2014-2015
Aix-Marseille Université

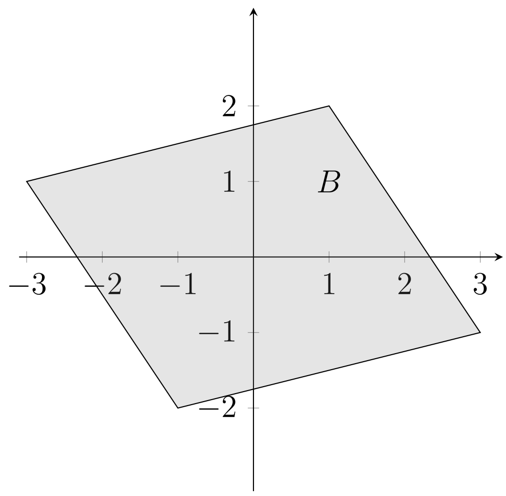
Topologie et fonctions de plusieurs variables
Licence MPCI, 2ème année

Devoir à la maison

à rendre le 9 Mars 2015

Exercice 1. Normes et boules

1. Montrer que l'application
$$x \in \mathbb{R}^3 \mapsto N(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + |x_3|,$$
est une norme sur $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que l'application
$$x \in \mathbb{R}^2 \mapsto N(x) = \max(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, |x_1 - 2x_2|),$$
est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessiner avec soin la boule unité associée $B_N(0,1)$. On justifiera brièvement la construction.
3. Déterminer une norme N sur $\mathbb{R}^2$ telle que l'ensemble B ci-dessous soit la boule unité associée à N.



Exercice 2. Points d'accumulation d'un ensemble

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. On dit qu'un point $a \in \mathbb{R}^d$ est un **point d'accumulation** de A s'il vérifie
$$a \in \overline{A \setminus \{a\}}.$$
L'ensemble des points d'accumulation de A est noté $\mathrm{Acc}(A)$.

1. **Préliminaire :** Soit P une partie quelconque de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, montrer que
$$x \in \overline{P} \iff \forall \delta > 0, \quad P \cap B(x,\delta) \neq \emptyset.$$
2. Montrer que
$$\overline{A} \setminus A \subset \mathrm{Acc}(A) \subset \overline{A}.$$

3. On souhaite montrer dans cette question que $\mathrm{Acc}(A)$ est un fermé de $\mathbb{R}^d$.
Soit $x \in \mathbb{R}^d$ tel qu'il existe une suite $(x_n)_n$ de points de $\mathrm{Acc}(A)$ qui converge vers x. Il faut montrer que $x \in \mathrm{Acc}(A)$.
   (a) On suppose qu'il existe (au moins un) $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} = x$. Conclure.
   (b) On suppose maintenant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \neq x$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in A$ tel que
$$\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{2}\|x_n - x\|.$$
   (c) Montrer que $(y_n)_n$ converge vers x et que $y_n \in A \setminus \{x\}$. Conclure.
4. On suppose dorénavant que $d = 1$. Déterminer l'ensemble des points d'accumulation des trois ensembles suivants
$$A_1 = \{0, \pi, 2\pi\}, \quad A_2 = [0, 1[, \quad A_3 = \mathbb{Q}.$$
5. On considère maintenant $A = \{1/p, \quad p \in \mathbb{N}^*\}$. On rappelle qu'on a vu en TD que l'on a
$$\overline{A} = \{0\} \cup \{1/p, \quad p \in \mathbb{N}^*\}.$$
Montrer que $\mathrm{Acc}(A) = \{0\}$.
6. **QUESTION BONUS :** On considère le cas $A = \{1/p + 1/q, \quad p, q \in \mathbb{N}^*\}$. On va montrer ici que
$$\mathrm{Acc}(A) = \{0\} \cup \{1/n, \quad n \in \mathbb{N}^*\}.$$
   (a) Montrer tout d'abord, en utilisant la définition de $\mathrm{Acc}(A)$ que
$$\{0\} \cup \{1/n, \quad n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathrm{Acc}(A).$$
   (b) Pour montrer l'inclusion inverse, on se donne un point $x \in \mathrm{Acc}(A)$. On suppose $x \neq 0$.
Par définition, il existe donc deux suites $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$ **d'entiers non nuls** telles que
$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n} \neq x,$$
$$\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x.$$
      i. On suppose que $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$ sont bornées. Montrer qu'il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telles que les sous-suites $(p_{\phi(n)})_n$ et $(q_{\phi(n)})_n$ sont constantes. Aboutir à une contradiction.
      ii. D'après la question précédente, on peut supposer, par exemple, que la suite $(p_n)_n$ n'est pas bornée. Il existe donc une sous-suite $(p_{\phi(n)})_n$ telle que
$$p_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$
Montrer que la suite $(q_{\phi(n)})_n$ converge vers un entier $q \geq 1$ et que $x = 1/q$. Conclure.