2014-2015 **Topologie et fonctions de plusieurs variables**
Aix-Marseille Université **Licence MPCI, 2ème année**

Devoir surveillé - corrigé

18 Mars 2015 - Durée : 2h

Exercice 1. Questions de cours ou d'application immédiate du cours
Voir les notes de cours ou les TDs.

Exercice 2. Un problème de point fixe

1. Il s'agit de faire une récurrence sur n. Le cas $n = 0$ est évident car les deux membres de l'inégalité sont égaux. Supposons l'inégalité proposée vraie au rang n et écrivons, en utilisant l'hypothèse sur f, puis l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}\|x_{n+2} - x_{n+1}\|_\infty &= \|f(x_{n+1}) - f(x_n)\|_\infty \\ &\leq k\|x_{n+1} - x_n\|_\infty \\ &\leq kk^n\|x_1 - x_0\|_\infty \\ &= k^{n+1}\|x_1 - x_0\|_\infty.\end{aligned}$$

   Le résultat est prouvé.

2. On fixe $n \geq 0$ et $p \geq 1$ et on écrit la somme télescopique suivante

$$x_{n+p} - x_n = \sum_{i=1}^{p}(x_{n+i} - x_{n+i-1}).$$

   Si vous n'êtes pas convaincu par cette formule, elle se démontre par récurrence sur p.
   On prend alors la norme de cette égalité, puis on utilise l'inégalité triangulaire et le résultat de la question précédente pour obtenir

$$\begin{aligned}\|x_{n+p} - x_n\|_\infty &\leq \sum_{i=1}^{p} \|x_{n+i} - x_{n+i-1}\|_\infty \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{p} k^{n+i-1}\right)\|x_1 - x_0\|_\infty \\ &= \frac{k^n - k^{n+p}}{1-k}\|x_1 - x_0\|_\infty \\ &\leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|_\infty.\end{aligned}$$

   On a ici utilisé les calculs usuels de sommes partielles de séries géométriques.

3. La majoration précédente montre que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy. En effet, vu que $k < 1$ par hypothèse, on sait que la suite $k^n/(1-k)\|x_1 - x_0\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et donc si on se fixe un $\varepsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \geq 1$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|_\infty \leq \varepsilon.$$

   D'après la question précédente, cela implique que

$$\forall n \geq n_0, \forall p \geq 0, \quad \|x_{n+p} - x_n\|_\infty \leq \varepsilon.$$

   Le résultat est démontré.

4. On utilise l'hypothèse sur f qui montre en particulier que

$$\|f(x_n) - f(x^*)\|_\infty \leq k\|x_n - x^*\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

c'est-à-dire que $(f(x_n))_n$ tend vers $f(x^*)$.
Comme par ailleurs, on a l'égalité $x_{n+1} = f(x_n)$ et que la suite $(x_{n+1})_n$ est extraite de la suite $(x_n)_n$ et qu'à ce titre elle converge donc vers la même limite x^*, on peut passer à la limite dans l'égalité et obtenir

$$f(x^*) = x^*.$$

5. Supposons qu'il existe un autre point $\bar{x}$ tel que $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Par soustraction et en utilisant l'hypothèse sur f, on trouve

$$\begin{aligned}\|x^* - \bar{x}\|_\infty &= \|f(x^*) - f(\bar{x})\|_\infty \\ &\leq k\|x^* - \bar{x}\|_\infty.\end{aligned}$$

Comme $k < 1$, cette inégalité n'est possible que si $\|x^* - \bar{x}\|_\infty = 0$ c'est-à-dire si $x^* = \bar{x}$, ce qui montre bien l'unicité de la solution de l'équation proposée.

Exercice 3. Diamètre des parties bornées de $\mathbb{R}^d$

1. Soit M une borne des éléments de A comme dans la définition rappelée dans l'énoncé. Pour tous $x, y \in A$, nous avons par inégalité triangulaire

$$\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2M,$$

et donc $2M$ est un majorant de l'ensemble $\{\|x - y\|, \quad x, y \in A\}$. La borne supérieure de cet ensemble est donc bien finie (et vérifie $\mathrm{diam}(A) \leq 2M$).

2. On va en fait montrer que si B est un ensemble tel que $B \subset A$, alors il est borné et vérifie $\mathrm{diam}(B) \leq \mathrm{diam}(A)$. La première propriété est évidente (et la même valeur de M convient). La seconde est due à l'inclusion

$$\{\|x - y\|, \quad x \in B, y \in B\} \subset \{\|x - y\|, \quad x \in A, y \in A\},$$

qui se traduit en termes de bornes supérieures par l'inégalité

$$\mathrm{diam}(B) \leq \mathrm{diam}(A).$$

Comme $\mathring{A} \subset A$ pour tout ensemble A, nous en déduisons bien la propriété attendue.

Considérons par exemple l'ensemble $A = [0, 1] \cup \{2\}$ dont le diamètre vaut 2, alors que $\mathring{A} =]0, 1[$ a pour diamètre 1.

