

Agrégation Externe de Mathématiques

Equations différentielles ordinaires

Franck Boyer

e-mail : `franck.boyer@univ-amu.fr`

Aix-Marseille Université

19 octobre 2017

Table des matières

I	Théorie des équations différentielles	1
1	Définitions de base	2
2	Théorie de Cauchy-Lipschitz	4
2.1	Le problème de Cauchy : définition et énoncé du théorème principal	4
2.2	Démonstrations du théorème de Cauchy-Lipschitz	5
2.3	Premières conséquences du théorème de Cauchy-Lipschitz	10
2.4	Explosion en temps fini	11
2.5	Sortie de tout compact	12
2.6	Preuve directe du théorème de Cauchy-Lipschitz global	13
2.7	Dépendance par rapports aux données	14
3	La théorie des équations différentielles linéaires	16
3.1	Le cas général	16
3.2	Le cas à coefficients constants, sans second membre	17
3.3	Résolvante. Formule de Duhamel	20
4	Petit bestiaire	25
5	Etude des systèmes autonomes	26
5.1	Portrait de phase	26
5.2	Stabilité des points d'équilibre	27
6	Les équations d'ordre supérieur	28
II	Les méthodes numériques à un pas	31
1	La méthode d'Euler explicite	31
1.1	Définition et analyse de l'erreur	31
1.2	A propos de la stabilité	32
2	La méthode d'Euler implicite	33
2.1	Définition et analyse de l'erreur	33
2.2	A propos de la stabilité	34
2.3	Un petit tour vers l'équation de la chaleur	34
3	Quelques mots sur la théorie générale des méthodes à un pas	35
3.1	Introduction	35
3.2	Erreur de consistance	35
3.3	Stabilité	37
3.4	Convergence	37
3.5	Exemples d'autres méthodes	38
4	Compléments	38
4.1	Equations d'ordre supérieur	38
III	Exercices	41
	Bibliographie	71

Chapitre I

Théorie des équations différentielles

Dans toute la première partie de ce chapitre, on va se concentrer sur les équations du premier ordre. Les équations d'ordre supérieur seront évoquées par la suite.

En introduction nous pouvons motiver cette étude par les quelques exemples suivants, issus de la modélisation en dynamique des populations.

- Modèle de Malthus : Il s'agit de dire que la population totale $t \mapsto N(t)$ évolue seulement au gré des naissances (taux $b > 0$ par unité de temps) et des décès (taux $d > 0$ par unité de temps). On obtient l'équation différentielle

$$N'(t) = (b - d)N(t).$$

Celle-ci peut s'intégrer à vue, ce qui donne

$$N(t) = N_0 e^{(b-d)t}, \quad \forall t > 0.$$

Son comportement dépend donc du signe de $b - d$, ce qui est intuitivement clair :

- Si $b > d$, les naissances sont prépondérantes sur les décès et la population croît exponentiellement au cours du temps.
- Si $b < d$, c'est le phénomène inverse et la population décroît exponentiellement.
- Si $b = d$, on a un équilibre parfait.

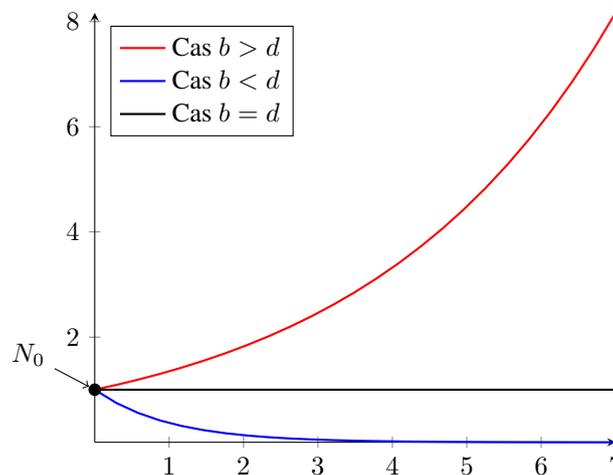


FIGURE I.1 – Le modèle de Malthus

- Modèle logistique : Le modèle de Malthus a le défaut de ne pas prévoir de limitation dans la capacité d'extension de la population. Or, on comprend bien que ce phénomène peut avoir une importance cruciale, par exemple si on imagine que les ressources en nourriture disponibles sont limitées par exemple. C'est pourquoi le modèle malthusien a été modifié de la façon suivante

$$N'(t) = (b - d)N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right).$$

Le paramètre $K > 0$ modélise la taille critique de la population considérée. On peut comprendre ce nouveau modèle à partir du modèle de Malthus de plusieurs façons.

- Ou bien on voit le facteur $(1 - N/K)$ comme un correctif au taux global d'évolution $b - d$ qui a tendance à diminuer plus N augmente
- Ou bien, en développant on voit le nouveau terme dans l'équation

$$-\frac{b-d}{K}N^2,$$

comme un terme de compétition qui modélise le fait que quand N est grand les individus de l'espèce considérée ont tendance à lutter pour les ressources et ce de façon d'autant plus importante que leur probabilité de rencontre est élevée (celle-ci étant proportionnelle au carré de N).

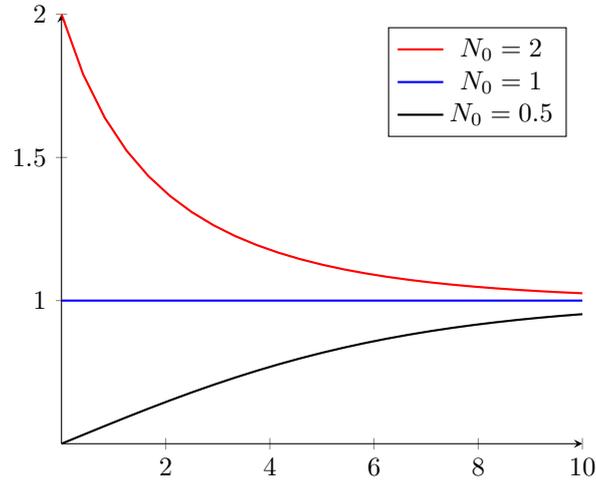


FIGURE I.2 – Le modèle logistique

On observe dans ce cas que toutes les solutions semblent converger en temps long vers la valeur K (qu'on a pris égal à 1 dans cette figure).

- Le modèle de Lotka-Volterra. Ce modèle met en jeu deux espèces : les proies (dont la population à l'instant t est notée $x(t)$) et les prédateurs (notés $y(t)$). On peut penser aux sardines et aux requins par exemple.

En l'absence de prédateurs, les proies se développent selon une loi de type Malthus (on suppose qu'elles disposent de nourriture en quantité illimitée). En l'absence de proies, les prédateurs ont tendance à disparaître selon une loi de type Malthus à taux négatif. Il faut maintenant modéliser le fait que les "rencontres" proies-prédateurs donnent lieu à la disparition de proies mangées par les prédateurs, ce qui participe à la survie des prédateurs. Mathématiquement, le nombre moyen de telles rencontres par unité de temps est proportionnel au produit des deux populations concernées et chacune de ces rencontres contribue positivement à l'évolution de y et négativement à l'évolution de x . On obtient le système suivant

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t), \\ y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t). \end{cases}$$

On peut montrer que les solutions de ce système (on trace ici la courbe $t \mapsto (x(t), y(t))$ dans le plan x/y appelé **plan de phases**) ont l'allure donnée dans la figure suivante :

On observe un phénomène attendu de périodicité des solutions.

1 Définitions de base

Définition I.1.1

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $F : I \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ une application. On appelle **solution** de l'équation différentielle

$$y' = F(t, y), \tag{I.1}$$

tout couple (J, y) où $J \subset I$ est un sous-intervalle de I et y une fonction dérivable définie sur J telle que

$$\forall t \in J, \quad y'(t) = F(t, y(t)).$$

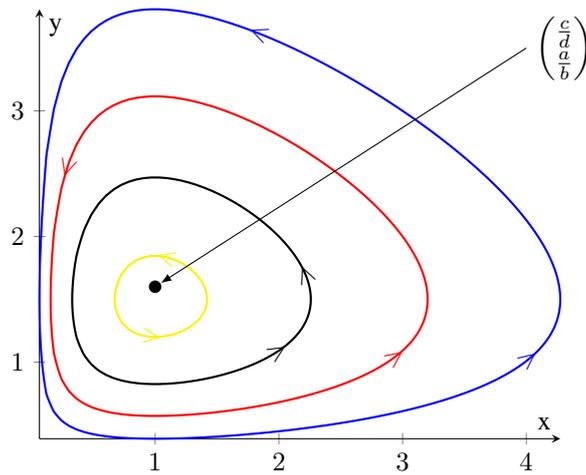


FIGURE I.3 – Portrait de phase pour le modèle de Lotka-Volterra

Remarque I.1.2

- Il est tout à fait possible de généraliser les définitions au cas où I n'est pas ouvert mais cela complexifie un peu les notations et nous ne le ferons pas ici.
- On peut tout à fait étendre ces définitions au cas où F est définie sur un ouvert quelconque de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.
- L'équation (I.1) est appelée du premier ordre car elle ne fait intervenir que les dérivées premières de la fonction inconnue.
- La forme la plus générale d'une équation différentielle est de la forme (dite non résolue)

$$F(t, y, y') = 0,$$

mais nous ne traiterons pas ce cas ici. Notons que le théorème des fonctions implicites, permet de se ramener au cas résolu dans un certain nombre de situations courantes (mais pas toutes!).

Dans le cas général, il est tout à fait possible que l'intervalle J ne soit pas égal à I et qu'on ne puisse pas faire mieux. La notion de solution maximale permet de donner un sens précis à "on ne peut pas faire mieux".

Définition I.1.3 (Solution maximale)

On dit que (J, y) est une solution maximale de (I.1) s'il n'existe pas de solution (\tilde{J}, \tilde{y}) vérifiant $J \subsetneq \tilde{J}$ et $\tilde{y}|_J = y$.

La figure I.4 illustre la notion de prolongement de solution : la solution (J_2, y_2) prolonge la solution (J_1, y_1) .

En utilisant le lemme de Zorn, on peut montrer le résultat suivant, sans aucune hypothèse sur l'équation considérée.

Proposition I.1.4

Pour toute solution (J, y) de (I.1), il existe **au moins une** solution maximale (\tilde{J}, \tilde{y}) qui prolonge (J, y) , c'est-à-dire telle que $J \subset \tilde{J}$ et $\tilde{y}|_J = y$.

Définition I.1.5

Toute solution (J, y) de (I.1) définie sur l'intervalle $J = I$ tout entier est dite **globale**.

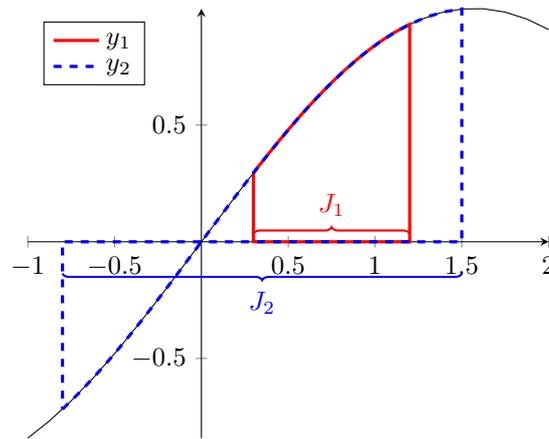


FIGURE I.4 – Notion de prolongement de solution et de solution maximale

2 Théorie de Cauchy-Lipschitz

2.1 Le problème de Cauchy : définition et énoncé du théorème principal

Il arrive qu'on ne recherche pas toutes les solutions d'une EDO mais seulement celles qui vérifient certaines conditions, dites *conditions initiales de Cauchy* ou tout simplement *conditions de Cauchy*.

Définition I.2.6 (Problème de Cauchy)

Soit $F : I \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}^d$. On appelle *solution* (resp. *solution maximale*) du problème de Cauchy associé à la donnée (t_0, y_0) toute solution (J, y) (resp. *solution maximale*) de $y' = F(t, y)$ vérifiant de plus

$$t_0 \in J, \text{ et } y(t_0) = y_0.$$

Le théorème **fondamental** de ce chapitre est le suivant

Théorème I.2.7 (Cauchy-Lipschitz, forme faible)

Si la fonction $F : I \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ est de classe C^1 alors pour toute donnée de Cauchy $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^d$, il existe un intervalle $J \subset I$ contenant t_0 tel qu'il existe dans J une unique solution du problème de Cauchy associé. En particulier, pour toute telle donnée, il existe une unique solution maximale associée et toute autre solution vérifiant la condition de Cauchy est une restriction de cette solution maximale.

En réalité, ce théorème est encore vrai sous des hypothèses plus faibles.

Définition I.2.8

Une fonction continue $F : I \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ est dite **localement Lipschitzienne** par rapport à la variable d'état (ou à la seconde variable). Si pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^d$, il existe $C_{t_0, y_0} > 0$ et un voisinage U de (t_0, y_0) dans $I \times \mathbb{R}^d$ tel que

$$\forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d, \text{ tels que } (t, y_1) \in U \text{ et } (t, y_2) \in U, \\ \text{ on a } \|F(t, y_1) - F(t, y_2)\| \leq C_{t_0, y_0} \|y_1 - y_2\|. \quad (\text{I.2})$$

Remarque I.2.9

Si F est continue et localement Lipschitzienne par rapport à la variable d'état alors elle est Lipschitzienne par rapport à la variable d'état sur tout compact. Plus précisément cela signifie que pour tout compact $K \subset I \times \mathbb{R}^d$ il existe une constants $C_K > 0$ telle que

$$\forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d, \text{ tels que } (t, y_1) \in K, (t, y_2) \in K, \text{ on a } \|F(t, y_1) - F(t, y_2)\| \leq C_K \|y_1 - y_2\|.$$

Ceci peut se démontrer, par exemple, par l'absurde.

Grâce au théorème des accroissements finis, on vérifie que toute fonction de classe \mathcal{C}^1 est localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. C'est pourquoi le théorème suivant est bien plus fort que le précédent.

Théorème I.2.10 (Cauchy-Lipschitz, forme forte)

Le théorème de Cauchy-Lipschitz est encore vrai si F est continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état.

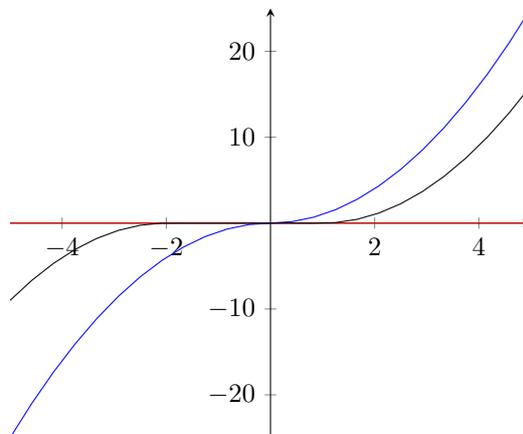
Ce(s) théorème(s) admet plusieurs démonstrations qu'il est peut être bon de connaître, ce sera l'objet du paragraphe suivant.

Remarque I.2.11

- La propriété d'existence de solutions maximales persiste sous la seule hypothèse de continuité de F (Théorème de Cauchy-Arzela).
- L'exemple canonique d'équation pour laquelle le problème de Cauchy n'a pas de solution unique est l'équation suivante

$$y' = 2\sqrt{|y|},$$

qui possède une infinité de solutions vérifiant $y(0) = 0$ dont la fonction identiquement nulle et la fonction $y(t) = |t|t$ (qui est bien de classe \mathcal{C}^1 !). Nous dessinons trois telles solutions dans la figure ci-dessous :

**2.2 Démonstrations du théorème de Cauchy-Lipschitz**

La démonstration de ce théorème peut se faire de plusieurs manières.

Elles partent toutes de la constatation que (J, y) est solution du problème de Cauchy si et seulement si $t_0 \in J$ et si y est une fonction continue sur J qui vérifie

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t F(s, y(s)) ds, \quad \forall t \in J. \quad (\text{I.3})$$

Il s'agit donc de résoudre l'équation intégrale (I.3) dans l'espace fonctionnel $\mathcal{C}^0(J, \mathbb{R}^d)$, c'est pourquoi il est naturel que les preuves du théorème utilisent de façon fondamentale les grands théorèmes de l'analyse fonctionnelle : ou bien le théorème d'Ascoli (méthode de compacité) ou bien le théorème du point fixe de Banach.

2.2.1 Le lemme de Gronwall

Un outil central dans tous les problèmes d'équations différentielles est le lemme de Gronwall qui permet de déduire des bornes sur les solutions à partir d'inégalité intégrales qu'elles vérifient.

Lemme I.2.12 (de Gronwall)

Soit $[a, b[\subset \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$ et z, φ deux fonctions continues sur $[a, b[$ à valeurs réelles. On suppose que

- φ est positive.
- L'inégalité suivante est vérifiée

$$z(t) \leq C + \int_a^t \varphi(s)z(s) ds, \quad \forall a \leq t < b.$$

Alors, on a l'estimation

$$z(t) \leq C \exp\left(\int_a^t \varphi(s) dt\right), \quad \forall a \leq t < b.$$

Preuve :

On pose

$$h(t) = C + \int_a^t \varphi(s)z(s) ds.$$

Comme φ et z sont continues, h est de classe \mathcal{C}^1 et on a

$$h'(t) = \varphi(t)z(t) \leq \varphi(t)h(t),$$

car φ est positive. On en déduit que la fonction $e^{-\int_a^t \varphi h(t)}$ est décroissante, ce qui fournit l'inégalité attendue. ■

2.2.2 Unicité

Dans le cas où f est localement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, on peut démontrer l'unicité d'une éventuelle solution en utilisant le Lemme de Gronwall.

En effet, soient (J_1, y_1) , (J_2, y_2) deux solutions du même problème de Cauchy en t_0 . On veut montrer que y_1 et y_2 sont égales sur $J_0 = J_1 \cap J_2$. Pour cela on introduit l'ensemble

$$S = \{t \in J_0, \text{ tel que } y_1(s) = y_2(s), \forall s \in [t_0, t]\},$$

où $[t_0, t]$ est remplacé par $[t, t_0]$ si $t < t_0$.

Cet ensemble est non vide car il contient t_0 (y_1 et y_2 vérifient la même donnée de Cauchy à l'instant t_0). On va montrer que $S \cap [t_0, +\infty[= J_0 \cap [t_0, +\infty[$ (la même idée montrerait l'égalité de $S \cap]-\infty, t_0]$ et de $J_0 \cap]-\infty, t_0]$).

Supposons que $S \cap [t_0, +\infty[\neq J_0 \cap [t_0, +\infty[$. On pose alors $t^* = \sup(S)$. On a $t^* \geq t_0$ et $t^* \in \overset{\circ}{J}_0$. En effet, si ce n'était pas le cas on aurait $t^* \in \partial J_0$ et alors $y_1 = y_2$ sur $[t_0, \sup J_0]$ et donc $y_1 = y_2$ sur $J_0 \cap [t_0, +\infty[$ par continuité de y_1 et y_2 . Ceci contredit l'hypothèse. Par ailleurs, par continuité de y_1 et y_2 , on sait que $y_1(t^*) = y_2(t^*) = \tilde{y}$.

Soit L une constante de Lipschitz de f sur le compact $K = [t^*, t^* + 1] \times \bar{B}(\tilde{y}, 1)$. Par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que $t^* + \delta \in J_0$ et tel que

$$y_i(t) \in \bar{B}(\tilde{y}, 1), \quad \forall t \in [t^*, t^* + \delta], \forall i = 1, 2.$$

Par ailleurs, comme y_1 et y_2 vérifient l'équation on a

$$y_i(t) = y_i(t^*) + \int_{t^*}^t F(s, y_i(s)) ds.$$

Par soustraction, on trouve

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq \int_{t^*}^t |F(s, y_1(s)) - F(s, y_2(s))| ds, \quad \forall t \in [t^*, t^* + \delta].$$

Comme y_1 et y_2 prennent leur valeurs dans K , on en déduit

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq L \int_{t^*}^t |y_1(s) - y_2(s)| ds, \quad \forall t \in [t^*, t^* + \delta].$$

Le lemme de Gronwall donne alors $y_1(t) = y_2(t)$ pour tout $t \in [t^*, t^* + \delta]$. Ceci montre que $t^* + \delta$ est dans S et contredit donc la définition de t^* .

Remarque I.2.13

Une variante de la preuve précédente consiste à introduire plutôt

$$S = \{t \in J_0, y_1(t) = y_2(t)\} = (y_1 - y_2)^{-1}(\{0\}),$$

et à constater que c'est un ensemble non vide ($t_0 \in S$), fermé (image réciproque d'un fermé par une application continue) et ouvert dans J_0 (en utilisant la même méthode que ci-dessus par Gronwall). Par connexité, on déduit que $S = J_0$.

2.2.3 Existence : la preuve par le théorème du point fixe

Soit $J = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ un intervalle inclus dans I (on rappelle qu'on a supposé que I est ouvert) contenant t_0 . On pose $y^0(t) = y_0$ pour tout $t \in J$ et on construit, par récurrence, la suite de fonctions

$$y^{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t F(s, y^n(s)) ds, \quad \forall t \in J.$$

Ceci revient à définir $y^{n+1} = \Phi(y^n)$ où $\Phi : \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R}^d) \mapsto \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R}^d)$ est l'application qui à y associe

$$\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t F(s, y(s)) ds, \quad \forall t \in J.$$

Résoudre l'équation (I.3) revient à trouver un point fixe de l'application Φ . Comme J est compact on peut munir $E = \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R}^d)$ de la norme infinie, ce qui en fait un espace complet. On peut donc espérer appliquer le théorème du point fixe de Banach à cette fonction. Pour cela, il faudrait montrer que Φ est contractante. Comme on ne possède aucune information globale sur F , il se peut que $\|F(s, y)\|$ soit très grand quand $\|y\|$ est grand et il y a donc aucune chance que nous arrivions à montrer que Φ est contractante sur E .

On va donc essayer d'appliquer le théorème sur le sous-espace fermé $F = \mathcal{C}^0(J, \bar{B}(y_0, R))$ de E (qui est donc bien complet). Pour cela, on peut jouer sur les paramètres α et R pour faire en sorte que $\Phi(F) \subset F$ et que Φ soit contractante.

- Fixons une valeur $\alpha_0 > 0$ et un nombre $R_0 > 0$ tels que le compact $K_0 = [t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0] \times \bar{B}(y_0, R_0)$ soit inclus dans l'ouvert U sur lequel (I.2) est vraie.
- On note maintenant $M = \sup_{[t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0] \times \bar{B}(y_0, R_0)} \|F\|$. Ainsi, pour toute fonction $y \in \mathcal{C}^0([t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0], \bar{B}(y_0, R_0))$ on a

$$\|\Phi(y)(t) - y_0\| \leq \left\| \int_{t_0}^t F(s, y(s)) ds \right\| \leq |t - t_0| M.$$

Si on veut s'assurer que $\Phi(y)(t)$ reste dans la boule $\bar{B}(y_0, R_0)$, il faut se restreindre à un intervalle $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ avec $0 < \alpha \leq \alpha_0$ choisi pour que

$$\alpha M \leq R_0. \tag{I.4}$$

Ainsi, l'espace $F_\alpha = \mathcal{C}^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \bar{B}(y_0, R_0))$ est laissé fixe par Φ dès que (I.4) est vérifiée.

