe un réel $k < 1$ tel que
$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq k\|x - y\|_\infty, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$
On dit que f est **contractante**.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ fixé. On définit par récurrence une suite $(x_n)_n$ par la formule
$$x_{n+1} = f(x_n), \quad \forall n \geq 0.$$

1. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, on a
$$\|x_{n+1} - x_n\|_\infty \leq k^n\|x_1 - x_0\|_\infty.$$
2. Démontrer que pour tout $n, p \geq 0$, on a
$$\|x_{n+p} - x_n\|_\infty \leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|_\infty.$$
3. En déduire que la suite $(x_n)_n$ converge. On note x^* sa limite.
4. Montrer que $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x^*)$ et en déduire que x^* est solution de l'équation suivante
$$f(x^*) = x^*. \tag{1}$$
5. Montrer que l'équation $f(x) = x$ n'a pas d'autre solution dans $\mathbb{R}^d$.

Exercice 3. Diamètre des parties bornées de $\mathbb{R}^d$
Dans tout cet exercice, on se donne une norme quelconque $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^d$. On rappelle qu'une partie $P \subset \mathbb{R}^d$ est bornée si et seulement si

$$\exists M \geq 0, \text{ tel que, pour tout } x \in P \text{ on a } \|x\| \leq M.$$

On définit alors le diamètre d'une partie bornée P de $\mathbb{R}^d$ par la formule

$$\mathrm{diam}(P) = \sup_{\substack{x \in P \\ y \in P}} \|x - y\|.$$

On fixe désormais une partie bornée A de $\mathbb{R}^d$.

1. Vérifier que l'on a $\mathrm{diam}(A) < +\infty$.
2. Montrer que $\mathring{A}$ est également bornée et vérifie $\mathrm{diam}(\mathring{A}) \leq \mathrm{diam}(A)$.
   Donner un exemple de partie A de $\mathbb{R}$ telle que $\mathrm{diam}(\mathring{A})$ n'est pas égal à $\mathrm{diam}(A)$.
3. Pour tout $\delta > 0$ on définit
   $$A_\delta = \bigcup_{x \in A} B(x, \delta).$$
   (a) Montrer que A_δ est bornée et vérifie $\mathrm{diam}(A_\delta) \leq \mathrm{diam}(A) + 2\delta$.
   (b) Montrer que $\overline{A} \subset A_\delta$, pour tout $\delta > 0$.
   En déduire que $\overline{A}$ est bornée et que $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A})$.
4. Montrer que ∂A est bornée et que $\mathrm{diam}(\partial A) \leq \mathrm{diam}(A)$.
5. **Question bonus :** Soient x, y deux points **distincts** quelconques de $\overline{A}$. On considère l'ensemble
   $$T = \{t \in [0, +\infty[, \text{ tel que } x + t(x - y) \in \overline{A}\}.$$
   (a) Démontrer que l'ensemble T est non vide et borné. On note $t^* = \sup T \in [0, +\infty[$.
   (b) Démontrer qu'il existe une suite $(t_n)_n \subset T$ telle que $t_n \xrightarrow[n \to \infty]{} t^*$ et en déduire que le point noté $X^* = x + t^*(x - y)$ vérifie
   $$X^* \in \overline{A}.$$
   (c) On suppose que $X^* \in \mathring{A}$. Montrer qu'il existe alors $\delta > 0$ tel que $x + (t^* + \delta)(x - y) \in A$.
   En quoi cela constitue-t'il une contradiction ?
   (d) On a donc finalement montré que $X^* \in \partial A$. De la même façon, on admet qu'on peut montrer qu'il existe $t_* \geq 0$ tel que $Y_* = y + t_*(y - x) \in \partial A$.
   Vérifier que $\|X^* - Y_*\| = (1 + t^* + t_*)\|x - y\|$ et en conclure que
   $$\mathrm{diam}(\partial A) = \mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A}).$$