3. (a) Soit $y \in A_\delta$. Par définition, il existe $x \in A$ tel que $y \in B(x, \delta)$. Par inégalité triangulaire, on déduit

$$\|y\| = \|x + (y - x)\| \leq \|x\| + \|y - x\| \leq M + \delta.$$

Ainsi A_δ est bien une partie bornée.
De plus, si $y_1, y_2 \in A_\delta$, on peut trouver $x_1, x_2 \in A$ tels que $\|y_1 - x_1\| < \delta$, $\|y_2 - x_2\| < \delta$ et donc on a

$$\|y_1 - y_2\| = \|(y_1 - x_1) + (x_1 - x_2) + (x_2 - y_2)\| \leq \|y_1 - x_1\| + \|x_1 - x_2\| + \|x_2 - y_2\| \leq 2\delta + \|x_1 - x_2\|.$$

Comme x_1, x_2 sont dans A, on en déduit $\|y_1 - y_2\| \leq \mathrm{diam}(A) + 2\delta$. Cette inégalité étant vraie pour tous les éléments y_1, y_2 de A_δ, on peut prendre la borne supérieure et obtenir

$$\mathrm{diam}(A_\delta) \leq \mathrm{diam}(A) + 2\delta.$$

(b) On a vu en cours que pour tout $\delta > 0$ et tout $x \in \overline{A}$ on a $B(x,\delta) \cap A \neq \emptyset$. Cela signifie que

$$\forall x \in \overline{A}, \exists \tilde{x} \in A, \quad \text{tel que } \; x \in B(\tilde{x},\delta) \subset A_\delta.$$

D'après la propriété établie plus haut, cela implique que $\overline{A}$ est bornée et que son diamètre vérifie

$$\mathrm{diam}(\overline{A}) \leq \mathrm{diam}(A) + 2\delta,$$

et comme on a aussi $A \subset \overline{A}$ et donc $\mathrm{diam}(A) \leq \mathrm{diam}(\overline{A})$, on a finalement obtenu

$$\mathrm{diam}(A) \leq \mathrm{diam}(\overline{A}) \leq \mathrm{diam}(A) + 2\delta.$$

En passant à la limite quand $\delta \to 0$, on obtient le résultat attendu.

4. Comme $\partial A \subset \overline{A}$ le résultat est immédiat par le même raisonnement qu'à la question 2.
5. **Question bonus :** Soient x, y deux points **distincts** quelconques de $\overline{A}$. On considère l'ensemble

$$T = \{t \in [0,+\infty[, \text{ tel que } x + t(x-y) \in \overline{A}\}.$$

(a) Comme $x \in \overline{A}$, on a $0 \in T$ et T est donc bien non vide. Par ailleurs, pour tout $t \in T$, on a $x + t(x-y)$ et x qui sont dans $\overline{A}$ donc, par définition du diamètre nous avons

$$\mathrm{diam}(\overline{A}) \geq \|(x + t(x-y)) - x\| = t\|x-y\|.$$

Vu que $\|x-y\| \neq 0$, on peut écrire

$$\forall t \in T, \quad t \leq \frac{\mathrm{diam}(\overline{A})}{\|x-y\|},$$

ce qui prouve à l'évidence que T est borné.

(b) Pour tout entier n on a $t^* - 1/n < t^*$ et donc $t^* - 1/n$ n'est pas un majorant de T (par définition de la borne supérieure). Il existe donc au moins un $t_n \in T$ tel que

$$t^* - \frac{1}{n} \leq t_n \leq t^*.$$

Par le théorème des gendarmes, on a bien que $t_n \to t^*$.
On note $X_n = x + t_n(x-y)$ qui, par construction, est un point de $\overline{A}$. Par ailleurs, on a

$$\|X^* - X_n\| = \|(x + t^*(x-y)) - (x + t_n(x-y))\| = |t^* - t_n|\|x-y\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Donc $X^* = \lim_{n\to\infty} X_n$ et comme les $(X_n)_n$ sont dans $\overline{A}$ qui est fermé, on en déduit que $X^* \in \overline{A}$.

(c) On suppose que $X^* \in \mathring{A}$, ce qui signifie qu'il existe $r > 0$ tel que $B(X^*, r) \subset A$.
En particulier, si on pose $\delta = \frac{r}{\|x-y\|}$, on a bien

$$X^* + \delta(x-y) \in B(X^*, r) \subset A \subset \overline{A}.$$

Ceci s'écrit aussi

$$x + (t^* + \delta)(x-y) \in \overline{A},$$

et donc $t^* + \delta \in T$. Ceci est une contradiction car t^* est la borne supérieure de T.
On déduit de tout cela que $X^* \in \overline{A}$ et que $X^* \notin \mathring{A}$, ce qui montre que $X^* \in \partial A$.

(d) Un simple calcul montre que

$$\|X^*-Y_*\| = \|(x+t^*(x-y))-(y+t_*(y-x))\| = \|(1+t^*+t_*)(x-y)\| = (1+t^*+t_*)\|x-y\|.$$

En particulier, on obtient

$$\|x-y\| \leq (1+t^*+t_*)\|x-y\| = \|X^*-Y_*\| \leq \mathrm{diam}(\partial A),$$

cette dernière inégalité étant due au fait que X^* et Y_* sont, par construction, dans la frontière de A.
En conclusion, on a montré que pour tous points $x, y \in \overline{A}$, on a

$$\|x-y\| \leq \mathrm{diam}(\partial A),$$

le cas où $x = y$ étant trivial.
Par passage à la borne supérieure, on obtient

$$\mathrm{diam}(\overline{A}) \leq \mathrm{diam}(\partial A).$$

L'inégalité inverse ayant été obtenue précédemment, on a bien finalement montré l'inégalité.