- Essayons maintenant d'étudier le caractère contractant de Φ sur un tel espace. Soient $y, z \in F_\alpha$, on a

$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|F(s, y(s)) - F(s, z(s))\| ds \right| \leq C_{t_0, y_0} |t - t_0| \|y - z\|_\infty,$$

et donc

$$\|\Phi(y) - \Phi(z)\|_\infty \leq C_{t_0, y_0} \alpha \|y - z\|_\infty.$$

En conclusion, Φ sera contractante dès que

$$\alpha C_{t_0, y_0} < 1. \tag{I.5}$$

- En conclusion, on va choisir $0 < \alpha \leq \alpha_0$ qui satisfait (I.4) et (I.5), ce qui est bien entendu possible. La fonction Φ laisse alors invariant le sous-espace fermé $F_\alpha \subset E$ et elle est contractante dans cet espace.

D'après le théorème du point fixe de Banach, il existe donc une unique solution $y \in F_\alpha$ à l'équation (I.3) et ainsi $([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], y)$ est une solution du problème de Cauchy considéré. C'est également l'unique solution sur cet intervalle qui prend ses valeurs dans la boule $\bar{B}(y_0, R_0)$.

- Il reste à montrer que toute autre solution éventuelle z du problème de Cauchy définie sur un intervalle de la forme $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ avec $\beta \leq \alpha$ coïncide avec y .
 - Si z prend ses valeurs dans la boule $\bar{B}(y_0, R_0)$, alors la propriété d'unicité dans le théorème du point fixe donne le résultat.
 - Si z ne prend pas ses valeurs dans cette boule, on note $\tilde{\beta}$ le plus grand nombre dans $[0, \beta]$ tel que $z([t_0 - \tilde{\beta}, t_0 + \tilde{\beta}])$ est contenu dans cette boule. On a $\tilde{\beta} < \beta$ par hypothèse et $\tilde{\beta} > 0$ car $z(t_0) = y_0$ est dans l'intérieur de la boule et que z est continue.
- On a alors

$$\|z(t) - y_0\| \leq |t - t_0|M \leq \tilde{\beta}M < \beta M \leq \alpha M \leq R_0, \quad \forall t \in [t_0 - \tilde{\beta}, t_0 + \tilde{\beta}],$$

ce qui contredit la maximalité de $\tilde{\beta}$.

Remarque I.2.14

La méthode de point fixe ne permet pas réellement, en général, le calcul effectif des solutions (ou d'une approximation) des équations différentielles. Calculer, à titre d'exemple, les approximations successives par la méthode de Picard appliquée à la résolution du problème de Cauchy $y' = y$ et $y(0) = 1$.

2.2.4 Existence : la preuve via la méthode d'Euler

Pour montrer l'existence d'une solution sous la seule hypothèse que F est continue, on va prouver que l'approximation obtenue par la méthode d'Euler converge. On pourra se référer, par exemple, à [Dem91, page 133] bien que la preuve ci-dessous soit rédigée un peu différemment.

Pour simplifier un peu les notations, on va supposer que F est indépendant du temps t (cela ne change pas fondamentalement la preuve qui suit).

Soit M une borne de F sur le compact $\bar{B}(y_0, 1)$. On pose maintenant $T = \min(1, 1/M)$.

On fixe un nombre $N > 0$, on pose $\Delta t = T/N$, $t^n = t_0 + n\Delta t$, et on construit l'approximation d'Euler comme suit

$$\begin{cases} y^0 = y_0, \\ y^{n+1} = y^n + \Delta t F(y^n), \quad \forall n \in \{0, \dots, N-1\}. \end{cases}$$

- On vérifie aisément par récurrence que $y^n \in \bar{B}(y_0, 1)$ pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$.
- A l'aide de cette suite, on construit l'unique fonction continue affine par morceaux φ_N vérifiant (voir Figure I.5)

$$\varphi_N(t^n) = y^n, \quad \forall n \in \{0, \dots, N\},$$

et l'unique fonction constante par morceaux $\bar{\varphi}_N$ définie par

$$\bar{\varphi}_N(t) = y^n, \quad \forall t \in [t^n, t^{n+1}[.$$

On voit que φ_N est Lipschitzienne sur $[t_0, t_0 + T]$ et que $\text{Lip}(\varphi_N) \leq M$. De plus, les fonctions φ_N sont uniformément bornées sur $[t_0, t_0 + T]$.

Par ailleurs, par construction, nous avons (en regardant ce qui se passe sur chaque intervalle de longueur Δt)

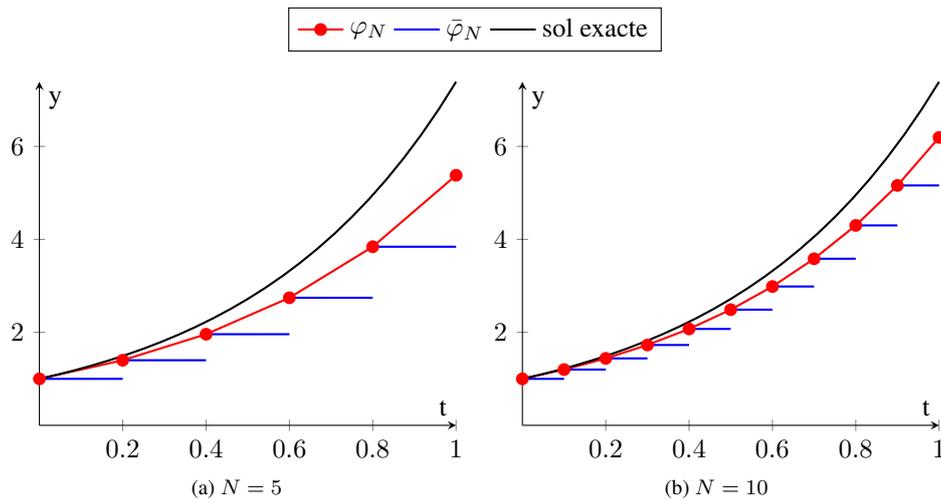
$$\|\varphi_N - \bar{\varphi}_N\|_\infty \leq M\Delta t = \frac{MT}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0. \quad (\text{I.6})$$

- La suite de fonctions $(\varphi_N)_N$ est donc bornée dans $\mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}^d)$ et également équiuniformément continue. On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli et obtenir l'existence d'une sous-suite $(\varphi_{N_k})_k$ qui converge uniformément vers une fonction continue $\varphi : [0, T] \times \mathbb{R}^d$.

D'après (I.6), on a également la convergence uniforme de la suite $(\bar{\varphi}_{N_k})_k$ vers **la même limite** φ .

Constatons maintenant que, par construction, φ_{N_k} et $\bar{\varphi}_{N_k}$ vérifient

$$\varphi_{N_k}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t F(\bar{\varphi}_{N_k}(s)) ds, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T]. \quad (\text{I.7})$$

FIGURE I.5 – Illustration de la méthode d'Euler explicite pour l'équation $y' = 2y$

On va chercher à passer à la limite dans (I.7) et ainsi prouver que la limite $\varphi \in C^0([0, T], \mathbb{R}^d)$ est bien solution de l'équation recherchée.

On note ω le module d'uniforme continuité de F sur le compact $[t_0, t_0 + 1] \times \bar{B}(y_0, 1)$. On a donc pour tout $s \in [t_0, t_0 + T]$

$$\|F(\bar{\varphi}_{N_k}(s)) - F(\varphi(s))\| \leq \omega(\|\bar{\varphi}_{N_k}(s) - \varphi(s)\|) \leq \omega(\|\bar{\varphi}_{N_k} - \varphi\|_\infty),$$

et donc

$$\|F \circ \bar{\varphi}_{N_k} - F \circ \varphi\|_\infty \leq \omega(\|\bar{\varphi}_{N_k} - \varphi\|_\infty) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui prouve que $F \circ \bar{\varphi}_{N_k}$ converge uniformément vers $F \circ \varphi$. On peut donc, à bon droit passer à la limite dans (I.7) ce qui montre φ vérifie

$$\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^t F(\varphi(s)) ds, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T],$$

et donc elle est bien solution du problème de Cauchy souhaité.

Au passage, on a donc démontré le

Théorème I.2.15 (Cauchy-Arzela-Peano)

Soit $F : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est continue. Alors pour tout couple $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^d$, il existe **au moins une** solution du problème de Cauchy associé.

On a également (presque) démontré le théorème suivant qui donne la convergence de la méthode d'Euler

Théorème I.2.16

Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, si $y : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une solution du problème de Cauchy considéré sur un temps T assez petit et $(y^n)_n$ la suite des itérées obtenues par la méthode d'Euler explicite associée à un pas de temps Δt , nous avons

$$\sup_{0 \leq n \leq T/\Delta t} \|y(t^n) - y^n\| \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0. \quad (\text{I.8})$$

Nous verrons dans le chapitre précédent que, sous certaines hypothèses supplémentaires, on peut estimer la taille de l'erreur comise entre la solution exacte et la solution approchée.

Preuve :

Rappelons que Δt est relié à N par la formule $\Delta t = T/N$ et que par ailleurs, comme $\varphi_N(t^n) = y^n$, on a

$$\sup_{0 \leq n \leq T/\Delta t} \|y(t^n) - y^n\| \leq \|\varphi_N - y\|_\infty. \quad (\text{I.9})$$

On a vu plus haut que $y = \varphi$, la limite uniforme de la sous-suite $(\varphi_{N_k})_k$. Le résultat sera donc prouvé si on montre que toute la suite $(\varphi_N)_N$ converge vers $\varphi = y$.

Il s'agit d'un raisonnement classique de compacité/unicité qui découle du lemme I.2.17 que l'on prouvera après.

Lemme I.2.17

Soit A un espace compact (disons dans un espace métrique pour fixer les idées) et $(x_n)_n$ une suite de points de A . On a alors l'équivalence

$$(x_n)_n \text{ converge dans } A \Leftrightarrow (x_n)_n \text{ possède une unique valeur d'adhérence dans } A.$$

Appliquons ce lemme à la suite $(\varphi_N)_N$, qui est bien contenue dans un compact de $\mathcal{C}^0([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^d)$ d'après le théorème d'Ascoli. On a vu plus haut que toute valeur d'adhérence φ de cette suite est nécessairement solution du problème de Cauchy que nous sommes en train d'étudier. Comme nous avons supposé que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique, une telle solution est unique (et notée y dans l'énoncé). Il n'y a donc bien qu'une seule valeur d'adhérence de cette suite et le lemme nous donne la convergence uniforme de toute la suite $(\varphi_N)_N$ vers y .

On conclut en utilisant (I.9). ■

Il reste à démontrer le lemme.

Preuve (du Lemme I.2.17):

L'implication \Rightarrow est immédiate, il nous suffit de montrer l'autre implication. Supposons donc que $(x_n)_n$ a une unique valeur d'adhérence dans A que l'on note x^* et raisonnons pas l'absurde en supposant que $(x_n)_n$ ne converge pas vers x^* .

Cela signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ telle que

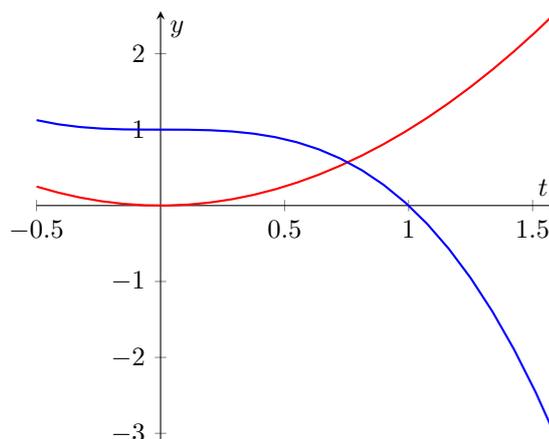
$$d(x^*, x_{\varphi(n)}) \geq \varepsilon, \quad \forall n \geq 0. \quad (\text{I.10})$$

Or, comme A est compact, on peut extraire de $(x_{\varphi(n)})_n$ une sous-suite convergente $(x_{\varphi(\psi(n))})_n$ dont la limite, par hypothèse, ne peut être que x^* . Ceci contredit (I.10). ■

2.3 Premières conséquences du théorème de Cauchy-Lipschitz

La première conséquence du théorème est bien sûr l'existence et l'unicité d'une solution à un problème de Cauchy qui peut modéliser une situation physique donnée. En réalité, les conséquences du théorème sont bien plus nombreuses. Commençons par quelques exemples utiles.

- **Une solution maximale est forcément définie sur un intervalle ouvert.**
- **Deux trajectoires distinctes ne peuvent pas se couper :** Soient (J, y_1) et (J, y_2) deux solutions de l'EDO $y' = F(t, y)$ définies sur le même intervalle.



S'il existe $t_0 \in J$ tel que $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ alors $y_1 \equiv y_2$.

- **Dans \mathbb{R} les trajectoires sont ordonnées :** On suppose ici que $d = 1$. Avec les mêmes notations que précédemment : S'il existe $t_0 \in J$ tel que $y_1(t_0) < y_2(t_0)$ alors $y_1(t) < y_2(t)$ pour tout $t \in J$. Il suffit de raisonner par l'absurde et d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour se ramener à la propriété précédente.

— **Application à la résolution d'une EDO simple** : Par exemple pour résoudre le problème suivant

$$y' = y^2.$$

On dit que, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, si la solution n'est pas identiquement nulle, elle ne s'annule jamais ! On peut donc diviser l'équation par y^2 puis intégrer l'équation de part et d'autres afin de la résoudre. L'ensemble de toutes les solutions est constitué de

$$(\mathbb{R}, 0),$$

$$(J_K^-, y_K^-) \text{ avec } J_K^- =]-\infty, K[, \text{ et } y_K^-(t) = \frac{1}{K-t}, \forall t \in J_K^-,$$

$$(J_K^+, y_K^+) \text{ avec } J_K^+ =]K, +\infty[, \text{ et } y_K^+(t) = \frac{1}{K-t}, \forall t \in J_K^+,$$

pour $K \in \mathbb{R}$. Ces dernières solutions ne sont pas globales (i.e. ne sont pas définies sur \mathbb{R} tout entier).

— **Trajectoires périodiques** : On suppose que $I = \mathbb{R}$ et que F est une fonction T -périodique. Alors une solution (\mathbb{R}, y) de l'EDO est T -périodique si et seulement s'il existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$y(t_0 + T) = y(t_0).$$

En effet, si ceci est vrai, la fonction $z(t) = y(t+T)$ vérifie la même équation différentielle que y et la même donnée de Cauchy $z(t_0) = y(t_0 + T) = y(t_0)$. Par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, on sait que ces deux solutions sont donc identiques, ce qui prouve le résultat.

2.4 Explosion en temps fini

Comme on l'a vu dans les exemples ci-dessus, il arrive que l'intervalle de définition de la solution maximale d'un problème de Cauchy soit strictement inclus dans I . On va voir pourquoi ce phénomène est appelé **explosion en temps fini**.

On rappelle que I est supposé ouvert. Si ce n'est pas le cas, il faut légèrement adapter l'énoncé qui suit.

Théorème I.2.18

On suppose F continue et localement Lipschitzienne par rapport à sa variable d'état. Soit (J, y) une solution maximale de (I.1). On note $J =]\alpha, \beta[$.

— Si $\alpha \in I$, alors

$$\limsup_{t \rightarrow \alpha^+} \|y(t)\| = +\infty. \quad (\text{I.11})$$

— Si $\beta \in I$, alors

$$\limsup_{t \rightarrow \beta^-} \|y(t)\| = +\infty. \quad (\text{I.12})$$

Preuve :

Supposons que $\alpha \in I$, et que (I.11) soit fautive. Ceci implique que y est bornée au voisinage de α^+ . Comme par ailleurs, y vérifie l'EDO et que F est continue et donc bornée sur tout compact de $I \times \mathbb{R}^d$, on constate que y' est aussi bornée au voisinage de α^+ . Par le théorème des accroissements finis et le critère de Cauchy, cela implique que la limite de $y(t)$ quand $t \rightarrow \alpha^+$ existe. On la note y_α .

Le couple (α, y_α) est une donnée de Cauchy admissible pour le problème considéré. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale (J_α, z) de ce problème de Cauchy. Rappelons que J_α est un ouvert de I et comme $\alpha \in I$, nous avons $\inf J_\alpha < \alpha$.

On note alors $\tilde{J} = J \cup J_\alpha \cap]-\infty, \beta[$ et on définit sur \tilde{J} la fonction suivante

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y(t), & \text{si } t > \alpha \\ z(t), & \text{si } t \leq \alpha. \end{cases}$$

On vérifie que \tilde{y} est une fonction dérivable sur \tilde{J} et qu'elle vérifie bien l'équation différentielle (I.1). Ceci contredit la maximalité de la solution (J, y) et montre le théorème. ■

Ce théorème (ou plus exactement sa contraposée) est notamment utile pour démontrer qu'une solution maximale est nécessairement globale.

Exemple I.2.19

Si la fonction F est bornée sur $I \times \mathbb{R}^d$, toutes les solutions maximales sont globales. En effet, appelons $M > 0$ une borne de $\|F\|$ sur $I \times \mathbb{R}^d$, et (J, y) une solution maximale du problème. On prend $a \in J$ quelconque de sorte que

$$\forall t \in J, t > a, \|y(t)\| = \left\| y(a) + \int_a^t F(s, y(s)) ds \right\| \leq \|y(a)\| + M(t - a),$$

ce qui montre que si la borne supérieure de J est finie, la solution y est bornée au voisinage de $\sup J$ et donc $\sup J \notin I$, d'après le théorème d'explosion en temps fini. La démarche est identique pour montrer que $\inf J \notin I$ et donc $J = I$.

Théorème I.2.20 (Théorème de Cauchy-Lipschitz global)

Si la fonction F est continue et globalement Lipschitzienne par rapport à y , alors toutes les solutions maximales sont globales. Plus précisément, s'il existe $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive telle que

$$\forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d, \|F(t, y_1) - F(t, y_2)\| \leq k(t)\|y_1 - y_2\|,$$

alors toutes les solutions maximales sont globales.

Preuve :

Si (J, y) est une solution maximale et $a \in J$, on a

$$y(t) = y(a) + \int_a^t F(s, y(s)) ds.$$

On prend la norme, pour $t > a$ et on utilise l'hypothèse

$$\|y(t)\| \leq \|y(a)\| + \int_a^t (k(s)\|y(s)\| + \|F(s, 0)\|) ds.$$

Supposons que la limite supérieure β de J soit finie et dans I , on a alors

$$\|y(t)\| \leq \left(\|y(a)\| + \int_a^\beta \|F(s, 0)\| ds \right) + \int_a^t k(s)\|y(s)\| ds, \quad \forall a \leq t < \beta$$

D'après le lemme de Gronwall (Lemme I.2.12), on en déduit que

$$\|y(t)\| \leq \left(\|y(a)\| + \int_a^\beta \|F(s, 0)\| ds \right) \exp \left(\int_a^\beta k(s) ds \right), \quad \forall a \leq t < \beta.$$

Ceci montre que la fonction y est bornée au voisinage de la borne β , ce qui contredit le théorème d'explosion en temps fini, donc $\beta \notin I$. ■

2.5 Sortie de tout compact

Toute la théorie de Cauchy-Lipchitz (et de Cauchy-Arzela-Peano) développée précédemment s'étend au cas où F est seulement définie sur un ensemble de la forme $I \times \Omega$ où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^d .

Dans ce cas, le théorème d'explosion en temps fini prend la forme suivante

Théorème I.2.21 (sortie de tout compact)

Soit $F : I \times \Omega$ une fonction continue et localement Lipschitzienne par rapport à la variable d'état.

Soit (J, y) une solution maximale de l'équation différentielle, on a alors :

- Si $\beta = \sup J \in I$, alors y sort de tout compact de Ω au voisinage de β , c'est-à-dire que, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$y(t) \notin K, \quad \forall t \in]\beta - \varepsilon, \beta[.$$

- Si $\alpha = \inf J \in I$, alors y sort de tout compact de Ω au voisinage de α , c'est-à-dire que, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$y(t) \notin K, \quad \forall t \in]\alpha, \alpha + \varepsilon[.$$

Exemple I.2.22

On considère l'équation différentielle $x' = -1/x$, c'est-à-dire $F(t, x) = -1/x$, pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$, donc $I = \mathbb{R}$ et $\Omega =]0, +\infty[$.

Soit $x_0 \in \Omega$, on veut résoudre le problème de Cauchy pour la donnée $x(0) = x_0$. Pour cela on multiplie par x et on intègre, ce qui donne

$$\begin{aligned} -xx' &= 1, \\ -\frac{x^2}{2} + \frac{x_0^2}{2} &= t, \end{aligned}$$

d'où

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 - 2t}, \quad \text{pour tout } t \in]-\infty, x_0^2/2[.$$

On voit donc que la solution maximale n'est pas globale. Au voisinage du temps d'existence on a

$$\lim_{t \rightarrow \frac{x_0^2}{2}} x(t) = 0,$$

et comme $0 \notin \Omega$, cela illustre bien le fait que la solution sort de tout compact de Ω .

2.6 Preuve directe du théorème de Cauchy-Lipschitz global

La preuve donnée plus haut du théorème de Cauchy-Lipschitz global I.2.20 s'appuie sur le théorème de Cauchy-Lipschitz local et le théorème d'explosion en temps fini. On peut en réalité donner une preuve directe de ce résultat par une méthode de point fixe. Cette preuve est, dans l'esprit, sensiblement la même que celle du théorème local, c'est pourquoi il est instructif de la connaître.

Preuve (du théorème I.2.20):

On se donne une donnée de Cauchy $(a, y_a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et on veut montrer qu'il existe une unique solution globale au problème. Pour cela, on va démontrer qu'il existe une unique solution définie sur l'intervalle $[a, +\infty[$, le cas de l'intervalle $] -\infty, a]$ se traitant de manière analogue (ou en changeant F en $-F$).

D'après le lemme de Gronwall et les calculs menés plus haut, on voit que **toute éventuelle solution** doit vérifier l'estimation

$$\forall t \in [a, +\infty[, \quad \|y(t)\| \leq \left(\|y_a\| + \int_a^t \|F(s, 0)\| ds \right) \exp \left(\int_a^t k(s) ds \right). \quad (\text{I.13})$$

Pour simplifier les écritures, on introduit les fonctions

$$\varphi(t) = \|y_a\| + \int_a^t \|F(s, 0)\| ds,$$

et

$$\psi(t) = \int_a^t k(s) ds,$$

de sorte que l'estimation (I.13) devient

$$\forall t \in [a, +\infty[, \|y(t)\| \leq \varphi(t)e^{\psi(t)},$$

celle-ci étant valable *a priori* pour toute solution du problème.

On introduit maintenant l'espace fonctionnel

$$E = \left\{ y \in C^0([a, +\infty[, \mathbb{R}^d), \sup_{t \geq a} (\varphi(t)^{-1} e^{-2\psi(t)} \|y(t)\|) < +\infty \right\},$$

que l'on munit de la norme $\|y\|_E = \sup_{t \geq a} (\varphi(t)^{-1} e^{-2\psi(t)} \|y(t)\|)$. On vérifie aisément¹ que cet espace est complet, c'est un espace de Banach. **Remarque** : la présence du facteur 2 dans le terme exponentiel est cruciale².

On introduit maintenant l'opérateur $T : E \rightarrow E$ défini par

$$\forall y \in E, \forall t \in [a, +\infty[, Ty(t) = y_a + \int_a^t F(s, y(s)) ds.$$

Il est clair maintenant qu'une fonction continue y est solution de notre problème de Cauchy si et seulement si $y \in E$ (estimation *a priori* ci-dessus) et si $Ty = y$ (forme intégrale de l'équation différentielle).

On est donc ramené à trouver un point fixe de l'opérateur T . Dans un espace de Banach, on dispose du théorème de point fixe de Banach (ou de Picard ...) qui nous dit que si T est contractant alors il existe un unique point fixe. Le résultat souhaité sera donc démontré si on établit que T est contractant.

Soient donc $y, z \in E$, on veut estimer $\|Ty - Tz\|_E$ en fonction de $\|y - z\|_E$. Pour cela, on fixe un instant $t \in [a, +\infty[$ et on majore $\|Ty(t) - Tz(t)\|$ de la façon suivante

$$\begin{aligned} \|Ty(t) - Tz(t)\| &= \left\| \int_a^t F(s, y(s)) - F(s, z(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_a^t k(s) \|y(s) - z(s)\| ds \\ &\leq \|y - z\|_E \int_a^t k(s) \varphi(s) e^{2\psi(s)} ds. \end{aligned}$$

On remarque maintenant que $k = \psi'$, de sorte qu'on peut intégrer par parties l'intégrale du membre de droite

$$\int_a^t k(s) \varphi(s) e^{2\psi(s)} ds = \int_a^t \varphi(s) (\psi'(s) e^{2\psi(s)}) ds = \frac{1}{2} \varphi(t) e^{2\psi(t)} - \frac{1}{2} \varphi(a) e^{2\psi(a)} - \frac{1}{2} \int_a^t \varphi'(s) e^{2\psi(s)} ds.$$

Comme $\varphi'(s) = \|F(s, 0)\| \geq 0$ et $\varphi \geq 0$, les deuxième et troisième termes de cette égalité sont négatifs. *In fine*, on a donc montré

$$\|Ty(t) - Tz(t)\| \leq \|y - z\|_E \frac{1}{2} \varphi(t) e^{2\psi(t)}.$$

Ceci étant vrai pour tout $t \in [a, +\infty[$, on a

$$\|Ty - Tz\|_E = \sup_{t \geq a} (\|Ty(t) - Tz(t)\| \varphi(t)^{-1} e^{-2\psi(t)}) \leq \frac{1}{2} \|y - z\|_E,$$

ce qui montre que T est 1/2-Lipschitzienne et donc contractante, d'où le résultat. ■

2.7 Dépendance par rapports aux données

Dans tout ce paragraphe, je suppose que $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est continue, localement Lipschitzienne par rapport à la variable d'état, et que toutes les solutions maximales de l'équation différentielles $y' = F(t, y)$ sont globales (par exemple si F est globalement Lipschitzienne par rapport à y).

Définition I.2.23 (Flot associé à l'équation différentielle)

Pour tout $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\varphi(t, t_0, y_0) \in \mathbb{R}^d$ la valeur, à l'instant t , de l'unique solution du problème de Cauchy associé à la donnée (t_0, y_0) et à l'ED considérée.

L'application $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est appelée **le flot** associé à l'équation différentielle.

1. c'est un bon exercice !

2. voyez-vous à quel endroit ceci intervient dans la suite ?

Théorème I.2.24

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t, t, \cdot) = \text{Id}$.

2. Pour tout $t, s, u \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t, s, \varphi(s, u, \cdot)) = \varphi(t, u, \cdot).$$

En particulier, pour tous t, s l'application $\varphi(t, s, \cdot)$ est une bijection de \mathbb{R}^d sur lui-même.

3. L'application φ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

Preuve.

La première propriété est triviale. Pour la seconde, on fixe $y_0 \in \mathbb{R}^d$ et on observe que les applications

$$t \mapsto \varphi(t, s, \varphi(s, u, y_0)), \text{ et } t \mapsto \varphi(t, u, y_0),$$

sont deux solutions du même problème de Cauchy (à l'instant $t = s$) donc sont égales.

Montrons la continuité de l'application φ :

— On montre d'abord que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$ et tout $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe un compact K_1 , un $C > 0$, un $\delta > 0$ tels que

$$\varphi(t, t_0, y) \in K_1, \quad \forall y \in K, \forall |t - t_0| \leq \delta,$$

et

$$\|\varphi(t, t_0, y) - y\| \leq C|t - t_0|, \quad \forall y \in K, \forall |t - t_0| \leq \delta.$$

Pour cela on note $K_1 = K + \bar{B}(0, 1)$ et on pose $M = \sup_{[t_0-1, t_0+1] \times K_1} \|F\|$. On voit que si $\delta = \min(1, 1/K_1)$ alors pour tout $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, pour tout $y \in K$, on a $\varphi(t, t_0, y) \in K_1$. En effet, par un raisonnement par l'absurde maintenant usuel si cette propriété n'est pas vraie, on prend le premier instant $t^* \in [t_0, t_0 + \delta[$ pour lequel $\varphi(t, t_0, y)$ cesse d'appartenir à K_1 et on écrit

$$\|\varphi(t^*, t_0, y) - y\| = \left\| \int_{t_0}^{t^*} F(s, \varphi(s, t_0, y)) ds \right\| \leq (t^* - t_0)M < \delta M \leq 1,$$

ce qui contredit la définition de t^* . On a donc bien, *in fine* la propriété

$$\|\varphi(t, t_0, y) - y\| \leq |t - t_0|M,$$

pour tous les $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ et tous les $y \in K$.

— On montre maintenant que, t_0 et s_0 étant fixés, l'application $y \in \mathbb{R}^d \mapsto \varphi(t_0, s_0, y)$ est continue.

Il s'agit d'une application du Lemme de Gronwall. Soient $y, z \in \mathbb{R}^d$, on écrit pour tout $t \in [s_0, t_0]$,

$$\varphi(t, s_0, y) = y + \int_{s_0}^t F(\tau, \varphi(\tau, s_0, y)) d\tau,$$

$$\varphi(t, s_0, z) = z + \int_{s_0}^t F(\tau, \varphi(\tau, s_0, z)) d\tau.$$

L'application $\tau \mapsto \varphi(\tau, s_0, y)$ est continue sur $[s_0, t_0]$, elle prend donc ses valeurs dans un compact K . On note $K_1 = K + \bar{B}(0, 1)$ et on appelle L la constante de Lipschitz de F par rapport à sa seconde variable sur le compact $[s_0, t_0] \times K_1$.

Ainsi, pour tout $t \in [s_0, t_0]$ tel que $\varphi(\tau, s_0, z) \in K_1$ pour tout $\tau \in [s_0, t]$, on a

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, s_0, y) - \varphi(t, s_0, z)\| &\leq \|y - z\| + \int_{s_0}^t \|F(\tau, \varphi(\tau, s_0, y)) - F(\tau, \varphi(\tau, s_0, z))\| d\tau \\ &\leq \|y - z\| + L \int_{s_0}^t \|\varphi(\tau, s_0, y) - \varphi(\tau, s_0, z)\| d\tau, \end{aligned}$$

et donc par le lemme de Gronwall, pour de tels t , on a

$$\|\varphi(t, s_0, y) - \varphi(t, s_0, z)\| \leq \|y - z\| e^{L|t-s_0|} \leq \|y - z\| e^{L|t_0-s_0|}.$$

On voit en particulier que si $\|y - z\| < \frac{1}{e^{L|t_0 - s_0|}}$, alors $\varphi(t, s_0, z)$ reste dans le compact K_1 pour tout $t \in [s_0, t_0]$ et donc la formule ci-dessus est valable pour tout $t \in [s_0, t_0]$. En particulier, on trouve

$$\|\varphi(t_0, s_0, y) - \varphi(t_0, s_0, z)\| \leq \|y - z\|e^{L|t_0 - s_0|}.$$

Ceci montre que $y \mapsto \varphi(t_0, s_0, y)$ est localement Lipschitzienne donc continue.

— Il reste à assembler les morceaux. On écrit

$$\varphi(t, s, y) = \varphi(t, t_0, \varphi(t_0, s_0, \varphi(s_0, s, y))).$$

Pour y dans un voisinage compact K de y_0 , et s, t tels que $|s - t| \leq \delta, |s_0 - s| \leq \delta$, on sait que $\varphi(s_0, s, y)$ est dans un compact K_1 , et donc que $\varphi(t_0, s_0, \varphi(s_0, s, y))$ est dans un compact K_2 (car $\varphi(t_0, s_0, \cdot)$ est continue). Pour t proche de t_0 , on a donc

$$\|\varphi(t, s, y) - \varphi(t_0, s_0, \varphi(s_0, s, y))\| \leq M_1|t - t_0|,$$

puis

$$\|\varphi(t, s, y) - \varphi(t_0, s_0, y)\| \leq M_1|t - t_0| + M_2\|\varphi(s_0, s, y) - y\| \leq M_1|t - t_0| + M'_2|s - s_0|,$$

et enfin

$$\|\varphi(t, s, y) - \varphi(t_0, s_0, y_0)\| \leq M_1|t - t_0| + M'_2|s - s_0| + M_3\|y - y_0\|.$$

■

Sous des hypothèses un peu plus fortes sur F , on peut montrer la différentiabilité du flot.

Théorème I.2.25 (voir par exemple [BG10, Th. 5.13, p 148],[Dem91, page 302])

Si la fonction F admet des dérivées partielles par rapport aux y_i continues (par rapport à toutes les variables), alors le flot φ est de classe \mathcal{C}^1 et sa différentielle par rapport à y est l'unique solution du problème de Cauchy linéaire suivant (dont l'inconnue est $t \mapsto M(t, s) \in M_d(\mathbb{R})$)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}M(t, s) = (d_y F(t, \varphi(t, s, y))).M(t, s) \\ M(s, s) = \text{Id.} \end{cases}$$

La démonstration du théorème est assez technique mais il est aisé de retrouver l'équation différentielle vérifiée par la dérivée du flot. Il suffit, formellement, de dériver l'équation de départ par rapport à la variable y en supposant que l'interversion des dérivées est licite dans tous les termes.

3 La théorie des équations différentielles linéaires

Une EDO est dite linéaire (homogène) si elle est de la forme

$$y' = A(t)y, \tag{I.14}$$

où $A : I \mapsto M_d(\mathbb{R})$ est une application à valeurs matricielles. Par abus de langage, on parle aussi d'équation linéaire non-homogène (ou avec second membre) pour les équations de la forme

$$y' = A(t)y + b(t), \tag{I.15}$$

où $b : I \mapsto \mathbb{R}^d$ est une fonction continue donnée.

3.1 Le cas général

Théorème I.3.26

Si A et b sont des applications continues, alors le théorème de Cauchy-Lipschitz global s'applique à l'équation (I.15). Il y a donc existence et unicité de la solution maximale globale pour tout problème de Cauchy.

*L'ensemble de toutes les solutions de (I.15) forme un sous-espace affine (vectoriel si $b \equiv 0$) de l'ensemble des fonctions dérivables de I dans \mathbb{R}^d de dimension **exactement** d .*

*Si y_1, \dots, y_d sont d solutions indépendantes de l'équation (I.14) et z une solution quelconque de l'équation (I.15), alors toute solution de (I.15) s'écrit **de manière unique** sous la forme*

$$y(t) = \sum_{i=1}^d \alpha_i y_i(t) + z(t). \tag{I.16}$$

Remarque I.3.27

Soit $t_0 \in I$ et y_1, \dots, y_k des solutions de l'équation homogène (I.14). On a l'équivalence suivante

$$\text{les } (y_i)_i \text{ sont indépendants dans } C^0(I, \mathbb{R}^d) \iff \text{les } (y_i(t_0))_i \text{ sont indépendants dans } \mathbb{R}^d.$$

Il y a un sens évident et l'autre sens provient de la propriété d'unicité dans Cauchy-Lipschitz.

Preuve :

- Vérifions que la fonction $F(t, y) = A(t)y + b(t)$ est globalement Lipschitzienne. On mettra sur l'ensemble des matrices la norme induite par celle choisie sur l'espace \mathbb{R}^d . On a bien alors

$$\|F(t, y_1) - F(t, y_2)\| \leq \|A(t)\| \|y_1 - y_2\|, \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d,$$

avec $t \mapsto \|A(t)\|$ qui est continue. Le théorème de Cauchy-Lipschitz global s'applique donc.

- D'après la remarque précédente, une famille de k solutions de l'équation homogène ne peut être linéairement indépendante que si $k \leq d$. L'espace des solutions est donc de dimension finie, inférieure ou égale à d . Par ailleurs, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous donne, pour tout $1 \leq i \leq d$, l'existence et l'unicité d'une solution \tilde{y}_i associée à la donnée de Cauchy (t_0, e_i) , e_i étant le i -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^d . Par la remarque précédente, ces fonctions \tilde{y}_i sont linéairement indépendants et donc l'espace des solutions est de dimension exactement d .
- On vérifie tout d'abord que toutes les fonctions de la forme (I.16) sont bien solutions du problème. On fixe ensuite $t_0 \in I$. D'après la remarque précédente, les vecteurs $(y_i(t_0))_i$ forment une base de \mathbb{R}^d donc, pour tout $\tilde{y} \in \mathbb{R}^d$, il existe une unique famille de réels $(\alpha_i)_i$ tels que

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i(t_0) + z(t_0).$$

Cette famille de réels, fournit bien l'unique solution pour la donnée de Cauchy (t_0, \tilde{y}) . ■

Malgré le caractère assez simple de ces équations, il n'y a pas de méthode générale de résolution disponible. Par exemple les solutions de l'équation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

sont des fonctions très complexes qu'on ne peut exprimer simplement à l'aide de fonctions usuelles (voir l'exercice 22).

Dans le cas scalaire, i.e. avec $d = 1$, on a une formule générale pour l'équation sans second membre

$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) y(t_0).$$

On verra des formules similaires pour l'équation avec second membre plus tard.

Remarque I.3.28 (Très important)

En dimension $d > 1$ une telle formule **n'existe pas !!** Voir la section 3.3.

3.2 Le cas à coefficients constants, sans second membre

On s'intéresse ici au cas où $t \mapsto A(t)$ ne dépend pas du temps et où le second membre est nul. L'équation considérée est alors

$$y' = Ay. \tag{I.17}$$

Théorème I.3.29

La solution du problème de Cauchy associé à (I.17) pour la donnée $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ est définie sur \mathbb{R} tout entier par la formule

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0.$$

Dans cette formule, on a eu besoin de l'exponentielle de matrices définie par

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}. \quad (\text{I.18})$$

Preuve.

Considérons l'application $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tA} \in M_d(\mathbb{R})$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout h petit

$$\varphi(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t+h)^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kt^{k-1} h A^k}{k!} + O(h^2),$$

Ainsi, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\varphi(t+h) - \varphi(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kt^{k-1} A^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} A^k}{(k-1)!} = A e^{tA} = e^{tA} A.$$

D'où le résultat. ■

On rappelle qu'en général, la formule (I.18) n'est pas pratique pour calculer l'exponentielle et qu'il est plus raisonnable d'utiliser des réductions pour ramener le calcul à un cas simple en utilisant le fait que

$$e^{P^{-1}MP} = P^{-1}e^M P.$$

— Typiquement, si M est diagonalisable et $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors

$$e^{tM} = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Ainsi, les éléments spectraux de la matrice A sont déterminants dans l'étude qualitative du système.

— Si M est nilpotente, la formule se simplifie

$$e^M = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{M^k}{k!}.$$

— Dans le cas non diagonalisable, on peut utiliser la décomposition de Jordan ou la décomposition de Dunford. Cette dernière (valable dans \mathbb{C}) s'écrit $A = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente **qui commutent !**. Ainsi, on a

$$e^{tA} = e^{tD} e^{tN},$$

et le calcul de chacun des facteurs peut se faire aisément.

Proposition I.3.30

Toute matrice $A \in M_d(\mathbb{C})$ (dans un corps quelconque, il suffit que le polynôme caractéristique soit scindé, ce qui est toujours vrai dans \mathbb{C}) s'écrit de manière unique sous la forme

$$A = D + N,$$

où D est diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$.

De plus, D et N peuvent s'exprimer sous la forme $D = P_1(A)$ et $N = P_2(A)$ où P_1 et P_2 sont deux polynômes.

Preuve.

— Commençons par établir l'unicité de la décomposition.

Admettons l'existence d'une telle décomposition $A = D_1 + N_1$. Soit $A = D_2 + N_2$ une autre décomposition (on ne suppose pas que D_2 et N_2 sont des polynômes en A). Comme D_2 et N_2 commutent avec A , elles commutent aussi avec $D_1 = P_1(A)$ et avec N_1 . On écrit maintenant

$$D_1 - D_2 = N_2 - N_1.$$

Comme D_1 et D_2 commutent et sont diagonalisables, on sait qu'elles peuvent être diagonalisées dans la même base et que donc leur différence $D_1 - D_2$ est également diagonalisable. De la même façon, la différence $N_2 - N_1$ est nilpotente (toujours grâce au fait qu'elles commutent).

On a donc montré que la matrice $D_1 - D_2 = N_1 - N_2$ est à la fois diagonalisable et nilpotente, ce qui n'est possible que pour la matrice nulle.

- Montons maintenant l'existence. Soit $P(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ le polynôme caractéristique (scindé) de A . On note $P_j(X) = \prod_{i \neq j} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et on observe que les $(P_j)_{1 \leq j \leq n}$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. D'après le théorème de Bezout, il existe donc des polynômes Q_j tels que

$$1 = \sum_{j=1}^n Q_j P_j.$$

On a donc, en évaluant cette égalité sur la matrice A :

$$I = \sum_{j=1}^n Q_j(A) P_j(A), \quad (\text{I.19})$$

et donc

$$A = \sum_{j=1}^n A Q_j(A) P_j(A).$$

On remarque que pour tout $j \neq k$ on a $P_j(A) P_k(A) = P_k(A) P_j(A) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton. En effet, par construction, le polynôme caractéristique de A divise le produit $P_j P_k$.

Ainsi (I.19) montre que les matrices $Q_j(A) P_j(A)$ sont des projecteurs sur leur image et que la somme directe de celles-ci remplit tout l'espace \mathbb{C}^d .

Posons maintenant

$$D = \sum_{j=1}^n \lambda_j Q_j(A) P_j(A), \quad N = \sum_{j=1}^n (A - \lambda_j I) Q_j(A) P_j(A).$$

— Il est clair que $D + N = A$ et que D et N commutent avec A .

— D'après la propriété des projecteurs, on a

$$N^d = \sum_{j=1}^n Q_j(A) (A - \lambda_j I)^d P_j(A).$$

Par construction, le polynôme caractéristique P divise $(X - \lambda_j)^d P_j(X)$ et donc par le théorème de Cayley-Hamilton on voit que tous les termes de la somme sont nuls, ce qui donne bien $N^d = 0$ et N est bien nilpotente.

- On pose $\pi(X) = \prod_{j=1}^n (X - \lambda_j)$ qui est scindé et à racines simples. On va montrer que π annule D ce qui prouvera qu'elle est diagonalisable.

On a tout d'abord

$$(D - \lambda_i I) = \sum_{j=1}^n (\lambda_j - \lambda_i) Q_j(A) P_j(A) = \sum_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i) Q_j(A) P_j(A).$$

et donc

$$\pi(D) = \prod_{i=1}^d \left(\sum_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i) Q_j(A) P_j(A) \right).$$

On voit que tous les termes de ce produit, une fois développé contiennent des termes dont l'un des facteurs est $P_i(A) P_j(A)$ avec $i \neq j$. Or ce facteur est nul comme on l'a vu plus haut (théorème de Cayley-Hamilton).

En réalité les projecteurs $Q_j(A) P_j(A)$ sont les projecteurs sur les sous-espaces caractéristiques de la matrice A .

■

Étudions complètement le cas de la dimension 2, i.e. $A \in M_2(\mathbb{R})$. Trois cas peuvent se produire (voir [Dem91, page 290] pour une description plus détaillée) :

- A est diagonalisable dans \mathbb{R} . Auquel cas, la formule précédente donne la formule de la solution exacte. De façon plus précise, si λ_1 et λ_2 sont les deux valeurs propres et e_1, e_2 les vecteurs propres associés, les solutions de l'équation sont données par

$$y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} e_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} e_2.$$

Selon le signe des valeurs propres on peut donc tracer les trajectoires (Exercice : trouver les équations cartésiennes des trajectoires).

- A a ses valeurs propres réelles mais n'est pas diagonalisable. Dans ce cas, la valeur propre est nécessairement unique et non semi-simple. D'après le théorème de Jordan (ou la décomposition de Dunford), la matrice A s'écrit

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

et dans ce cas, on peut voir que l'exponentielle s'écrit

$$P^{-1}e^{tA}P = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Si on note e_1 et e_2 les deux colonnes de P (i.e. un vecteur propre de A et un vecteur propre généralisé), on trouve

$$y(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 t)e^{\lambda t} e_1 + \alpha_2 e^{\lambda t} e_2.$$

- Enfin, A peut avoir deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_{\pm} = a \pm bi$, avec $b \neq 0$. Dans ce cas, on peut vérifier que l'exponentielle de tA est donnée par une formule du genre

$$P^{-1}e^{tA}P = e^{ta} \begin{pmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}.$$

La stabilité du point d'équilibre est alors donnée par la valeur de a : si $a = 0$ les trajectoires sont périodiques, si $a > 0$ le point d'équilibre est instable et si $a < 0$ le point est stable. Qualitativement, les trajectoires s'enroulent autour de l'origine. Le sens de rotation est donné par l'analyse des vecteurs propres de A .

En dimension quelconque, la forme générale des solutions est donc connue :

- Si on travaille dans \mathbb{C} : Il existe une famille de solutions fondamentales de la forme

$$e^{\lambda_i t} (P_{i,j}(t))_j,$$

où les $P_{i,j}$ sont des polynômes complexes en t . Leur degré maximal dépend de l'indice de nilpotence du bloc de Jordan correspondant.

- Si on travaille dans \mathbb{R} : la forme précédente reste valable pour les valeurs propres réelles. Pour les valeurs propres complexes, on profite du fait qu'elles soient nécessairement par paires conjuguées et que la matrice A est réelle pour obtenir

$$e^{\mathcal{R}e(\lambda_i)t} (\cos(\text{Im}(\lambda_i)t)P_{i,j}(t) + \sin(\text{Im}(\lambda_i)t)Q_{i,j}(t))_j.$$

3.3 Résolvante. Formule de Duhamel

On considère l'équation linéaire homogène à coefficients variables (I.14).

Définition I.3.31 (Matrice résolvante)

Pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, on note $R(t, s) \in M_d(\mathbb{R})$ l'unique matrice telle que, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^d$, la solution y de (I.14) pour la donnée de Cauchy (s, y_0) est donnée, à l'instant t , par

$$y(t) = R(t, s)y_0.$$

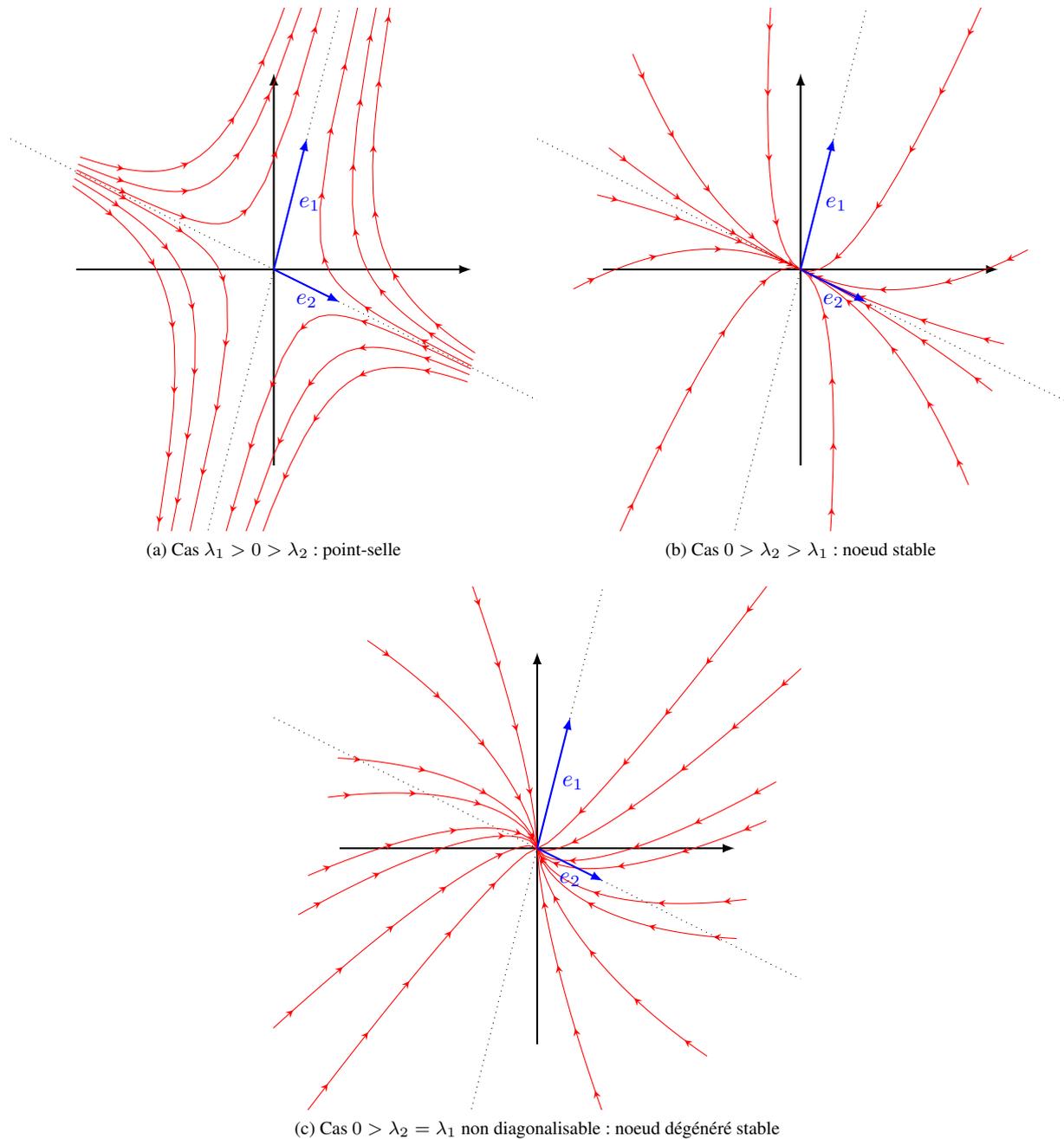


FIGURE I.6 – Trois portraits de phase typiques dans le cas de deux valeurs propres réelles

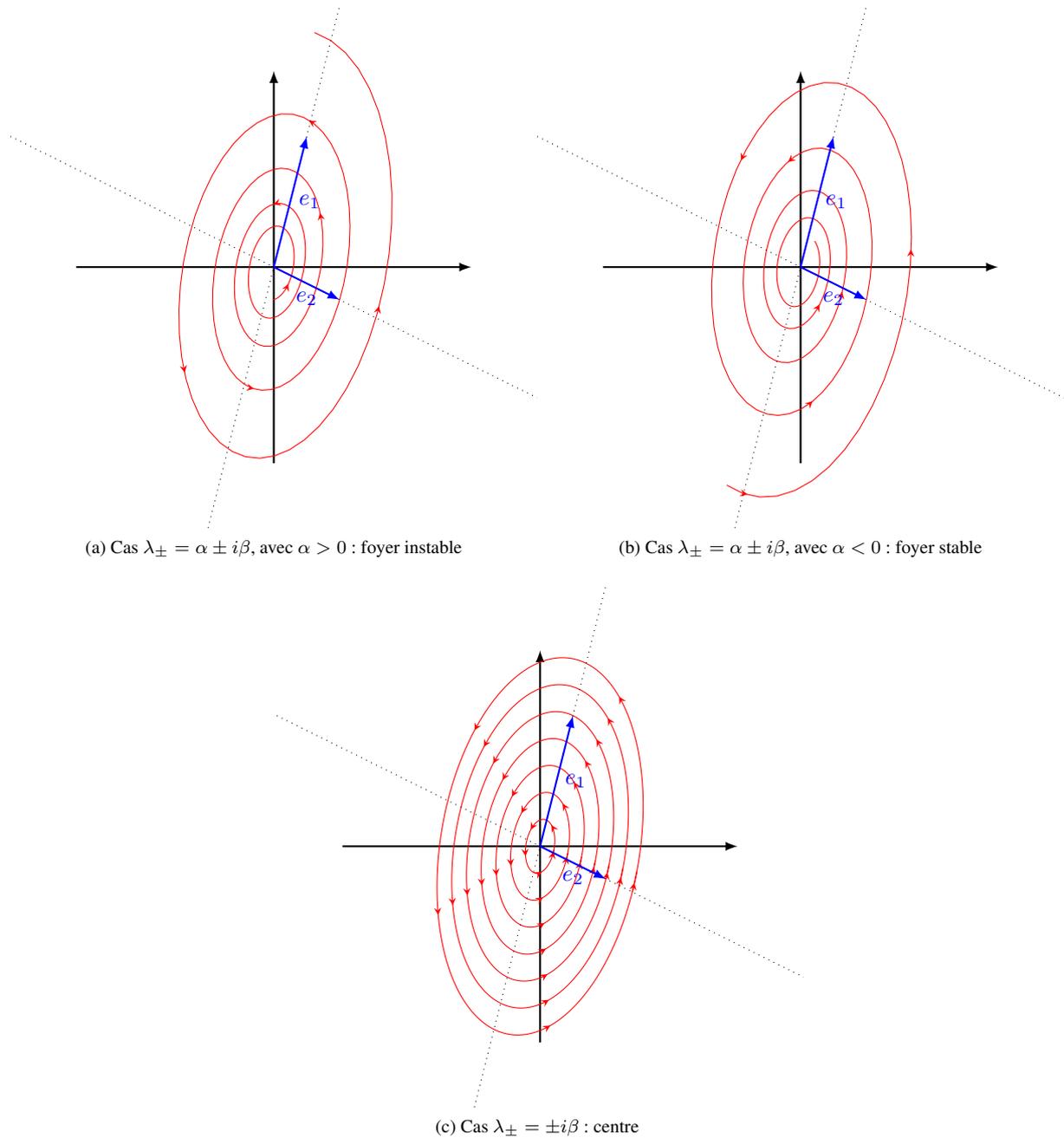


FIGURE I.7 – Portraits de phase typiques dans le cas de deux valeurs propres complexes conjuguées (le sens de rotation dépend du signe de β et de la position relative des vecteurs propres associés à λ^+ et λ^-)

Théorème I.3.32

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $R(t, t) = \text{Id}$.
- Pour tous t, s, u , on a

$$R(u, t)R(t, s) = R(u, s).$$
- Pour tous t, s , on a

$$R(t, s)R(s, t) = R(t, t) = \text{Id},$$
 en particulier la résolvante est inversible pour toutes valeurs de t, s .
- Pour tous t, s , on a

$$\partial_t R(t, s) = A(t)R(t, s),$$
 et

$$\partial_s R(t, s) = -R(t, s)A(s).$$
- Si A ne dépend pas du temps, on a

$$R(t, s) = e^{(t-s)A}.$$

Preuve.

L'équation étant linéaire, le flot $\varphi(t, s, y_0)$ l'est également (par rapport à y_0), ce qui justifie la définition de $R(t, s)$ et prouve la plupart des propriétés ci-dessus. Autrement dit, dans le cas linéaire, la formule du flot devient

$$\varphi(t, s, y_0) = R(t, s) \cdot y_0, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

La seule propriété non triviale est le calcul de la dérivée de R par rapport à s . Pour la vérifier il suffit de dériver (par rapport à s) la formule $R(t, s) \cdot R(s, t) = \text{Id}$ (qui par ailleurs nous montre que R est dérivable par rapport à s). ■

Le calcul de la résolvante est quelque chose de complexe en général. Si on connaît d solutions indépendantes $(y_i)_i$ du problème, on peut reconstituer la résolvante (c'est même équivalent car, à s fixé, les d colonnes de la famille de matrices $t \mapsto R(t, s)$ forment une base de solutions du problème considéré). En effet, par définition de la résolvante, on a

$$\forall t \in I, \forall (\alpha_i)_i, \sum_{i=1}^d \alpha_i y_i(t) = R(t, s) \left(\sum_{i=1}^d \alpha_i y_i(s) \right).$$

Ceci donne

$$R(t, s) = W(t)W(s)^{-1},$$

où W est la matrice suivante, appelée matrice **Wronskienne** des $(y_i)_i$

$$W(t) = (y_1(t), \dots, y_d(t)).$$

On appelle Wronskien de cette famille de solutions, le déterminant de la matrice $W(t)$, on le note $w(t)$.

Proposition I.3.33 (Equation du Wronskien)

- S'il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0)$ est inversible, alors $W(t)$ est inversible pour tout t .
- Le wronskien w vérifie l'équation linéaire

$$w'(t) = (\text{Tr}A(t))w(t),$$

et donc

$$w'(t) = w(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \text{Tr}A(s) ds \right).$$

Preuve.

- Si les $(y_i(t_0))_i$ sont liés à un instant t_0 , il existe donc des $(\alpha_i)_i$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^d \alpha_i y_i(t_0) = 0.$$

Alors la fonction $\sum_{i=1}^d \alpha_i y_i(t)$ est solution de l'équation et s'annule en 0, c'est donc la solution identiquement nulle. Ceci prouve bien que pour tout t , les $(y_i(t))_i$ sont liés.

— On note $B(t) = W(t)^{-1}A(t)W(t)$, de sorte que

$$y'_i(t) = A(t)y_i(t) = W(t)B(t)W(t)^{-1}y_i(t) = W(t)B(t)e_i = \sum_{j=1}^d b_{ji}(t)y_j(t).$$

Ainsi, en utilisant la multilinéarité du déterminant, on trouve

$$\begin{aligned} w'(t) &= \sum_{i=1}^d \det(y_1(t), \dots, y'_i(t), \dots, y_d(t)) = \sum_{i,j} b_{ji}(t) \det(y_1(t), \dots, \underbrace{y_j(t)}_{\text{place } i}, \dots, y_d(t)) \\ &= \sum_{i=1}^d b_{ii}(t)w(t) = (\text{Tr}B(t))w(t), \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat vu que $\text{Tr}A(t) = \text{Tr}B(t)$.

On peut bien sûr aussi utiliser la formule générale de la différentielle du déterminant

$$d(\det)(A).H = (\det A)\text{Tr}(A^{-1}H), \text{ si } A \text{ est inversible,}$$

$$d(\det)(A).H = 0, \text{ si } A \text{ n'est pas inversible.}$$

■

Supposons maintenant connue la résolvante du problème homogène considéré. On va alors pouvoir calculer la solution générale du problème non homogène. Comme on l'a vu, il suffit de trouver une solution particulière du problème.

Fixons $s \in I$ et cherchons cette solution sous la forme

$$y(t) = R(t, s)\alpha(t), \quad \forall t \in I,$$

avec $\alpha(t) \in \mathbb{R}^d$. Par calcul, on trouve

$$y'(t) = \partial_t R(t, s)\alpha(t) + R(t, s)\alpha'(t) = A(t)y(t) + R(t, s)\alpha'(t).$$

De sorte, que y est solution du problème si et seulement si

$$R(t, s)\alpha'(t) = b(t).$$

On trouve donc (en fixant la constante d'intégration arbitrairement)

$$\alpha(t) = \int_s^t R(s, \tau)b(\tau) d\tau,$$

ce qui fournit une solution particulière de la forme

$$y(t) = R(t, s)\alpha(t) = \int_s^t R(t, \tau)b(\tau) d\tau.$$

En mettant tous les ingrédients bout à bout, on obtient la formule générale pour la solution du problème de Cauchy pour la donnée (t_0, y_0) de l'équation linéaire non homogène

$$y(t) = R(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t R(t, s)b(s) ds.$$

Cette formule, dite de Duhamel, ou de variation de la constante est très utile.

4 Petit bestiaire

La grande majorité des équations différentielles ne peuvent se résoudre à l'aide de formules explicites. On peut néanmoins, dans quelques cas, tenter de le faire. Je m'inspire ici très fortement de [Dem91, Chap. VI]. On pourra aussi consulter [Gou94, p 365].

- Le cas linéaire à coefficients constants est bien entendu le plus simple et, dans ce cas, on dispose de formules (modulo le calcul éventuel de primitives). Dans le cas mono-dimensionnel, on peut même résoudre le cas de coefficients variables.
- Equations à variables séparées : Ce sont les équations de la forme

$$y' = f(t)g(y),$$

où $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dans ce cas on peut, en théorie, résoudre complètement le problème dès lors qu'on sait calculer (puis inverser !!) les primitives de la fonction $1/g$ et les primitives de f . C'est donc le cas par exemple si f est constante et que g est une fraction rationnelle, ou un polynôme trigonométrique, etc ... il n'en demeure pas moins que le calcul est souvent long et pénible.

Exemple :

$$y' = \frac{1 - y^2}{1 - x^2}.$$

- Systèmes de dimension 2 dont on connaît une intégrale première non-triviale.
On considère un système de la forme

$$y' = F(y),$$

avec $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. On suppose connue une fonction $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ non triviale (c'est une notion à définir proprement ...) telle que

$$\frac{d}{dt}H(y(t)) = 0,$$

pour toute solution y de l'équation différentielle.

Ainsi, les trajectoires dans le plan \mathbb{R}^2 sont contenues dans les lignes de niveau de H . Si on peut analyser suffisamment précisément la fonction H , il est aisé d'en déduire des propriétés des solutions (voir l'exercice 28).

Supposons par exemple que l'on puisse appliquer le théorème des fonctions implicites par rapport à y_2 à la fonction H le long de sa ligne de niveau correspondant à la donnée initiale, on peut alors écrire (au moins localement)

$$H(y) = C_0 \Leftrightarrow y_2 = h(y_1),$$

et le système différentiel initial se ramène à un système de dimension 1

$$y_1' = F_1(y_1, h(y_1)).$$

Il est hors de propos de faire une théorie générale de cette approche mais il faut en comprendre l'idée générale et éventuellement être capable de la mettre en oeuvre sur des exemples simples.

- Dans le cas d'une équation scalaire mais non autonome l'approche précédente peut aussi permettre de résoudre complètement le problème. Exemple : pour l'équation

$$y' = \frac{y}{t + y^2},$$

on vérifie que la quantité $t/y - y$ est constante le long des trajectoires. Ceci montre que les solutions sont incluses dans les paraboles

$$t = y^2 + \lambda y,$$

où λ dépend de la donnée initiale. Ceci permet de poursuivre l'étude ...

- Equations de Bernoulli : ce sont les équations de la forme

$$y' = a(t)y + b(t)y^\alpha,$$

avec $\alpha \neq 1$.

- Dans le cas $\alpha > 1$, l'équation vérifie les hypothèses de Cauchy-Lipschitz et on a existence, unicité de la solution et celle-ci ne peut s'annuler que si elle est identiquement nulle. A l'exception du cas $y \equiv 0$, on peut donc poser $z = y^{1-\alpha}$ et constater que z vérifie une équation **linéaire** non-homogène que l'on peut résoudre par les méthodes usuelles puis revenir à y .

- Dans le cas $\alpha < 0$, le problème n'est défini que pour $y > 0$, donc la méthode précédente s'applique sans modification. La solution peut tendre vers 0 en temps fini.
- Dans le cas $\alpha = 0$, il s'agit d'une équation linéaire non-homogène.
- Dans le cas $0 < \alpha < 1$, on perd l'unicité des solutions et il faut donc faire attention aux différents recollements possibles.
- Equation de Riccati : ce sont les équations de la forme

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t).$$

Si on connaît une solution particulière \tilde{y} de cette équation (en général une solution évidente), alors toutes les solutions s'obtiennent en écrivant $y = z + \tilde{y}$ et en vérifiant que z est alors solution d'une équation de Bernoulli (dont les coefficients dépendent de a, b, c **ET** de \tilde{y}).

- Equations homogènes : ce sont les équations de la forme

$$y' = f(y/x).$$

On effectue le changement de fonction inconnue $z = y/x$ de sorte que

$$z' = \frac{f(z) - z}{x},$$

et on est ramenés à une équation à variables séparées. On peut montrer différentes propriétés géométriques pour ce type d'équation.

- Passage en coordonnées polaires. Dans certains cas, la résolution de certains systèmes peut être simplifiée en passant en coordonnées polaires. Par exemple

$$\begin{aligned}x' &= -y + x(x^2 + y^2), \\y' &= x + y(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

Si on pose $x = \rho \cos(\theta)$ et $y = \rho \sin(\theta)$ (justifier cette écriture !) on voit que

$$\begin{aligned}\rho' &= \rho^3, \\ \theta' &= 1.\end{aligned}$$

ce qui permet de calculer complètement la solution.

5 Etude des systèmes autonomes

On considère un système différentiel autonome (i.e. le paramètre de temps t n'apparaît pas dans l'équation) de la forme

$$y' = F(y),$$

où F est supposée suffisamment régulière (disons de classe \mathcal{C}^1).

5.1 Portrait de phase

Etablir un portrait de phase d'un système autonome (en général de dimension 1 ou 2 pour des raisons évidentes de commodité de représentation) consiste à tracer les images des trajectoires dans le plan de phase c'est-à-dire, pour toute solution maximale (J, y) , on représente l'ensemble

$$\{(y_1(t), y_2(t)) \mid t \in J\}.$$

Cet ensemble est ou bien réduit à un point, ou bien est une courbe \mathcal{C}^1 sans point singulier. L'ensemble de ces courbes forme une partition du plan, il est donc hors de question de les tracer toutes, mais seulement une partie significative d'entre elles afin de bien représenter le comportement du système.

En général, on représente également à l'aide de flèches le sens de parcours de chaque trajectoire (on sait que la trajectoire ne peut pas changer de sens de parcours au cours du temps, voyez-vous pourquoi ?)

N.B. : le portrait de phase ne contient pas explicitement d'information sur la variable de temps. Ainsi le système initial et le système $y' = \alpha F(y)$ ont exactement le même portrait de phases (toutes les solutions de l'un se déduisent des solutions de l'autre par une homothétie en temps de rapport α).

Afin de tracer ce portrait de phases, plusieurs éléments sont utiles à étudier :

- **Points d'équilibre** : Ce sont les points y tels que $F(y) = 0$. Ce sont des points fixe du système au sens où la fonction constante égale à y est solution du système.
- **Trajectoires particulières** : Toute trajectoire explicite "simple" donne des informations précieuses sur le système car toute autre trajectoire ne peut intersecter ces solutions. Par exemple, il peut être fréquent qu'il existe des solutions du système $t \mapsto y(t)$ pour laquelle l'une des coordonnées de $y(t)$ est constante (Cf. Lotka-Voltera par exemple).
- **Isoclines** : L'isocline $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est l'ensemble défini par

$$I_\alpha = \left\{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \frac{f_2(y_1, y_2)}{f_1(y_1, y_2)} = \alpha \right\}.$$

L'utilité de ces ensembles provient du résultat suivant :

Si C est l'image d'une solution du système dans le plan de phase (y_1, y_2) qui coupe l'isocline I_α en un point y^* , alors la tangente à la courbe C en ce point est de pente α . Les deux cas très utiles en pratique sont :

- l'isocline I_0 : une trajectoire qui coupe l'isocline a une tangente horizontale en ce point.
 - l'isocline I_∞ : une trajectoire qui coupe cette isocline a une tangente verticale en ce point.
- Les isoclines I_0 et I_∞ se "coupent" (pas tout à fait en réalité ...) en les points d'équilibre du système et délimitent des régions du plan où la trajectoire est monotone :

$$Q_{++} = \{y \in \mathbb{R}^2, f_1(y) > 0, f_2(y) > 0\},$$

$$Q_{+-} = \{y \in \mathbb{R}^2, f_1(y) > 0, f_2(y) < 0\},$$

$$Q_{-+} = \{y \in \mathbb{R}^2, f_1(y) < 0, f_2(y) > 0\},$$

$$Q_{--} = \{y \in \mathbb{R}^2, f_1(y) < 0, f_2(y) < 0\}.$$

Dans chacune de ces régions, les composantes y_1 et y_2 des solutions sont monotones (en particulier on peut déterminer aisément le sens de parcours des solutions).

5.2 Stabilité des points d'équilibre

Soit y^* un point d'équilibre du système, c'est-à-dire un point tel que $F(y^*) = 0$. On sait que que $t \mapsto y^*$ est une solution constante du système. La question de la stabilité consiste à essayer de comprendre le comportement du système pour une donnée initiale au voisinage de y^* .

Définition I.5.34

On dit que l'équilibre y^ est asymptotiquement stable (sous entendu en temps long) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute donnée initiale $y_0 \in B(y^*, \varepsilon)$, on a*

- *La solution y du problème de Cauchy pour la donnée $(0, y_0)$ est définie sur $[0, +\infty[$.*
- *La solution converge en temps long vers y^* : $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y^*$.*

On peut également définir la notion de **stabilité** (pas asymptotique) qui est un peu plus faible : on demande juste que les solutions $t \mapsto y(t)$ restent proches de y^* si y_0 est assez proche de y^* .

Etudier la stabilité d'un point d'équilibre est un problème difficile en général et donne lieu à de nombreux développements mathématiques très importants. On ne donnera ici qu'un seul exemple de tel résultat (voir l'exercice 35 pour le cas linéaire et l'exercice 34 pour un exemple non linéaire).

Théorème I.5.35 (Th. de Lyapounov, [Dem91, Sch91])

Soit y^ un point d'équilibre de F . Si la matrice Jacobienne de F en y^* a toutes ses valeurs propres de parties réelles strictement négatives, alors le point d'équilibre y^* est asymptotiquement stable.*

La morale de l'histoire, sous les hypothèses du théorème, c'est que le comportement des solutions au voisinage de y^* est entièrement décrit par le système linéaire obtenu en remplaçant $F(y)$ par son linéarisé $DF(y^*)y$.

Remarque I.5.36

La condition du théorème est suffisante mais non nécessaire. Dans les cas où cette condition n'est pas vérifiée, l'analyse peut-être beaucoup plus délicate et demander des outils plus puissants.

Pour information, il existe des résultats un peu plus précis (mais plus difficiles !) :

Théorème I.5.37 (Hartmann-Grobman)

Soit y^* un point d'équilibre de F . On suppose que la matrice jacobienne de F en y^* , notée A , n'a aucune valeur propre imaginaire pure (on dit que A est hyperbolique). Alors il existe un homéomorphisme φ d'un voisinage de 0 dans un voisinage U de y^* tel que les solutions du système $y' = F(y)$ dans U sont données par

$$y(t) = \varphi(e^{tA}\varphi^{-1}(y_0)).$$

Autrement dit, les trajectoires du système non linéaire sont homéomorphes à celles du système linéaire.

En général φ n'est pas un difféomorphisme ! De plus dans le cas où la matrice n'est pas hyperbolique, le résultat tombe en défaut. C'est le cas par exemple du système

$$\begin{cases} x' = \pm x(x^2 + y^2), \\ y' = \pm y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

6 Les équations d'ordre supérieur

Une équation différentielle scalaire d'ordre $k \geq 2$ est une équation différentielle de la forme

$$y^{(k)} = F(t, y, y', \dots, y^{(k-1)}), \quad (\text{I.20})$$

ou cette fois on cherche une fonction k fois dérivable sur son intervalle de définition.

Toutes les définitions précédemment introduites (solutions maximales, globales, etc ...) s'adaptent dans changement au cas présent

L'étude de ces équations est assez simple dès lors qu'on constate qu'elles sont équivalentes à des systèmes d'ordre 1 dans \mathbb{R}^k .

Proposition I.6.38

Un couple (J, y) est solution de (I.20) si et seulement si le couple $\left(J, Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(k-1)} \end{pmatrix} \right)$ est solution du système différentiel d'ordre 1

$$Y' = \mathcal{F}(t, Y),$$

où

$$\forall t \in I, \forall Y \in \mathbb{R}^k, \mathcal{F}(t, Y) = \begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_k \\ F(t, Y_1, Y_2, \dots, Y_k) \end{pmatrix}.$$

On constate alors que \mathcal{F} est continue et localement (resp. globalement) Lipschitzienne par rapport à sa variable d'état (i.e. la deuxième variable) si et seulement si la fonction F est continue et localement (resp. globalement) Lipschitzienne par rapport à ses variables d'état (i.e. ses $k - 1$ dernières variables).

On peut ainsi appliquer toute la théorie de Cauchy-Lipschitz et traiter le cas des équations linéaires comme on l'a fait précédemment en utilisant la transformation à un système d'ordre 1 de taille d .

Dans le cas linéaire

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y + b(t),$$

le système du premier ordre de taille n équivalent est donné par

$$Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_0(t) & a_1(t) & \cdots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix}}_{=A(t)} Y(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}}_{=B(t)}.$$

La matrice $A(t)$ a la forme d'une matrice compagnon. L'équation différentielle vérifiée par le Wronskien $w(t)$ d'une famille de solutions est donc donnée par

$$w'(t) = a_{n-1}(t)w(t),$$

soit encore

$$w(t) = w(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t a_{n-1}(s) ds \right).$$

En particulier, si $a_{n-1} = 0$, le wronskien est constant au cours du temps !

Dans le cas de coefficients a_i constants, la matrice A est exactement la matrice compagnon du polynôme

$$P(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_0.$$

C'est la raison pour laquelle vous avez sans doute appris dans les petites classes à résoudre "l'équation caractéristique" associée à l'équation différentielle (il s'agit juste de trouver les valeurs propres de A) et d'en déduire la forme générale des solutions. En fait, il s'agit de calculer l'exponentielle de tA sans le savoir ...

Si vous n'en avez pas l'habitude, la méthode de la variation de la constante doit **absolument** être faite en passant aux systèmes, sous peine de graves erreurs :

- Soit en utilisant directement la formule de Duhamel si vous vous en souvenez sans erreur ...
- Soit en faisant *varier les constantes* **sous la forme suivante** : si y_1, \dots, y_n est une base de solutions de l'équation homogène, on forme les fonctions

$$Y_i = \begin{pmatrix} y_i \\ y_i' \\ \vdots \\ y_i^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

et on cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme

$$Y(t) = \alpha_1(t)Y_1(t) + \dots + \alpha_n(t)Y_n(t),$$

où $\alpha_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions à déterminer. On voit alors que Y est solution de l'équation souhaitée si et seulement si

$$\alpha_1'(t)y_1(t) + \dots + \alpha_n(t)'y_n(t) = 0,$$

$$\alpha_1'(t)y_1'(t) + \dots + \alpha_n'(t)y_n'(t) = 0,$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\alpha_1'(t)y_1^{(n-2)}(t) + \dots + \alpha_n'(t)y_n^{(n-2)}(t) = 0,$$

$$\alpha_1'(t)y_1^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_n'(t)y_n^{(n-1)}(t) = b(t).$$

Les dérivées des α_i vérifient donc n équations, ce qui permet de les déterminer. Sous forme compacte, on écrit

$$W(t)\alpha'(t) = B(t),$$

où $\alpha'(t)$ est le vecteur des $\alpha_i'(t)$. Cette approche est bien sûr complètement équivalente à la formule de Duhamel mais permet de mener les calculs sans se souvenir de la formule générale.

Chapitre II

Les méthodes numériques à un pas

On s'intéresse dans cette section à l'étude de schémas numériques permettant d'obtenir des solutions approchées du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = F(t, y), & \text{sur } [0, T], \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Pour simplifier l'étude, on va supposer que F est globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état, sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$. On notera L sa constante de Lipschitz, i.e. un nombre tel que

$$\|F(t, y_1) - F(t, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|, \quad \forall t \in [0, T], \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d.$$

On supposera également que F est de classe \mathcal{C}^1 de sorte que la solution y du problème ci-dessus est globalement bien définie et de classe \mathcal{C}^2 .

1 La méthode d'Euler explicite

1.1 Définition et analyse de l'erreur

On se donne un nombre entier M et on pose $\Delta t = \frac{T}{M}$ et $t^n = n\Delta t$ pour $0 \leq n \leq M$.

La méthode d'Euler explicite revient à approcher la solution aux instants t^n du problème de Cauchy (II.1) par une relation de récurrence donnée par

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t F(t^n, y^n), \quad \forall 0 \leq n \leq M-1,$$

avec $y^0 = y_0$.

Définition II.1.1

Soit y la solution de (II.1). On appelle *erreur de consistance* (ou *erreur de troncature*) du schéma d'Euler explicite, la quantité

$$R^n = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{\Delta t} - F(t^n, y(t^n)), \quad \forall 0 \leq n \leq M-1.$$

L'erreur $e^n = y(t^n) - y^n$ vérifie alors l'équation

$$e^{n+1} = e^n + \Delta t (F(t^n, y(t^n)) - F(t^n, y^n)) + \Delta t R^n.$$

D'après le caractère Lipschitzien de F , on trouve

$$\|e^{n+1}\| \leq (1 + \Delta t L)\|e^n\| + \Delta t \|R^n\|.$$

D'après le lemme de Gronwall discret, et le fait que $e^0 = y^0 - y(0) = 0$, on obtient

$$\sup_{n\Delta t \leq T} \|e^n\| \leq \left(\sum_{n=0}^{M-1} \Delta t \|R^n\| \right) e^{LT}.$$

D'après les formules de Taylor, et le fait que y est solution du problème considéré, on obtient par calcul

$$\|R^n\| \leq \frac{\Delta t}{2} \sup_{[0,T]} \|y''\|,$$

ce qui prouve que

$$\sum_{n=0}^M \Delta t \|R^n\| \leq \Delta t \frac{T}{2} \|y''\|_\infty.$$

In fine, l'estimation d'erreur obtenue est bien d'ordre 1

$$\sup_{n\Delta t \leq T} \|e^n\| \leq \Delta t \frac{T}{2} \|y''\|_\infty e^{LT}.$$

Lemme II.1.2 (Lemme de Gronwall discret)

Soit $(z^n)_n$ une suite de nombres positifs avec $z^0 = 0$ et $C, L > 0$. On suppose que

$$\forall n \geq 0, z^{n+1} \leq C + L\Delta t \sum_{k=0}^n z^k,$$

alors on a

$$\forall n \geq 0, z^n \leq C e^{Ln\Delta t}.$$

Preuve :

On pose $h^n = C + L\Delta t \sum_{k=0}^n z^k$, de sorte que

$$h^{n+1} - h^n = L\Delta t z^{n+1} \leq L\Delta t h^n.$$

Il vient

$$h^{n+1} \leq (1 + L\Delta t)h^n \leq e^{L\Delta t} h^n,$$

et ainsi, on trouve

$$h^n \leq h^0 e^{Ln\Delta t} = C e^{Ln\Delta t},$$

d'où le résultat. ■

1.2 A propos de la stabilité

D'après ce qui précède, pour toute EDO raisonnable, la méthode d'Euler explicite converge à l'ordre 1. En particulier, elle est stable pour un pas de temps assez petit (c'est-à-dire que les erreurs ne sont pas amplifiées démesurément, voir le paragraphe 3.3). Pour tester plus précisément les propriétés de stabilité de la méthode, on étudie son comportement dans le cas linéaire.

Commençons par le cas $d = 1$. On regarde l'équation $y' = \lambda y$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ de partie réelle négative ou nulle. La solution exacte est donnée par $y(t) = e^{\lambda t} y_0$ et donc on a

$$|y(t)| = e^{\mathcal{R}e\lambda t} |y_0| \leq |y_0|, \quad \forall t \geq 0.$$

On va voir pour quelles valeurs des paramètres la méthode d'Euler explicite vérifie une propriété analogue. Dans le cas présent, la méthode s'écrit

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t \lambda y^n = (1 + \Delta t \lambda) y^n.$$

Elle dépend donc que du nombre complexe $z = \Delta t \lambda$ et on voit que la norme de y^n décroît si et seulement si

$$|1 + z| \leq 1 \iff z \in \overline{D}(-1, 1).$$

Le disque fermé $\overline{D}(-1, 1)$ est appelé **zone de A-stabilité de la méthode**¹.

On voit donc que, si λ est fixé, on a une condition sur Δt pour que le schéma se comporte de façon satisfaisante. En particulier, si λ est imaginaire pur, la norme de la solution augmentera au cours du temps, quelque soit le pas de temps choisi !!

On peut bien sûr faire la même analyse dans le cas vectoriel et regarder ce qui se passe pour l'équation $y' = Ay$ avec $A \in M_d(\mathbb{R})$. Si A est diagonalisable, on voit qu'il faut que toutes les valeurs propres de A multipliées par Δt soient dans la zone de A-stabilité définie plus haut.

1. La **A-stabilité** est parfois aussi appelée **stabilité absolue**

2 La méthode d'Euler implicite

2.1 Définition et analyse de l'erreur

Il s'agit maintenant de la méthode numérique suivante

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t F(t^{n+1}, y^{n+1}), \quad \forall 0 \leq n \leq M-1,$$

avec $y^0 = y_0$.

La première difficulté liée à cette nouvelle méthode provient justement de son caractère implicite. En effet, l'existence même d'une suite $(y^n)_n$ satisfaisant ces équations n'est plus évidente.

Cette question peut être résolue par le lemme suivant :

Lemme II.2.3

Si $L\Delta t < 1$, et $t \in \mathbb{R}$ est fixé, la fonction

$$\Psi_t : y \mapsto y - \Delta t F(t, y),$$

est bijective et son inverse est Lipschitzienne de constante de Lipschitz $(1 - L\Delta t)^{-1}$.

qui lui-même est une simple application du résultat suivant qui sera démontré par la suite :

Lemme II.2.4

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $\Phi : E \mapsto E$ une application contractante (i.e. k -Lipschitzienne avec $k < 1$), alors $\text{Id} - \Phi$ est inversible et son inverse est $(1 - k)^{-1}$ -Lipschitzienne.

On revient à l'analyse de la méthode d'Euler implicite.

Définition II.2.5

On définit l'erreur de consistance pour ce schéma comme

$$R^n = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{\Delta t} - \Delta t F(t^{n+1}, y(t^{n+1})).$$

Ainsi, l'erreur d'approximation $e^n = y(t^n) - y^n$ vérifie

$$e^{n+1} = e^n + \Delta t (F(t^{n+1}, y(t^{n+1})) - F(t^{n+1}, y^{n+1})) + \Delta t R^n,$$

ce qui s'écrit encore

$$\Psi_{t^{n+1}}(y(t^{n+1})) - \Psi_{t^{n+1}}(y^{n+1}) = e^n + \Delta t R^n.$$

D'après le lemme II.2.3, on a

$$\|e^{n+1}\| \leq \frac{1}{1 - L\Delta t} (\|e^n\| + \Delta t \|R^n\|) \leq \left(1 + \frac{L\Delta t}{1 - L\Delta t}\right) \|e^n\| + \frac{\Delta t}{1 - L\Delta t} \|R^n\|.$$

En appliquant le lemme de Gronwall discret, on trouve

$$\sup_{n\Delta t \leq T} \|e^n\| \leq \left(\frac{1}{1 - L\Delta t} \sum_{n=0}^M \Delta t \|R^n\| \right) e^{\frac{L\Delta t}{1 - L\Delta t} T}.$$

On peut vérifier que l'estimation de consistance est la même que précédemment

$$\|R^n\| \leq \frac{\Delta t}{2} \|y''\|_\infty.$$

On obtient finalement l'estimation

$$\sup_{n\Delta t \leq T} \|e^n\| \leq \Delta t \frac{T}{2(1 - L\Delta t)} \|y''\|_\infty e^{\frac{LT}{1 - L\Delta t}},$$

qui est donc du même type que celui obtenu pour la méthode explicite. La méthode d'Euler implicite est donc du premier ordre.

Il reste à prouver le résultat admis ci-dessus :

Preuve (du Lemme II.2.4):

Pour tout $y \in E$, on introduit la fonction $F_y : x \in E \mapsto F_y(x) = y + \Phi(x)$. Par hypothèse, celle-ci est contractante et admet donc un unique point fixe d'après le théorème du point fixe de Banach. Ainsi

$$\forall y \in E, \exists ! x \in E, y = x - \Phi(x),$$

ce qui montre bien la bijectivité de $\text{Id} - \Phi$. Si maintenant x_1, x_2, y_1, y_2 vérifient $y_1 = x_1 - \Phi(x_1)$ et $y_2 = x_2 - \Phi(x_2)$, on a

$$x_1 - x_2 = y_1 - y_2 + \Phi(x_1) - \Phi(x_2),$$

et donc

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|y_1 - y_2\| + k\|x_1 - x_2\|,$$

ce qui fournit

$$\|x_1 - x_2\| \leq \frac{1}{1-k} \|y_1 - y_2\|,$$

c'est-à-dire le résultat attendu. ■

Remarquons que dans le cas linéaire (i.e. si $\Phi \in L(E)$), ce résultat est souvent appelé le Lemme de Neumann et il dit juste que si Φ est linéaire et de norme $\|\Phi\| < 1$ alors $\text{Id} - \Phi$ est inversible (d'inverse continu) et on a

$$(\text{Id} - \Phi)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \Phi^k,$$

la série étant normalement convergente dans $L(E)$.

2.2 A propos de la stabilité

Ré faisons l'analyse de stabilité effectuée précédemment pour la méthode explicite. Sur l'équation $y' = \lambda y$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$ de partie réelle négative, la méthode s'écrit

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t \lambda y^{n+1},$$

et admet toujours une unique solution (car $\Delta t \lambda$ ne peut jamais être égal à 1) donnée par

$$y^{n+1} = (1 - \Delta t \lambda)^{-1} y^n,$$

et de plus, en posant $z = \Delta t \lambda$ on a

$$|y^{n+1}| = |1 - z|^{-1} |y^n|,$$

dont la méthode est A-stable si et seulement si

$$|1 - z| \geq 1 \iff z \notin D(1, 1).$$

Comme $\Delta t > 0$ et $\text{Re} \lambda \leq 0$, on voit que cette condition est toujours remplie, quelque soit la valeur des paramètres.

La méthode d'Euler implicite est donc inconditionnellement A-stable.

2.3 Un petit tour vers l'équation de la chaleur

Quand on discrétise en espace l'équation de la chaleur (ou par une méthode de différences finies, ou par une méthode de Fourier), on est ramenés à résoudre le problème semi-discret suivant

$$y' = A_h y,$$

où $h > 0$ est le paramètre de discrétisation en espace et $y \in \mathbb{R}^N$ avec N grand ($N \sim 1/h$ dans le cas monodimensionnel par exemple).

Dans le cas des différences finies 1D sur maillage régulier, la matrice A_h a la forme usuelle suivante

$$\frac{-1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ses valeurs propres sont réelles et négatives. La plus grande en module est de l'ordre de $4/h^2$.

Ainsi, si on applique une méthode d'Euler explicite à cette équation, la condition de A-stabilité devient $\Delta t |\lambda_{max}| \leq 2$, c'est-à-dire

$$\Delta t \leq \frac{h^2}{2}.$$

Cette condition est dramatiquement contraignante car elle oblige à prendre un pas de temps beaucoup plus petit que le pas d'espace (ce qui a en particulier pour conséquence d'augmenter énormément les temps de calcul).

A contrario, la méthode d'Euler implicite pour ce problème est inconditionnellement stable. Bien entendu (comme on a rien sans rien), cette méthode demande la résolution d'un gros système linéaire à chaque étape. C'est pourquoi on a aussi besoin de méthodes efficaces pour les systèmes linéaires.

Remarque II.2.6

On dit souvent de façon abusive que la méthode d'Euler implicite est plus stable que la méthode explicite. Il faut prendre garde que ceci n'est vrai que dans le cadre de problèmes "dissipatifs" c'est-à-dire ceux pour lesquels la A-stabilité est la bonne notion.

Si d'aventure on s'intéresse à des problèmes du type $y' = \lambda y$ avec $\text{Re} \lambda > 0$, alors c'est exactement l'inverse qui se produit : la méthode explicite est plus stable que la méthode implicite.

3 Quelques mots sur la théorie générale des méthodes à un pas

Cette partie a pour vocation de vous introduire brièvement à une théorie générale des schémas présentée notamment dans [Dem91, CM84]. Dans l'optique de la préparation à l'option de l'agrégation, il est plus important de comprendre les idées que le détail des preuves et des résultats, d'autant plus que les notations, les définitions, etc ... peuvent changer d'un auteur à un autre.

3.1 Introduction

On considère maintenant une méthode numérique à un pas (constant) écrite sous la forme générale suivante

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t \Phi(t^n, y^n, \Delta t), \quad (\text{II.2})$$

où Φ est une fonction continue de ses arguments.

Revenons sur les exemples précédents :

— Euler explicite :

$$\Phi(t^n, y^n, \Delta t) = F(t^n, y^n).$$

— Euler implicite :

$$\Phi(t^n, \cdot, \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} ((\text{Id} - \Delta t F(t^n + \Delta t, \cdot))^{-1} - \text{Id}),$$

à condition bien sûr que cette fonction soit inversible.

On voit dans ce dernier exemple qu'il n'est pas toujours aisé, ni souhaitable, de mettre explicitement un schéma numérique sous la forme générale (II.2).

3.2 Erreur de consistance

Définition II.3.7

On appelle erreur de consistance d'un schéma sous la forme (II.2) associée à une solution exacte y de l'équation étudiée, la quantité

$$R^n = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{\Delta t} - \Phi(t^n, y(t^n), \Delta t).$$

ATTENTION : Cette définition est différente de celle que l'on trouve usuellement dans les livres (notamment dans le bouquin de Demailly). En effet, on trouve parfois la définition suivante

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) - \Delta t \Phi(t^n, y(t^n), \Delta t)$$

qui à mon sens est trompeuse car ce terme est petit quelque soit le choix de Φ !! Avec la définition de R^n ci-dessus, la consistance peut s'énoncer, au moins intuitivement sous la forme suivante :

Le schéma est consistant avec l'EDO proposée, si pour toute solution exacte de l'équation, l'erreur de consistance R^n , tend vers 0 avec le pas de temps, uniformément pour $0 \leq n \leq T/\Delta t$.

Remarque II.3.8

Dans le cas de la méthode d'Euler explicite, cette définition coïncide avec celle donnée dans la définition II.1.1. En revanche, pour la méthode d'Euler explicite, si on note \tilde{R}^n l'erreur de consistance définie dans la Définition II.2.5 et R^n celle définie ci-dessus, on peut montrer que

$$\|R^n\| \leq (1 - L\Delta t)\|\tilde{R}^n\|,$$

$$\|\tilde{R}^n\| \leq (1 + L\Delta t)\|R^n\|,$$

c'est-à-dire que les deux erreurs de consistance ainsi définies sont du même ordre.

Bien entendu, il faut adapter l'analyse de stabilité à la définition choisie de l'erreur de consistance.

Définition II.3.9

Le schéma est dit consistant à l'ordre p , si pour toute solution suffisamment régulière de l'EDO $y' = F(t, y)$, on a

$$\sup_{0 \leq n \leq T/\Delta t} \|R^n\| \leq C\Delta t^p.$$

Le schéma est simplement dit consistant si

$$\sup_{0 \leq n \leq T/\Delta t} \|R^n\| \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0.$$

Proposition II.3.10

Un schéma (II.2) est consistant si et seulement si

$$\Phi(t, y, 0) = F(t, y), \quad \forall t \in [0, T], \forall y \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{II.3})$$

Preuve :

— Montrons que la condition est suffisante. On utilise le théorème des accroissements finis

$$R^n = y'(\xi^n) - \Phi(t^n, y(t^n), \Delta t),$$

avec $\xi^n \in]t^n, t^{n+1}[$, puis le fait que y est solution de l'EDO et l'hypothèse (II.3) pour obtenir

$$R^n = F(\xi^n, y(\xi^n)) - \Phi(t^n, y(t^n), \Delta t) = \Phi(\xi^n, y(\xi^n), 0) - \Phi(t^n, y(t^n), \Delta t).$$

Si on note ω , le module d'uniforme continuité de Φ sur le compact $[0, T] \times y([0, T]) \times [0, T]$, on en déduit

$$\|R^n\| \leq \omega(|t^n - \xi^n| + \|y(\xi^n) - y(t^n)\| + \Delta t) \leq \omega(C\Delta t),$$

et ceci est valable pour tout $0 \leq n \leq T/\Delta t$ (car on utilise le fait que $t^n \in [0, T]$).

— Montrons que la condition est nécessaire. On va en fait montrer (II.3) pour $t = 0$. Le résultat général s'en déduit par translation en temps.

Soit $y_0 \in \mathbb{R}^d$ et soit y la solution du problème de Cauchy associé à la donnée $(0, y_0)$ et à l'EDO considérée. On calcule l'erreur de consistance au premier cran

$$R^0 = \frac{y(\Delta t) - y_0}{\Delta t} - \Phi(0, y_0, \Delta t).$$

Par hypothèse, cette quantité tend vers 0 avec Δt . Le premier terme tend vers $y'(0)$ et donc vers $F(0, y_0)$ et le second terme tend vers $\Phi(0, y_0, 0)$ car Φ est continue, ce qui prouve bien que

$$F(0, y_0) = \Phi(0, y_0, 0).$$

■

3.3 Stabilité

Définition II.3.11

Le schéma (II.2) est dit stable si le cumul des erreurs (d'approximation, de consistance, d'arrondis, etc..) au cours du calcul est contrôlé par la taille des erreurs commises.

Plus précisément cela signifie qu'il doit exister une constante M , indépendante du pas de temps, telle que pour tout pas de temps $\Delta t > 0$ et pour toutes suites $(y^n)_n, (\tilde{y}^n)_n, (\varepsilon^n)_n$ vérifiant

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t \Phi(t^n, y^n, \Delta t), \quad \forall n \geq 0,$$

$$\tilde{y}^{n+1} = \tilde{y}^n + \Delta t \Phi(t^n, \tilde{y}^n, \Delta t) + \varepsilon^n, \quad \forall n \geq 0,$$

on a

$$\sup_{0 \leq n \leq T/\Delta t} \|y^n - \tilde{y}^n\| \leq M \left(\|y^0 - \tilde{y}^0\| + \sum_{0 \leq k \leq T/\Delta t} \|\varepsilon^k\| \right).$$

Théorème II.3.12

Si Φ est Lipschitzienne par rapport à y (uniformément par rapport à $t \in [0, T]$ et $\Delta t \in [0, \Delta t_{max}]$) alors le schéma est stable.

Preuve :

Il s'agit simplement d'appliquer le lemme de Gronwall discret (Lemme II.1.2).

■

3.4 Convergence

Théorème II.3.13

Si le schéma (II.2) est stable et consistant à l'ordre p alors il est convergent à l'ordre p c'est-à-dire que

$$\sup_{0 \leq n \leq T/\Delta t} \|y^n - y(t^n)\| \leq C \Delta t^p,$$

où $(y^n)_n$ est la suite d'approximations obtenue par le schéma à partir de la donnée $y^0 = y_0$ et $t \mapsto y(t)$ est la solution exacte du problème de Cauchy.

Preuve.

Par définition de l'erreur de consistance R^n , la suite des valeurs exactes $\tilde{y}^n = y(t^n)$ vérifie

$$\tilde{y}^{n+1} = \tilde{y}^n + \Delta t \Phi(t^n, \tilde{y}^n, \Delta t) + \Delta t R^n.$$

On applique la propriété de stabilité puis la propriété de consistance, ce qui donne

$$\sup_{0 \leq n \leq T/\Delta t} \|y^n - \tilde{y}^n\| \leq M \sum_{0 \leq n \leq T/\Delta t} \Delta t \|R^n\| \leq MT \left(\sup_{0 \leq n \leq T/\Delta t} \|R^n\| \right) \leq C \Delta t^p.$$

■

3.5 Exemples d'autres méthodes

- Méthodes de Taylor : L'idée est de construire le schéma à partir du développement de Taylor de y . Notez que l'analyse de consistance est alors immédiate.

Par exemple, à l'ordre 2, on trouve

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t y'(t) + \Delta t^2 / 2 y''(t) + O(\Delta t^3).$$

On utilise alors l'équation pour écrire $y' = F(t, y)$ puis $y'' = \partial_t F(t, y) + D_y F(t, y) \cdot F(t, y)$ et ainsi obtenir le schéma d'ordre 2

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t F(t^n, y^n) + \Delta t^2 / 2 \left(\partial_t F(t^n, y^n) + D_y F(t^n, y^n) \cdot F(t^n, y^n) \right).$$

L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle nécessite le calcul de dérivées de F .

En guise d'exercice, vous pouvez étudier la A-stabilité de cette méthode, au moins pour des valeurs réelles de λ .

- Méthode de Heun (une méthode de Runge-Kutta d'ordre 2) :

$$y^{n+1} = y^n + \frac{\Delta t}{2} \left(F(t^n, y^n) + F(t^{n+1}, y^n + \Delta t F(t^n, y^n)) \right).$$

- Méthode du point-milieu

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t F \left(t^{n+\frac{1}{2}}, y^n + \frac{\Delta t}{2} F(t^n, y^n) \right).$$

Dans le cas linéaire autonome, cette méthode est la même que la précédente. Vous pouvez la-aussi étudier sa A-stabilité.

- Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) :

$$\begin{aligned} k_1 &= F(t^n, y^n), \\ k_2 &= F \left(t^n + \frac{\Delta t}{2}, y^n + \frac{\Delta t}{2} k_1 \right), \\ k_3 &= F \left(t^n + \frac{\Delta t}{2}, y^n + \frac{\Delta t}{2} k_2 \right), \\ k_4 &= F(t^{n+1}, y^n + \Delta t k_3), \\ y^{n+1} &= y^n + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}$$

Les inconnues intermédiaires k_1, k_2, k_3, k_4 sont des approximations de la pente de la corde entre la solution au temps t^n et celle au temps t^{n+1} . Il faut évidemment les recalculer à chaque pas de temps.

Cette méthode est d'ordre 4 et possède une assez grande zone de A-stabilité (assez compliquée à étudier néanmoins).

4 Compléments

4.1 Equations d'ordre supérieur

On peut appliquer toutes les idées précédentes aux équations d'ordre supérieur. Les notions de consistance, stabilité et convergence sont adaptées au cas par cas.

Une façon de faire (mais qui n'est pas la seule) est d'appliquer les schémas étudiés précédemment au système d'ordre 1 équivalent à l'équation considérée.

Considérons par exemple l'équation suivante

$$y'' + q(t)y = 0.$$

Si on écrit le système équivalent $Y' = A(t)Y$ et qu'on lui applique le schéma d'Euler explicite, on arrive facilement au schéma suivant

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\Delta t^2} + q(t^{n-1})y^{n-1} = 0, \quad \forall n \geq 1,$$

avec les données initiales

$$y^0 = y_0, \quad y^1 = y_0 + \Delta t \dot{y}_0.$$

On peut y préférer le schéma suivant

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\Delta t^2} + q(t^n)y^n = 0, \quad \forall n \geq 1,$$

qui a l'avantage d'être d'ordre 2.

Chapitre III

Exercices

Exercice 1 (Lemme de Gronwall à l'infini)

Soit $a \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$ et z, φ deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$ à valeurs réelles. On suppose que z est bornée, que φ est positive et que $\int_t^{+\infty} \varphi(s) ds < +\infty$, alors l'hypothèse.

Si z vérifie

$$z(t) \leq C + \int_t^{+\infty} \varphi(s)z(s) ds, \quad \forall t \geq a,$$

alors nous avons

$$z(t) \leq C \exp\left(\int_t^{+\infty} \varphi(s) ds\right), \quad \forall t \geq a.$$

On constate tout d'abord que comme z est bornée et φ est positive et intégrable à l'infini, le produit $z\varphi$ est une fonction absolument intégrable en $+\infty$. On peut donc, à bon droit, poser

$$h(t) = C + \int_t^{+\infty} \varphi(s)z(s) dx, \quad \forall t \geq a.$$

Cette fonction est dérivable en tout point et on a

$$h'(t) = -\varphi(t)z(t).$$

Comme φ est positive, on peut utiliser l'hypothèse et obtenir

$$h'(t) \geq -\varphi(t)h(t).$$

Posons maintenant

$$Z(t) = h(t) \exp\left(-\int_t^{+\infty} \varphi(s) ds\right),$$

et observons que

$$Z'(t) = (h'(t) + \varphi(t)h(t)) \times \exp\left(-\int_t^{+\infty} \varphi(s) ds\right) \geq 0.$$

Ainsi, la fonction Z est croissante sur $[a, +\infty[$. Comme sa limite en $+\infty$ est clairement égale à celle de h , c'est-à-dire C , on déduit que

$$Z(t) \leq C, \quad \forall t \geq a.$$

Ceci montre que

$$h(t) \leq C \exp\left(\int_t^{+\infty} \varphi(s) ds\right), \quad \forall t \geq a,$$

et nous donne le résultat car $z \leq h$ par hypothèse.

Exercice 2 (Lemme de Gronwall uniforme)

Soient y, g, h trois fonctions positives sur $[0, +\infty[$ vérifiant

$$y'(t) \leq g(t)y(t) + h(t), \quad \forall t \geq 0.$$

On suppose que

$$\int_t^{t+1} y(s) ds \leq k_1, \quad \int_t^{t+1} g(s) ds \leq k_2, \quad \int_t^{t+1} h(s) ds \leq k_3, \quad \forall t \geq 0$$

où k_1, k_2 et k_3 sont des constantes.

Montrer que

$$y(t) \leq (k_1 + k_3)e^{k_2}, \quad \forall t \geq 1.$$

On fixe $t \geq 0$, on prend $t \leq s \leq t + 1$ et on intègre l'inégalité différentielle

$$y(s) \leq y(t) + \int_t^s h(\tau) d\tau + \int_t^s g(\tau)y(\tau) d\tau.$$

Comme h est positive, on peut majorer l'intégrale entre t et s de h par k_3 , il vient

$$y(s) \leq y(t) + k_3 + \int_t^s g(\tau)y(\tau) d\tau, \quad \forall s \in [t, t + 1].$$

On applique le lemme de Gronwall sur $[t, t + 1]$ pour obtenir

$$y(s) \leq (y(t) + k_3) \exp\left(\int_t^s g(\tau) d\tau\right), \quad \forall s \in [t, t + 1].$$

Comme g est positive, on obtient la majoration

$$y(s) \leq (y(t) + k_3)e^{k_2}, \quad \forall s \in [t, t + 1].$$

Pour tout $s \geq 1$, on a donc l'inégalité précédente vérifiée pour $s - 1 \leq t \leq s$ et on peut intégrer par rapport à t

$$y(s) \leq \left(\int_{s-1}^s y(t) dt + k_3\right) e^{k_2} \leq (k_1 + k_3)e^{k_2}.$$

Ce qui est le résultat attendu.

Exercice 3 ([Gou94, p. 372])

Soit $q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , strictement positive et croissante.

Montrer que toutes les solutions de $y'' + q(t)y = 0$ sont bornées sur \mathbb{R}^+ .

Indication : on pourra multiplier l'équation par y' puis intégrer par parties entre 0 et t .

Soit y une solution de l'équation proposée. Suivons l'indication :

$$0 = \int_0^t y''y' + qyy' ds = \frac{1}{2}(y'(t)^2 + q(t)y(t)^2) - \frac{1}{2}(y'(0)^2 + q(0)y(0)^2) - \frac{1}{2} \int_0^t q' y^2 ds.$$

Il reste, en posant $C = y'(0)^2 + q(0)y(0)^2$

$$y'(t)^2 + q(t)y(t)^2 = C + \int_0^t \frac{q'}{q} qy^2 ds.$$

On peut donc appliquer le lemme de Gronwall à la fonction qy^2 et obtenir

$$q(t)y^2(t) \leq C \exp\left(\int_0^t \frac{q'}{q} ds\right) = C \exp(\log(q(t)) - \log(q(0))) = C'q(t).$$

En divisant par $q(t)$, on obtient la borne attendue.

Exercice 4 (Inégalités différentielles)

Soit $y : [0, +\infty[$ une fonction positive dérivable qui vérifie

$$y' + \nu y \leq A + By^2, \text{ sur } [0, +\infty[,$$

où $\nu > 0$, $A > 0$ et $B > 0$ sont données et vérifient $\nu^2 \geq 4AB$.

Montrer qu'il existe $M > 0$ qui dépend de ν , A et B telles que si $y(0) \leq M$, alors la fonction y est bornée sur $[0, +\infty[$ et vérifie $y(t) \leq M$ pour tout $t \geq 0$. On donnera une expression de M en fonction des paramètres. Montrer sur exemple que cette valeur est optimale, c'est-à-dire que si $y(0) > M$ alors il peut arriver que la solution ne soit pas bornée.

Sous l'hypothèse entre A , B et ν , le polynôme $By^2 + A - \nu y$ admet deux racines réelles positives éventuellement confondues (d'après les signes des coefficients). On note

$$M = \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 - 4AB}}{2B},$$

la plus grande des deux racines et $0 < N \leq M$ la plus petite. On a donc l'inégalité différentielle suivante

$$y' \leq B(y - M)(y - N),$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$(y - M)' \leq B(y - M)(y - N).$$

On déduit immédiatement que pour tout t , on a

$$y(t) - M \leq (y(0) - M) \exp\left(B \int_0^t (y - N) ds\right).$$

On observe ainsi que si $y(0) \leq M$, on a bien $y(t) \leq M$ pour tout $t \geq 0$.

Supposons maintenant que $y(0) > M$ et que y soit solution exacte de l'équation différentielle

$$y' + \nu y = A + By^2,$$

soit encore en posant $z = y - M$

$$z' = Bz(z + C),$$

où $C = M - N \geq 0$. On a donc $z(0) > 0$ et cette fois

$$z' \geq Bz^2,$$

ce qui montre que z est strictement croissante et ne peut être bornée car sinon elle serait globale (théorème d'explosion en temps fini) et aurait une limite en l'infini qui serait un zéro strictement positif du polynôme $z(z + C)$, ce qui n'existe pas. Ainsi la fonction z (et donc y) ne peut être bornée sur son intervalle de définition.

On va montrer qu'en fait la fonction z (et donc y) explose en temps fini. Sur son intervalle maximal d'existence $[0, T^*[,$ on peut écrire

$$-\frac{z'}{z^2} \leq -B,$$

et donc

$$\frac{1}{z(t)} - \frac{1}{z(0)} \leq -Bt,$$

ce qui donne

$$0 < \frac{1}{z(t)} \leq \frac{1}{z(0)} - Bt.$$

On voit que ceci n'est possible que pour $t < \frac{1}{z(0)B}$ et donc T^* ne saurait être plus grand que cette valeur.

Exercice 5 (Groupes à un paramètre de matrices, inspiré de [GT98, p. 117])

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow M_d(\mathbb{R})$ une application continue qui vérifie

$$\varphi(t+s) = \varphi(t) \cdot \varphi(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Montrer qu'il existe $0 \leq k \leq d$, une matrice $A \in M_k(\mathbb{R})$ et une matrice $P \in GL_d(\mathbb{R})$ telle que

$$\varphi(t) = P^{-1} \begin{pmatrix} e^{tA} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On pourra commencer par étudier le cas où $\varphi(0)$ est inversible.

On commence par prendre $s = t = 0$

Exercice 6

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application continue et localement Lipschitzienne par rapport à la variable d'état. On suppose qu'il existe des fonctions continues et positives $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que f vérifie

$$(f(t, x), x) \leq a(t)\|x\|^2 + b(t), \quad \forall t \in I, \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Ici, on a noté (\cdot, \cdot) le produit scalaire euclidien sur \mathbb{R}^d .

Montrer que pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^d$, le problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ admet une unique solution globale en temps positif (i.e. définie sur $[t_0, +\infty[\cap I$).

Discuter, dans le cas $d = 1$, la globalité en temps positif des solutions de l'équation $x' = x - x^3$ et de l'équation $x' = x + x^3$.

L'existence et l'unicité de la solution maximale découle du théorème de Cauchy-Lipschitz dont les hypothèses sont ici vérifiées, d'après l'énoncé.

De façon usuelle, pour montrer la globalité (en temps positif) il s'agit de raisonner par l'absurde en supposant que la borne supérieure de l'intervalle d'existence de la solution maximale (notée β) est dans l'intervalle I . D'après le théorème d'explosion en temps fini, on sait dès lors que la solution x doit exploser au voisinage de β

$$\limsup_{t \rightarrow \beta^-} \|x(t)\| = +\infty. \quad (\text{III.1})$$

Calculons la dérivée en temps de $t \mapsto \|x(t)\|^2$ (la norme choisie sur \mathbb{R}^d étant la norme euclidienne. Il vient

$$\frac{d}{dt} \|x(t)\|^2 = 2(x'(t), x(t)) = 2(f(t, x(t)), x(t)) \leq 2a(t)\|x(t)\|^2 + 2b(t), \quad \forall t \in [t_0, \beta[.$$

Par hypothèse, on a $[t_0, \beta] \subset I$ et sur cet intervalle compact les fonctions continues a et b sont donc bornées. On note A_β et B_β leurs bornes respectives (qui dépendent de β). L'inégalité précédente devient

$$\frac{d}{dt} \|x(t)\|^2 \leq 2A_\beta \|x(t)\|^2 + 2B_\beta, \quad \forall t \in [t_0, \beta[.$$

A ce stade, il faut en déduire une borne sur $\|x(t)\|^2$. Deux méthodes (très similaires en fait) sont possibles

— Méthode 1 : on intègre l'inégalité précédente entre t_0 et t

$$\|x(t)\|^2 \leq \|x(t_0)\|^2 + \underbrace{2(t-t_0)B_\beta}_{\leq 2(\beta-t_0)B_\beta} + 2A_\beta \int_{t_0}^t \|x(s)\|^2 ds, \quad \forall t \in [t_0, \beta[.$$

puis on utilise le lemme de Gronwall qui nous donne

$$\|x(t)\|^2 \leq (\|x(t_0)\|^2 + 2(\beta-t_0)B_\beta) e^{2A_\beta(t-t_0)} \leq (\|x(t_0)\|^2 + 2(\beta-t_0)B_\beta) e^{2A_\beta(\beta-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, \beta[.$$

— Méthode 2 : on raisonne directement sur l'inéquation différentielle en posant

$$z(t) = \|x(t)\|^2 e^{-2A_\beta(t-t_0)},$$

et en vérifiant que

$$z'(t) \leq 2B_\beta e^{-2A_\beta(t-t_0)} \leq 2B_\beta,$$

d'où

$$z(t) \leq z(t_0) + 2B_\beta(t - t_0) \leq \|x(t_0)\|^2 + 2B_\beta(\beta - t_0), \quad \forall t \in [t_0, \beta[,$$

ce qui est équivalent à la borne obtenue dans la première méthode.

La borne ainsi obtenue (indépendante de t !!) contredit la propriété d'explosion en temps fini (III.1).

Traisons les exemples proposés.

1. Cas $f(t, x) = x - x^3$. On a ici

$$(f(t, x), x) = f(t, x)x = x^2 - x^4 \leq x^2,$$

et donc l'hypothèse est vérifiée avec $a(t) = 1$ et $b(t) = 0$. Les solutions sont donc globales en temps positif.

2. Cas $f(t, x) = x + x^3$. Ici, on obtient

$$(f(t, x), x) = x^2 + x^4,$$

et il est donc clair que cette fonction ne rentre pas dans le cadre proposé dans cet exercice. On peut néanmoins étudier les solutions de ce problème.

- Si $x_0 = 0$, l'unique solution est la solution nulle.
- Si $x_0 < 0$, on peut changer x en $-x$ et se ramener au cas où $x_0 > 0$.
- Si $x_0 > 0$, on sait que la solution reste toujours strictement positive sur son intervalle de définition (sinon elle s'annulerait en un certain point, ce qui n'est pas possible par unicité dans Cauchy-Lipschitz car elle n'est pas identiquement nulle). On a donc en particulier

$$x' = x + x^3 \geq x^3,$$

et on peut diviser par x^3 (qui n'est jamais nul) pour obtenir

$$\frac{x'}{x^3} \geq 1,$$

ou encore

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -2\frac{x'}{x^3} \leq -2.$$

Il vient, pour tout t dans l'intervalle de définition de x

$$\frac{1}{x(t)^2} \leq -2(t - t_0) + \frac{1}{x_0^2}.$$

Si la solution était globale en temps positif, on aurait pour $t = t^* = t_0 + \frac{1}{2x_0^2}$,

$$\frac{1}{x(t^*)^2} \leq 0,$$

ce qui n'est pas possible. Ceci montre que la solution ne peut en aucun cas être définie sur un intervalle de temps contenant t^* . Elle n'est donc pas globale.

Exercice 7 (Lemme d'Osgood, [CLF96, page 82])

Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ une fonction uniformément continue dont on note ω le module de continuité

$$\omega(\delta) = \sup_{\|x-y\| \leq \delta} \|f(x) - f(y)\|.$$

On notera que ω est croissante, positive et tend vers 0 en 0. On suppose que

$$\int_0^1 \frac{1}{\omega(s)} ds = +\infty.$$

1. Montrer que si $u : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ est continue positive et vérifie

$$u(t) \leq a + \int_0^t \omega(u(s)) ds, \quad \forall t \geq 0,$$

avec $a > 0$, alors on a

$$\Omega(u(t)) \leq \Omega(a) + t, \quad \forall t \geq 0$$

où on a posé

$$\Omega(z) = \int_1^z \frac{1}{\omega(s)} ds, \quad \forall z > 0, \quad \text{et } \Omega(0) = -\infty.$$

2. En déduire que si $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifie

$$u(t) \leq \int_0^t \omega(u(s)) ds, \quad \forall t \geq 0,$$

alors u est nulle sur $[0, +\infty[$.

3. Montrer que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^d$, il existe une unique solution globale au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

4. On suppose que $d = 1$. Montrer que pour tout $y_0 \in]-1, 1[$, il existe une unique solution **globale** au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \log |y| \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

et que celle-ci vérifie $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

On remarque tout d'abord que la convention $\Omega(0) = -\infty$ est raisonnable au vu de l'hypothèse de non-intégrabilité de $1/\omega$ en 0. La fonction Ω ainsi construite est continue de $[0, +\infty[$ dans $[-\infty, +\infty[$.

1. Inspirons nous de la démonstration du lemme de Gronwall (qui est d'ailleurs un cas particulier du résultat attendu, si par exemple $\omega(s) = s$). On pose donc

$$h(t) = a + \int_0^t \omega(u(s)) ds.$$

Il s'agit d'une fonction de classe C^1 (strictement positive) dont la dérivée vérifie

$$h'(t) = \omega(u(t)) \leq \omega(h(t)),$$

car ω est croissante et $u \leq h$ par hypothèse.

On calcule maintenant la dérivée de $\Omega(h(t))$

$$\frac{d}{dt} \Omega(h(t)) = \frac{h'(t)}{\omega(h(t))} \leq 1.$$

Par intégration, il vient

$$\Omega(h(t)) \leq \Omega(h(0)) + t = \Omega(a) + t.$$

On conclut en remarquant que Ω est elle-même croissante (sa dérivée est $1/\omega$ qui est positive), ce qui implique que

$$\Omega(u(t)) \leq \Omega(h(t)) \leq \Omega(a) + t.$$

Notez que cette inégalité est valable même si $u(t) = 0$ grâce à la convention $\Omega(0) = -\infty$.

2. Si u vérifie l'hypothèse proposée, elle vérifie en particulier l'hypothèse de la question précédente pour toute valeur de $a > 0$. En conséquence, pour tout $t > 0$, on a

$$\Omega(u(t)) \leq \Omega(a) + t, \text{ et ce pour tout } a > 0.$$

Si on fait tendre a vers 0, le membre de droite tend vers $-\infty$, ceci n'est possible que si $u(t) = 0$ sinon $\Omega(u(t))$ aurait une valeur finie.

On a bien montré que u est nulle.

3. L'existence d'au moins une solution est donnée par le théorème de Cauchy-Arzela-Peano (la continuité de f est ici suffisante). Pour montrer l'unicité locale (et donc l'unicité d'une solution maximale par l'argument usuel), procédons comme dans le cas Lipschitzien. Soient y_1 et y_2 deux solutions du problème de Cauchy considéré définies sur un intervalle commun $J = [-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$. On a donc

$$y_1(t) = y_0 + \int_0^t f(y_1(s)) ds, \quad \forall t \in J,$$

$$y_2(t) = y_0 + \int_0^t f(y_2(s)) ds, \quad \forall t \in J.$$

Par soustraction et majoration, on trouve

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq \left| \int_0^t |f(y_1(s)) - f(y_2(s))| ds \right| \leq \left| \int_0^t \omega(|y_1(s) - y_2(s)|) ds \right|.$$

Pour $t \in [0, \alpha]$, on a donc

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq \int_0^t \omega(|y_1(s) - y_2(s)|) ds,$$

et donc le résultat de la question précédente (appliqué à $u = |y_1 - y_2|$) nous dit que $y_1 = y_2$ sur $[0, \alpha]$.

On traite de façon similaire le cas de l'intervalle $[-\alpha, 0]$ (par exemple en posant $u(t) = |y_1(-t) - y_2(-t)|$).

Pour obtenir la globalité des solutions, il suffit de constater que, comme f est uniformément continue, il existe $\delta_0 > 0$ tel que $\omega(\delta_0) \leq 1$. On a alors, pour tout x, y

$$\|f(x) - f(y)\| \leq E \left(\frac{\|x - y\|}{\delta_0} \right) + 1 \leq \frac{\|x - y\|}{\delta_0} + 1,$$

(découper le segment joignant x à y en sous-segments de taille δ_0 et utiliser l'inégalité triangulaire). En particulier, on a

$$\|f(x) - f(0)\| \leq 1 + \frac{\|x\|}{\delta_0},$$

ou encore

$$\|f(x)\| \leq \|f(0)\| + 1 + \frac{1}{\delta_0} \|x\|.$$

Ainsi f est sous-linéaire et l'argument usuel à base de lemme de Gronwall montre qu'il ne peut y avoir d'explosion en temps fini.

4. Cette question est un peu plus délicate. On ne peut appliquer directement ce qui précède car $f(y) = y \log |y|$ n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R} (sinon elle serait sous-linéaire d'après le calcul de la question précédente ...).

— Commençons par traiter le cas $y_0 = 0$. La fonction nulle $y(t) = 0$ est clairement solution (globale) du problème. Toute autre solution vérifie, pour $t \geq 0$

$$|y(t)| \leq \int_0^t |y(s)| |\log |y(s)|| ds,$$

et de plus, il existe un $t^* > 0$ tel que $y(t) \in [0, 1/e]$ pour $t \in [0, t^*]$.

On peut donc appliquer la question 2, avec $\omega(s) = s|\log s|$ qui vérifie bien l'hypothèse de non-intégrabilité (et qui est bien croissante sur $[0, 1/e]$; au-delà de $1/e$ on prolonge ω de n'importe quelle façon croissante et continue, par exemple par une fonction constante). On obtient donc que la solution y est nécessairement nulle sur l'intervalle $[0, t^*]$. De la même façon, on raisonne sur les temps négatifs et on montre ainsi que l'ensemble des points où y s'annule est un ouvert non vide de \mathbb{R} . Mais c'est également un fermé (image réciproque de $\{0\}$ par une fonction continue) et c'est donc nécessairement \mathbb{R} tout entier. On a bien montré l'unicité dans ce cas.

- Quitte à changer y en $-y$, on peut toujours supposer $y_0 > 0$. Introduisons $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(y) = y \log y$. Cette fonction est de classe \mathcal{C}^∞ sur son intervalle de définition. Ainsi le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et nous dit que le problème de Cauchy associé à la donnée initiale y_0 admet une unique solution maximale à valeurs dans $]0, +\infty[$. Par ailleurs, la fonction constante égale à 1 est clairement solution de l'équation. Par unicité dans Cauchy-Lipschitz, on déduit que notre solution y ne peut jamais valoir 1 (car $y_0 < 1$).

On en déduit donc que $y(t) < 1$ pour tout t dans l'intervalle de définition de y . Il s'en suit que $y' = y \log y < 0$ et donc que y est strictement décroissante et minorée par 0.

Si on note $\beta > 0$ la borne supérieure de son intervalle de définition, les propriétés précédentes montrent que y admet une limite en β . Si β était finie, le théorème de sortie de tout compact nous dit que cette limite est nécessairement 0. Ainsi, la fonction y serait prolongeable par continuité en β avec $y(\beta) = 0$ et on aurait donc affaire à une solution du problème de Cauchy associé à la donnée $y(\beta) = 0$. On a vu précédemment qu'une telle solution est nécessairement identiquement nulle, ce qui est une contradiction. On conclut de tout cela que la borne supérieure β est nécessairement infinie.

Si maintenant on note α la borne inférieure de l'intervalle de définition, comme y est décroissante et majorée par 1, elle possède nécessairement une limite en α qui est, de plus, plus grande que y_0 et en particulier non nulle. Tout ceci montre que la solution reste dans le compact $[y_0, 1] \subset]0, +\infty[$ au voisinage de α et donc que α ne peut être finie. On a donc $\alpha = -\infty$.

En conclusion, on a bien montré que y est définie sur tout \mathbb{R} (donc globale) et qu'elle tend vers 0 en $+\infty$. On pourrait également vérifier qu'elle tend vers 1 en $-\infty$.

Exercice 8 (Dérivation de fonctions non dérivables !)

Le but de l'exercice est de montrer que si $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, alors la fonction $|x|$ vérifie

$$|x|(t) = |x|(a) + \int_a^t \operatorname{sgn}(x(s)) x'(s) ds, \quad (\text{III.2})$$

où sgn est la fonction définie par

$$\operatorname{sgn}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \\ -1 & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

1. Pour tout $\varepsilon > 0$ on note

$$\beta_\varepsilon(u) = \frac{u^2}{\sqrt{u^2 + \varepsilon}}.$$

(a) Montrer que β_ε est de classe \mathcal{C}^1 .

(b) Montrer que β_ε converge simplement vers la fonction valeur absolue sur \mathbb{R} quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

(c) Montrer que β'_ε converge simplement vers la fonction sgn sur \mathbb{R} quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et que $|\beta'_\varepsilon(u)| \leq 2$ pour tout u et tout $\varepsilon > 0$.

2. Démontrer la formule (III.2).

3. Démontrer maintenant, sous les mêmes hypothèses que

$$x^+(t) = x^+(a) + \int_a^t \operatorname{sgn}^+(x(s)) x'(s) ds,$$

où x^+ désigne la partie positive de x : $x^+ = \max(0, x)$ et sgn^+ la partie positive de sgn .

1. (a) La quantité sous la racine carrée ne s'annulant manifestement jamais, le résultat est immédiat.
- (b) Pour $u = 0$, on a clairement $\beta_\varepsilon(0) = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui assure la convergence vers $|0| = 0$. Pour $u \neq 0$ on a clairement $\beta_\varepsilon(u) \rightarrow u^2/\sqrt{u^2} = |u|^2/|u| = |u|$.
- (c) Calculons la dérivée de β_ε

$$\beta'_\varepsilon(u) = \frac{2u\sqrt{u^2 + \varepsilon} - u^2(u^2 + \varepsilon)^{-1/2}u}{u^2 + \varepsilon} = \frac{2\varepsilon u + u^3}{(u^2 + \varepsilon)^{3/2}}.$$

Pour $u = 0$, on a donc $\beta'_\varepsilon(0) = 0$ qui converge bien le signe de 0 (qui conventionnellement est choisi nul).
Pour $u \neq 0$, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta'_\varepsilon(u) = \frac{u^3}{(u^2)^{3/2}} = \left(\frac{u}{|u|}\right)^{\frac{3}{2}} = \text{signe}(u).$$

2. On écrit d'abord pour tout ε

$$\beta_\varepsilon(x(t)) = \beta_\varepsilon(x(a)) + \int_a^t \beta'_\varepsilon(x(s))x'(s) ds.$$

Grâce aux propriétés démontrées plus haut sur les fonctions β_ε et leurs dérivées, on peut utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue et passer à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ dans cette formule (t étant fixé). On obtient le résultat.

3. Il suffit de constater que $x^+ = (x + |x|)/2$ et d'appliquer le résultat précédent.

Exercice 9 (Barrières. Entonnoirs. [CLF96, page 105])

Soit $y' = f(t, y)$ une équation différentielle avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Soit (J, y) une solution maximale du problème associée à la donnée de Cauchy $y(t_0) = y_0$.

1. Soit $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 vérifiant

$$\alpha'(t) < f(t, \alpha(t)), \quad \forall t \geq t_0, t \in J.$$

Montrer que si $y_0 \geq \alpha(t_0)$ alors

$$y(t) \geq \alpha(t), \quad \forall t \geq t_0, t \in J.$$

2. On suppose que f est localement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable.

- (a) Soit $T > 0$ tel que la solution y est définie sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$ (autrement dit $[t_0, t_0 + T] \subset J$).
Pour tout $\varepsilon > 0$ on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'_\varepsilon(t) = f(t, y_\varepsilon(t)) + \varepsilon, \\ y_\varepsilon(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Démontrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, la solution maximale de ce nouveau problème est également définie sur le même intervalle $[t_0, t_0 + T]$ et que l'on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|y_\varepsilon - y\|_{L^\infty(t_0, t_0 + T)} = 0.$$

- (b) Montrer que le résultat de comparaison de la question 1. demeure si on suppose seulement que l'on a l'inégalité large

$$\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)), \quad \forall t \geq t_0.$$

- (c) Au lieu d'introduire les approximations y_ε ci-dessus, montrer qu'on peut obtenir la même conclusion que la question précédente en utilisant les résultats de l'exercice 8.

3. Sous les mêmes hypothèses, montrer que si $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 et vérifie $\beta'(t) \geq f(t, \beta(t))$, $\forall t \geq t_0$ et $\beta(t_0) \geq y_0$ alors on a

$$y(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

4. **Application :** On pose $f(t, y) = y^2 - t$. On suppose que $t_0 \geq 0$ et $y_0 > 0$, montrer que la solution maximale du problème de Cauchy est bien définie sur l'intervalle $[t_0, t_0 + 1/y_0[$.

1. On suppose $y(t_0) \geq \alpha(t_0)$ et, par l'absurde on suppose que l'ensemble

$$S = \{t \in J \cap [t_0, +\infty[, y(t) < \alpha(t)\},$$

est non vide. On pose $t^* = \inf S$. Par continuité de y et α on a nécessairement $y(t^*) = \alpha(t^*)$.

En effet, dans le cas contraire, on aurait $y(t^*) < \alpha(t^*)$ et donc $t^* > t_0$ et il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $t_0 \leq t^* - \varepsilon < t^*$ et $y(t^* - \varepsilon) < \alpha(t^* - \varepsilon)$, autrement dit $t^* - \varepsilon$ serait dans S , ce qui contredit la définition de l'infimum.

Calculons maintenant la dérivée de $y - \alpha$ en t^*

$$(y - \alpha)'(t^*) = y'(t^*) - \alpha'(t^*) = f(t^*, y(t^*)) - \alpha'(t^*) = f(t^*, \alpha(t^*)) - \alpha'(t^*) > 0.$$

La fonction $y - \alpha$ est donc strictement croissante au voisinage de t^* (et nulle en t^*). On en déduit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $y - \alpha$ est positive sur $[t^*, t^* + \varepsilon]$. Ceci montre que $[t^*, t^* + \varepsilon] \cap S = \emptyset$ et contredit donc à nouveau la définition de l'infimum.

2. Dans la question précédente, on a utilisé de façon cruciale le fait que l'inégalité dans l'hypothèse était stricte (sinon on ne peut conclure que $y - \alpha$ est croissante au voisinage de t^*). Il faut donc s'y prendre différemment ici.

On souhaite montrer que $y \geq \alpha$, ce qui revient à montrer que $z = (\alpha - y)^+$ est identiquement nulle. Pour cela, on écrit (utilisant l'exercice 8)

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t \operatorname{sgn}^+(\alpha(s) - y(s))(\alpha - y)'(s) ds.$$

Par hypothèse, $z(t_0) = 0$ et $(\alpha - y)'(s) \leq f(s, \alpha(s)) - f(s, y(s))$ d'où

$$z(t) \leq \int_{t_0}^t \operatorname{sgn}^+(\alpha(s) - y(s))(f(s, \alpha(s)) - f(s, y(s))) ds = \int_{t_0}^t \frac{f(s, \alpha(s)) - f(s, y(s))}{\alpha(s) - y(s)} z(s) ds.$$

Comme f est continue et localement Lipschitzienne par rapport à la variable d'état, le quotient présent dans l'intégrale est borné sur tout intervalle de temps compact inclu dans J . Notons M une telle borne.

On déduit de tout cela que

$$z(t) \leq M \int_{t_0}^t z(s) ds, \quad \forall t \in [t_0, +\infty[\cap J.$$

Le lemme de Gronwall nous assure maintenant que z est nulle, ce qu'il fallait démontrer.

3. Il suffit d'adapter l'argument précédent très légèrement.
4. La fonction f proposée vérifie toutes les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. On cherche des fonctions α et β simples vérifiant les inégalités différentielles des questions précédentes.

On pose

$$\alpha(t) = y_0 - \frac{t^2 - t_0^2}{2}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\beta(t) = \frac{1}{1/y_0 - (t - t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \frac{1}{y_0}].$$

Par construction, on a $\alpha(t_0) = \beta(t_0) = y_0 = y(t_0)$ et de plus

$$\alpha'(t) = -t \leq -t + \alpha^2(t) = f(t, \alpha(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\beta'(t) = \beta^2(t) \geq \beta^2(t) - t, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \frac{1}{y_0}],$$

car $t_0 \geq 0$. Les résultats précédents nous disent que, tant que α , β et y sont définies, on a l'encadrement

$$\alpha(t) \leq y(t) \leq \beta(t).$$

En particulier, il ne peut pas se produire d'explosion dans l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + \frac{1}{y_0}]$, ce qui nous assure que la solution maximale est bien définie, au minimum, sur cet intervalle. Cet argument ne permet pas de prévoir ce qui se passe au-delà de cet intervalle.

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ localement Lipschitzienne. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^d$, on note $T(\alpha) \in]0, +\infty]$ le temps positif d'existence de la solution maximale du problème de Cauchy $x' = f(x)$, $x(0) = \alpha$.

1. Montrer que l'application T est semi-continue inférieurement :

$$\forall \alpha_0 \in \mathbb{R}^d, \quad T(\alpha_0) \leq \liminf_{\alpha \rightarrow \alpha_0} T(\alpha).$$

2. En étudiant l'exemple suivant, montrer que T n'est pas nécessairement continue

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2 x^4, \\ y' = 0. \end{cases}$$

3. Montrer que, si on suppose $d = 1$, alors T est continue.

On notera x_α la solution du pb de Cauchy pour la donnée α .

1. On se donne $0 < T^* < T(\alpha_0)$ quelconque, et on veut montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout α vérifiant $\|\alpha - \alpha_0\| \leq \delta$, on a $T(\alpha) \geq T^*$. On considère le compact

$$K = x_{\alpha_0}([0, T^*]) + \overline{B}(0, 1).$$

Sur celui-ci, F est Lipschitzienne (notons L sa constante de Lipschitz). On pose maintenant

$$\delta = e^{-LT^*},$$

et on va montrer que ce δ convient. On se donne donc un $\alpha \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|\alpha - \alpha_0\| \leq \delta$ et on veut montrer que $T(\alpha) \geq T^*$ et que $\|x_\alpha(t) - x_{\alpha_0}(t)\| \leq 1$ pour tout $t \in [0, T^*]$.

Supposons que ceci soit faux et notons donc

$$S = \{t \in [0, T(\alpha)[\cap]0, T^*[, \text{ tel que } \|x_\alpha(s) - x_{\alpha_0}(s)\| \leq 1, \forall s \in [0, t]\}.$$

Comme $\delta < 1$, cet ensemble est non-vide et contient un voisinage à droite de t_0 . Notons t^* sa borne supérieure. Il suffit maintenant de montrer que $t^* = T^*$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $t^* < T^*$.

Pour tout $t \in [0, t^*]$, on soustrait les définitions de x_α et x_{α_0}

$$x_\alpha(t) - x_{\alpha_0}(t) = \alpha - \alpha_0 + \int_0^t (f(x_\alpha(s)) - f(x_{\alpha_0}(s))) ds.$$

On remarque que, par définition de S , pour $t \in [0, t^*]$ on a $x_\alpha(t) \in K$ et $x_{\alpha_0}(t) \in K$. Prenant la norme et utilisant le caractère Lipschitzien de f , on obtient

$$\|x_\alpha(t) - x_{\alpha_0}(t)\| \leq \|\alpha - \alpha_0\| + L \int_0^t \|x_\alpha(s) - x_{\alpha_0}(s)\| ds, \quad \forall t \in [0, t^*].$$

Le lemme de Gronwall nous donne alors

$$\|x_\alpha(t) - x_{\alpha_0}(t)\| \leq \delta e^{Lt^*} = e^{-L(T^* - t^*)} < 1, \quad \forall t \in [t_0, t^*].$$

Ceci montre tout d'abord que x_α ne peut exploser avant le temps t^* et donc que $t^* < T(\alpha)$. Par ailleurs, par continuité, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$t^* + \varepsilon < T(\alpha),$$

$$t^* + \varepsilon < T^*,$$

$$\|x_\alpha(s) - x_{\alpha_0}(s)\| \leq 1, \quad \forall s \in [t^*, t^* + \varepsilon].$$

Tout ceci montre que $t^* + \varepsilon$ est dans S , ce qui contredit la définition de la borne supérieure de cet ensemble.

On a donc bien montré que $t^* = T^*$ ce qui, en particulier, implique que $T(\alpha) \geq T^*$. Le résultat est démontré.

2. Pour une donnée de Cauchy de la forme

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

, on est ramenés au problème de Cauchy $x' = x^2, x(0) = 1$ (savez-vous le justifier complètement ?) dont on sait que le temps d'existence est fini (et même exactement égal à 1 dans ce cas).

Alors que pour des données de la forme

$$\alpha_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix},$$

avec $\varepsilon > 0$, on peut montrer (le faire) que $T(\alpha_\varepsilon) = +\infty$. Comme il est clair que α_ε converge vers α_0 , on a bien montré la non-continuité de T .

3. Soit $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. Si $T(\alpha_0) = +\infty$, il n'y a rien à démontrer de plus car la propriété de semi-continuité donne automatiquement la continuité.

Supposons donc que $T(\alpha_0) < +\infty$. Ceci implique que $f(\alpha_0) \neq 0$ (sinon la solution x_{α_0} est la solution constante et donc $T(\alpha_0) = +\infty$). Quitte à changer y en $-y$, on peut supposer dans la suite que $f(\alpha_0) > 0$. Il existe donc un intervalle $I_0 = [\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta]$, avec $\delta > 0$ sur lequel f est positive. On note $m > 0$ un minorant de f sur cet intervalle.

— Pour $\alpha_0 - \delta < \alpha < \alpha_0$, on constate que la solution $t \mapsto x_\alpha(t)$ est strictement croissante tant qu'elle reste dans l'intervalle I_0 . Montrons que cette solution atteint α_0 en un temps $t(\alpha) > 0$ vérifiant

$$0 < t(\alpha) \leq \frac{|\alpha - \alpha_0|}{m}. \quad (\text{III.3})$$

En effet supposons que

$$x_\alpha \left(\frac{|\alpha - \alpha_0|}{m} \right) < \alpha_0.$$

On a alors

$$\alpha_0 - \alpha = \frac{\alpha_0 - \alpha}{m} m \leq \int_0^{\frac{|\alpha - \alpha_0|}{m}} f(x_\alpha(s)) ds = x_\alpha \left(\frac{|\alpha - \alpha_0|}{m} \right) - \underbrace{x_\alpha(0)}_{=\alpha},$$

ce qui est une contradiction.

On a donc montré

$$x_\alpha(t(\alpha)) = \alpha_0 = x_{\alpha_0}(0),$$

ce qui prouve par unicité dans Cauchy-Lipschitz que l'on a

$$x_{\alpha_0}(t) = x_\alpha(t + t(\alpha)), \quad \forall t < T(\alpha_0).$$

On en déduit que les temps d'existence vérifient

$$T(\alpha) = T(\alpha_0) + t(\alpha).$$

D'après l'estimation (III.3), on a vu que $t(\alpha) \rightarrow 0$ tend $\alpha \rightarrow \alpha_0$ par valeurs inférieures, ce qui prouve bien que $T(\alpha)$ tend vers $T(\alpha_0)$.

— Le cas de la limite $\alpha \rightarrow \alpha_0$ par valeurs supérieures se traite de façon identique.

Exercice 11

1. Trouver toutes les solutions maximales de l'équation

$$t^3 y' + y = 1.$$

2. Même question avec l'équation

$$-t^3 y' + y = 1.$$

Exercice 12

Résoudre explicitement le système différentiel

$$\begin{cases} x' = y + a(t), \\ y' = 2x - y + b(t), \end{cases}$$

où a et b sont deux fonctions continues sur \mathbb{R} données.

Exercice 13

1. Montrer que si A et B sont deux matrices qui commutent alors

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

2. Soit $t \in \mathbb{R} \mapsto A(t) \in M_d(\mathbb{R})$ une application. Montrer que si $A(t)$ et $A(s)$ commutent pour tous $t, s \in \mathbb{R}$, alors l'unique solution du problème de Cauchy $x' = A(t)x$, $x(0) = x_0$ est donnée par

$$x(t) = \exp\left(\int_0^t A(s) ds\right) \cdot x_0.$$

3. Résoudre le système différentiel

$$x' = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ -b(t) & a(t) \end{pmatrix} x,$$

où a et b sont des fonctions continues données.

4. Donner un exemple où le résultat de la question 2 tombe en défaut quand l'hypothèse de commutation n'est pas vérifiée.

Exercice 14 (Méthode d'Euler pour les systèmes linéaires à coefficients constants)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour toute matrice

$$\left\| e^A - \left(1 + \frac{A}{n}\right)^n \right\| \leq e^{\|A\|} - \left(1 + \frac{\|A\|}{n}\right)^n.$$

2. Soit $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $T > 0$. On note $y_T^N \in \mathbb{R}^n$, la solution approchée au temps T obtenue par la méthode d'Euler explicite à N pas appliquée à l'EDO

$$y' = Ay, \tag{III.4}$$

sur l'intervalle $[0, T]$.

Montrer que y_T^N converge vers la valeur de la solution exacte à l'instant T de l'équation (III.4) pour la donnée initiale y_0 .

Exercice 15 (Contrôlabilité des systèmes linéaires à coeffs constants)

Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n,k}(\mathbb{R})$. On fixe un $T > 0$.

1. Soit $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^k$ une fonction continue. Calculer explicitement la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t), \\ x_u(0) = 0. \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

2. On cherche à déterminer si pour toute cible $x_T \in \mathbb{R}^d$, il existe une fonction u pour laquelle la solution x_u de (III.5) vérifie

$$x_u(T) = x_T.$$

Si c'est le cas on dira que le système est contrôlable.

Pour cela, on introduit la matrice

$$K = \begin{bmatrix} A|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B \end{bmatrix} \in M_{n,nk}(\mathbb{R}),$$

et on veut montrer que le système (III.5) est contrôlable si et seulement si la matrice K est de rang n .

(a) Supposons que le système (III.5) n'est pas contrôlable.

i. En étudiant la structure de l'ensemble $\{x_u(T), u \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}^k)\}$ des états atteignables, montrer qu'il existe $\psi \in \mathbb{R}^k$, $\psi \neq 0$ tel que ${}^t\psi \cdot x_u(T) = 0$ pour toute fonction u .

ii. On choisit maintenant $u(t) = {}^tBe^{(T-t)A}\psi$. En déduire que ${}^t\psi e^{(T-t)A}B = 0$ pour tout $t \in [0, T]$ puis que ψ est dans le noyau de tK . Qu'en déduit-on sur le rang de K .

(b) Supposons maintenant que $\text{rang}(K) < n$ et montrons que le système n'est pas contrôlable.

i. Montrer qu'il existe $\psi \in \mathbb{R}^n$, $\psi \neq 0$ dans le noyau de tK .

ii. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a ${}^t\psi \cdot e^{sA} = 0$.

iii. Soit $u : [0, T] \times \mathbb{R}^k$ continue. Montrer que

$${}^t\psi \cdot x_u(T) = 0, \text{ pour toute fonction continue } u : [0, T] \times \mathbb{R}^k.$$

Conclure.

3. On suppose maintenant que le système est contrôlable (c'est-à-dire que le rang de K vaut n). On note $C = \{u \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}^k), x_u(T) = x_F\}$ l'ensemble des contrôles qui résolvent la question. Par hypothèse cet ensemble est non vide.

(a) Montrer qu'il existe un unique élément dans C de la forme $\tilde{u}(t) = {}^tBp(t)$ où p est solution de l'équation rétrograde

$$-p'(t) = {}^tAp(t).$$

(b) Comment, en pratique, calculeriez-vous ce contrôle \tilde{u} ?

(c) Montrer que

$$\int_0^T \|u(t)\|^2 dt > \int_0^T \|\tilde{u}(t)\|^2 dt, \quad \forall u \in C, u \neq \tilde{u}.$$

Exercice 16

Soit $\omega, \omega_0 \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation

$$x'' + \omega^2 x = \cos(\omega_0 t).$$

Exercice 17 ([CLF96, page 148])

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée et $a > 0$. Montrer qu'il y a une et une seule solution bornée à l'équation $y'' - a^2 y = f(t)$.

Exercice 18

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue intégrable. On considère l'équation différentielle

$$y'' + f(t)y = 0.$$

1. Montrer que si y est une solution bornée de l'équation, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} y' = 0$.
2. En déduire que l'équation admet au moins une solution non bornée. On pourra considérer le wronskien de deux solutions indépendantes.

Exercice 19 (Cf. [Pom94, p. 311])

On considère l'équation différentielle

$$y'' + y^3 = 0. \tag{III.6}$$

1. Montrer que pour toute solution de (III.6) on a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}(y')^2 + \frac{1}{4}y^4 \right) = 0.$$

En déduire que y et y' sont bornées sur leurs intervalles de définition.

Conclure que toutes les solutions sont globales. On fixe une solution y dans toute la suite.

2. Montrer que tout zéro de y est isolé.
3. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, y admet un zéro dans l'intervalle $[a, +\infty[$.
4. Soient $a_0 < a_1 < a_2$ trois zéros consécutifs de y . Montrer que y est périodique de période $T = a_2 - a_0$.

Exercice 20

1. En utilisant la formule de Duhamel (la variation de la constante), déterminer la solution générale de l'équation différentielle suivante

$$y'' + y = f(t),$$

où f est une fonction continue donnée.

2. Soit p une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $\int_{\mathbb{R}} |p(t)| dt < +\infty$. On considère l'équation

$$y'' + (1 + p(t))y = 0. \tag{III.7}$$

- (a) Montrer que toute solution de (III.7) est bornée sur \mathbb{R} .
- (b) Montrer que la seule solution de (III.7) qui tend vers 0 en $+\infty$ est la solution identiquement nulle.

Indication : On pourra utiliser le résultat de l'exercice 1

Exercice 21 (Principes de comparaison)

Soient q_1, q_2 deux fonctions continues sur \mathbb{R} . On considère y_1 et y_2 deux solutions respectivement de

$$y_1'' + q_1(t)y_1 = 0,$$

$$y_2'' + q_2(t)y_2 = 0.$$

On suppose que y_1 et y_2 ne sont pas identiquement nulles. De plus, on supposera que

$$q_2(t) \leq q_1(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que les zéros de y_1 et y_2 sont isolés.
2. Soient $\alpha < \beta$ deux zéros consécutifs de y_2 . Montrer que
 - Ou bien y_1 s'annule dans l'intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$.
 - Ou bien $q_1 = q_2$ sur $[\alpha, \beta]$ et y_1 et y_2 sont proportionnelles sur $[\alpha, \beta]$.
 On pourra étudier le Wronskien de y_1 et y_2 (même si ces deux fonctions ne sont pas solutions de la même équation!).
3. Dans le cas particulier $q_1 = q_2$, que peut-on déduire du résultat de la question précédente ?

Exercice 22 (Equation de Airy)

1. Démontrer que toute solution de l'équation de Airy

$$y'' + ty = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

peut se développer en série entière de rayon de convergence infini. Calculer les coefficients correspondants.

2. On note y_1 la solution correspondant à la donnée de Cauchy $(y_1(0), y_1'(0)) = (1, 0)$ et y_2 la solution correspondant à la donnée de Cauchy $(y_2(0), y_2'(0)) = (0, -1)$.
 - (a) Montrer que y_1 et y_2 ne s'annulent pas sur $]-\infty, 0[$, qu'elles y sont strictement convexes, strictement décroissantes et qu'elles tendent vers $+\infty$ en $-\infty$.

(b) Montrer que y_1 et y_2 ont une infinité dénombrable de zéros isolés sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On les notera respectivement $0 < \alpha_1^1 < \alpha_2^1 < \dots < \alpha_n^1 < \dots$ et $0 = \alpha_1^2 < \alpha_2^2 < \dots < \alpha_n^2 < \dots$

i. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^2 = +\infty.$$

ii. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\alpha_{n+1}^1 < \alpha_n^2 < \alpha_n^1.$$

iii. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_{n+1}^1 - \alpha_n^1| = 0.$$

On pourra essayer de montrer l'estimation plus précise

$$|\alpha_{n+1}^1 - \alpha_n^1| \leq \frac{\pi}{\sqrt{\alpha_n^1}}, \quad \forall n \geq 1.$$

3. On définit pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction

$$y(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(-tx + x^3/3) dx.$$

(a) Montrer que cette fonction est bien définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

(b) Montrer qu'elle est solution de l'équation de Airy.

(c) Montrer que $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$. Déterminer toutes les solutions de l'équation de Airy vérifiant cette propriété.

Exercice 23 (Solutions périodiques, voir par exemple [GT98, p. 119])

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localement lipschitzienne. Montrer que les seules solutions périodiques de l'équation $x' = f(x)$ sont les solutions constantes.
2. Montrer sur un exemple que ce résultat est spécifique à la dimension 1, autrement dit qu'il peut exister des solutions périodiques non triviales à l'équation autonome $x' = f(x)$ si $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, $d > 1$.
3. Soit $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue périodique de période T . On considère l'équation différentielle

$$x' = a(t)x.$$

- (a) Montrer que si $\int_0^T a(s) ds \neq 0$, alors seule la solution nulle est périodique.
 - (b) Montrer que si $\int_0^T a(s) ds = 0$, alors toute solution de l'équation est périodique de période T .
4. On se place maintenant en dimension $d > 1$. Soit $A : \mathbb{R} \rightarrow M_d(\mathbb{R})$ une application continue T -périodique.

(a) Montrer qu'il existe une unique matrice $R \in M_d(\mathbb{R})$ telle que toute solution de l'équation homogène $y' = A(t)y$ vérifie

$$y(t+T) = Ry(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(b) A quelle condition sur la matrice R existe-t'il des solutions T -périodiques non triviales de cette équation ?

(c) On suppose que l'équation homogène $y' = A(t)y$ n'a aucune solution T -périodique non triviale. Démontrer que pour toute application continue T -périodique $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ il existe une unique solution y de l'équation

$$y' = A(t)y + b(t),$$

qui soit T -périodique.

Exercice 24 (Solutions périodiques d'une EDO non-linéaire. [BG10, Exo 5.4, page 158])

On étudie l'équation

$$u'(t) = (1 + \cos(t))u - u^3. \quad (\text{III.8})$$

1. Montrer que le problème de Cauchy associé à (III.8) est bien posé pour toute donnée initiale $u_0 \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que toutes les solutions de (III.8) sont globales et que

$$u_0 > 0 \implies \forall t \in \mathbb{R}, u(t) > 0,$$

$$u_0 < 0 \implies \forall t \in \mathbb{R}, u(t) < 0.$$

3. On note $(t, u_0) \mapsto \varphi(t, u_0)$ le flot associé à l'équation (III.8) et $p(u_0) = \varphi(2\pi, u_0)$.

(a) Montrer que la solution de (III.8) est 2π -périodique si et seulement si on a

$$p(u_0) = u_0.$$

On va montrer dans la suite qu'il existe une unique valeur $u_0 > 0$ tel que $p(u_0) = u_0$ ce qui prouvera l'existence d'une unique solution périodique non triviale positive de l'équation.

(b) Calculer $p(0) = \varphi(2\pi, 0)$.

(c) On note $\psi(t, u_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_0}(t, u_0)$. Pour u_0 fixé, écrire l'équation différentielle satisfaite par $t \mapsto \psi(t, u_0)$.

Résoudre explicitement cette équation pour $u_0 = 0$, i.e. calculer explicitement $\psi(t, 0)$. En déduire la valeur de $p'(0)$.

(d) Montrer que p vérifie l'équation différentielle

$$p'(u_0) = e^{-4\pi} \left(\frac{p(u_0)}{u_0} \right)^3.$$

(e) Résoudre explicitement cette équation et en déduire qu'il existe un unique $u_0 > 0$ tel que $p(u_0) = u_0$.

Exercice 25 (Un peu de mécanique des milieux continus)

Soit $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on note $t \mapsto \varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi(t, x) = v(t, \varphi(t, x)), \\ \varphi(0, x) = x. \end{cases}$$

On rappelle que la divergence d'un champ de vecteurs est définie par

$$\operatorname{div} v = \sum_{i=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

1. Montrer que l'application $\varphi_t : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ est bijective.
2. Montrer que φ_t est de classe \mathcal{C}^1 et que sa matrice Jacobienne en tout point notée $J_t(x) \in M_d(\mathbb{R})$ vérifie $J_0(x) = \operatorname{Id}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et

$$\frac{d}{dt} J_t(x) = (\nabla v)(t, \varphi_t(x)) \cdot J_t(x).$$

3. Montrer que le déterminant Jacobien $|J_t(x)|$ vérifie

$$\frac{d}{dt}|J_t(x)| = (\operatorname{div} v)(t, \varphi_t(x)) |J_t(x)|.$$

4. Soit $\omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble mesurable borné. Pour tout $t \geq 0$, on note $\omega_t = \varphi_t(\omega_0)$. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ une fonction de classe C^1 . Montrer que

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\omega_t} f(t, x) dx \right) = \int_{\omega_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(fv) \right) dx, \quad \forall t \geq 0.$$

5. Montrer que si $\operatorname{div} v = 0$, alors le flot associé à v préserve le volume dans \mathbb{R}^d .

6. Dans le contexte de la mécanique des fluides, pourquoi l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial t} f + \operatorname{div}(fv) = 0$ est-elle appelée : équation de conservation de la masse ?

Exercice 26 (Modèles de croissance logistique)

On considère l'équation différentielle

$$N' = \alpha N \left(1 - \frac{N}{K} \right), \quad (\text{III.9})$$

où $\alpha > 0$ et $K > 0$ sont des données du problème. Cette équation modélise la croissance d'une population sujette à de la compétition interne (pour l'accès à la nourriture par exemple). Le nombre α représente le taux de croissance en l'absence de toute compétition et le nombre K est la population maximale que le système peut atteindre (c'est-à-dire en gros la quantité de nourriture disponible à tout instant).

1. Etudier les propriétés d'existence, unicité, globalité des solutions du problème de Cauchy associé à (III.9).
2. Montrer que si $N_0 \geq 0$ alors la solution associée admet une limite en $+\infty$ que l'on calculera.
3. Calculer explicitement les solutions de (III.9) pour $N_0 \geq 0$.
4. On considère maintenant un modèle où la quantité de nourriture disponible est une fonction périodique du temps (modélisation des phénomènes de saisons par exemple), par exemple sous la forme

$$N' = \alpha N \left(1 - \frac{1 + \gamma \cos(t)}{K} N \right), \quad (\text{III.10})$$

avec $0 < \gamma < 1$.

Calculer explicitement les solutions de (III.10) et comparer leur comportement à celui des solutions de (III.9). On pourra écrire l'équation vérifiée par $1/N$.

Exercice 27 (Equation du pendule)

On considère un pendule suspendu à un point fixe et soumis à la gravité. Celui-ci est composé d'une tige rigide dont on négligera le poids au bout de laquelle est accrochée une masse ponctuelle M . On note g l'accélération de la pesanteur et l la longueur du pendule.

On repère la position du pendule à tout instant grâce à l'angle θ entre la tige et la verticale.

1. Faire un dessin de la situation considérée. Quelles sont les forces subies par la masse M durant son mouvement ? En utilisant le principe fondamental de la dynamique (ou loi de Newton), montrer que l'angle θ vérifie l'équation différentielle suivante

$$\theta'' + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0. \quad (\text{III.11})$$

2. Démontrer que pour toute donnée de Cauchy (préciser !) l'équation (III.11) admet une unique solution globale (i.e. définie pour tout temps t).

3. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos(x))$.

Démontrer que pour toute solution $t \mapsto \theta(t)$ de (III.11), il existe $E_0 \in \mathbb{R}$ telle que

$$E(\theta(t), \theta'(t)) = E_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

4. Tracer dans le plan les lignes de niveau de la fonction E . On pourra s'aider du logiciel Scilab.

En déduire qu'il existe exactement trois types de solutions pour le problème (III.11) :

- Les solutions périodiques (ou constantes)
- Les solutions non bornées et telle que $t \mapsto \theta(t)$ est strictement monotone.
- Les solutions telles qu'il existe deux valeurs $\theta_{+\infty} \in \mathbb{R}$ et $\theta_{-\infty} \in \mathbb{R}$ telles que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = \theta_{+\infty}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \theta(t) = \theta_{-\infty}.$$

Exercice 28 (Modèle de Lotka-Volterra)

On s'intéresse à l'étude du système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = ax - bxy, \\ y' = -cy + dxy, \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

où les constantes a, b, c et d sont strictement positives.

1. Ce système a été introduit pour modéliser l'évolution des effectifs de population de proies (disons des sardines) et de prédateurs (disons des requins). Dans ces conditions, que représentent à votre avis les quantités $x(t)$ et $y(t)$ et interprétez les différents termes dans les équations considérées.
2. Démontrer que le problème admet une unique solution maximale pour toute donnée de Cauchy (x_0, y_0) .
3. Calculez explicitement ces solutions dans le cas où $x_0 = 0$ et $y_0 \neq 0$ puis dans le cas $x_0 \neq 0$ et $y_0 = 0$.
4. Démontrer que si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$, alors pour tout temps t en lequel la solution est définie on a $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$. Que pensez-vous de cette propriété du point de vue de la modélisation ?
5. Soit (x, y) une solution maximale pour une donnée initiale positive. Soit $T > 0$ tel que la solution est définie sur $[0, T[$.
 - Démontrer que x est bornée sur $[0, T[$.
 - En déduire que y est également bornée sur $[0, T[$.
 - Que peut-on déduire de ces deux résultats ?
6. Déterminer les points d'équilibre du système situés dans le quart de plan positif $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$. En utilisant les résultats vus en cours, pouvez-vous étudier la stabilité asymptotique de ces points d'équilibre ?
7. Pour tout $(x, y) \in Q$ on pose

$$H(x, y) = -c \log(x) + dx - a \log(y) + by.$$

Vérifier que si $t \mapsto (x(t), y(t)) \in Q$ est une solution de (III.12), alors il existe $H_0 \in \mathbb{R}$ telle que

$$H(x(t), y(t)) = H_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En déduire que les trajectoires du systèmes sont bornées.

8. Si $(x_0, y_0) \in Q$, montrer qu'il existe $T > 0$ tel que la solution $(x(t), y(t))$ de (III.12) est T -périodique. Montrer que l'on a

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{c}{d},$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{a}{b}.$$

9. En réalité, les sardines se nourrissent de plancton et celui-ci peut venir à manquer si elles sont en nombre trop important, ce qui a pour effet de ralentir leur croissance. Comment modéliserez-vous ce nouveau phénomène à partir du système (III.12) ? Que deviennent les résultats théoriques des questions 2 à 6 pour ce nouveau système ?

Exercice 29 (Les méthodes d'Euler dans le cas linéaire)

On s'intéresse dans cet exercice à la méthode d'Euler pour la résolution d'un problème de Cauchy linéaire dans \mathbb{R}^d de la forme

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0. \quad (\text{III.13})$$

Dans tout l'exercice on fixe un temps final de calcul $T > 0$. Si $M \geq 1$, on pose $\Delta t = \frac{T}{M}$ et $t^n = n\Delta t$ pour $0 \leq n \leq M$.

1. **Le cas scalaire :** On suppose ici $d = 1$. Calculer explicitement les itérées $(y^n)_n$ données par la méthode d'Euler explicite et vérifier (à la main) sur cet exemple la convergence de la méthode. Même question avec la méthode d'Euler implicite.

On suppose que $y_0 \geq 0$. Discuter, selon la valeur des paramètres $A \in \mathbb{R}$ et Δt , le signe des $(y^n)_n$ pour les deux méthodes étudiées. Quelles conclusions en tirez-vous ?

2. **Le cas défini négatif :** On revient au cas général $d \geq 1$ et on suppose que A est symétrique définie négative.

- (a) Montrer (avec un minimum de calculs !) que la solution exacte de (III.13) est bornée sur $[0, +\infty[$.
 (b) Montrer que la méthode d'Euler implicite pour ce problème est parfaitement définie pour toute valeur du pas de temps.
 (c) Montrer que la solution approchée $(y^n)_n$ obtenue par cette méthode est également bornée.

3. **Le cas antisymétrique :** On suppose que A est antisymétrique réelle.

- (a) Montrer que la norme euclidienne de la solution exacte de (III.13) est constante sur \mathbb{R} .
 (b) Etudier le comportement des suites $(\|y^n\|)_n$, où $(y^n)_n$ sont les approximations obtenues par les méthodes d'Euler explicite et implicite. Quels sont vos commentaires ?
 (c) Montrer que le schéma suivant est bien posé (avec $y^0 = y_0$)

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = A \frac{y^{n+1} + y^n}{2}, \quad \forall n \geq 0. \quad (\text{III.14})$$

Quel est le comportement, dans ce cas, de la suite $(\|y^n\|)_n$. Commentaires ?

- (d) Définir et estimer l'erreur de consistance pour le schéma (III.14). En déduire la convergence à l'ordre 2 de ce schéma vers la solution exacte.

Exercice 30

On s'intéresse dans cet exercice à l'équation différentielle ordinaire suivante

$$y' = \alpha y(1 - y), \quad (\text{III.15})$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre fixé. On se donne une donnée initiale $y_0 \in]0, 1[$. On rappelle que dans ce cas, la solution maximale du problème est globale et vérifie $y(t) \in]0, 1[$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. On s'intéresse à l'analyse de méthodes numériques pour approcher la solution de (III.15).

(a) On commence par étudier la méthode d'Euler explicite donnée par

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = \alpha y^n(1 - y^n), \quad \forall n \geq 0, \quad (\text{III.16})$$

avec la donnée initiale $y^0 = y_0$. On suppose dans toute la suite que $\alpha \Delta t < 1$.

i. En faisant une petite étude de la fonction $g : y \mapsto y + \Delta t \alpha y(1 - y)$, montrer que l'on a

$$\forall n \geq 0, \quad y^n \in]0, 1[.$$

ii. Montrer que la fonction $F : y \mapsto y(1 - y)$ est globalement Lipschitzienne sur $[0, 1]$. Quelle est sa constante de Lipschitz ?

iii. Montrer la convergence à l'ordre 1 de la méthode d'Euler explicite pour le problème considéré en adaptant (légèrement !) la démonstration vue en cours.

(b) Démontrer que si $\alpha \Delta t > 1$, il existe une valeur de la donnée initiale $y_0 \in]0, 1[$ telle que la première itération y^1 de la méthode d'Euler vérifie $y^1 > 1$. Pourquoi ceci n'est pas satisfaisant ?

(c) On propose une nouvelle méthode numérique qui va corriger le défaut de la méthode d'Euler mis en lumière dans la question précédente. Celle-ci est définie par

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = \alpha y^n(1 - y^{n+1}), \quad \forall n \geq 0. \quad (\text{III.17})$$

i. Montrer que si $y^n \in]0, 1[$, alors la formule (III.17) définit une unique valeur de y^{n+1} donc on donnera l'expression en fonction de y^n . Que pensez-vous de cette nouvelle méthode du point de vue de l'implémentation sur ordinateur ?

ii. Montrer, sans hypothèse sur α et Δt , que si $y^n \in]0, 1[$, alors on a $y^{n+1} \in]0, 1[$. Comparez au schéma d'Euler explicite étudié ci-dessus.

iii. En déduire que pour $y_0 \in]0, 1[$, la méthode numérique proposée définit une unique suite de valeurs approchées $(y^n)_n$ qui sont toutes dans l'intervalle $]0, 1[$.

iv. Définir l'erreur de consistance R^n associée au schéma (III.17) et à une solution exacte y du problème considéré.

v. Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall n \geq 0, \quad |R^n| \leq C \Delta t.$$

vi. On définit l'erreur d'approximation du schéma par $e^n = y(t^n) - y^n$, $\forall n \geq 0$. Démontrer que l'on a

$$\frac{e^{n+1} - e^n}{\Delta t} = \alpha e^n(1 - y(t^{n+1})) - \alpha y^n e^{n+1} + R^n, \quad \forall n \geq 0,$$

vii. En déduire que pour tout $n \geq 0$, on a

$$|e^{n+1}| \leq (1 + \alpha \Delta t)|e^n| + \Delta t |R^n|.$$

viii. En conclure à l'aide du lemme de Gronwall discret que, si on fixe le temps final $T > 0$, on a l'estimation d'erreur d'ordre 1

$$\sup_{n \leq \frac{T}{\Delta t}} |e^n| \leq C_T \Delta t,$$

où C_T est une constante dépendant de T .

Exercice 31

1. Résoudre l'équation $y' = |y|$ pour y à valeurs dans \mathbb{R} .
2. Résoudre l'équation $|y'| = y$ pour y à valeurs dans \mathbb{R} .

1. La fonction $y \mapsto |y|$ étant globalement Lipschitzienne, on est assurés de l'existence et l'unicité des solutions globales de tout problème de Cauchy. Résolvons le pb de Cauchy associé à la donnée $y(0) = y_0$ selon les valeurs de y_0 .

- Si $y_0 = 0$, l'unique solution est la solution nulle. La propriété d'unicité dans Cauchy-Lipschitz implique que toute autre solution ne s'annule jamais.
- D'après la remarque précédente, si y_0 n'est pas nul, la solution garde un signe constant. Si $y_0 > 0$, l'équation devient $y' = y$ dont la solution est

$$y(t) = y_0 e^t.$$

Si $y_0 < 0$, l'équation devient $y' = -y$ et la solution associée est

$$y(t) = y_0 e^{-t}.$$

2. Cette équation n'est pas sous la forme résolue, il faut donc prendre garde à ne pas dire de bêtise et essayer de se ramener à ce cas plus favorable.

- Si on suppose que y ne s'annule pas, alors elle est nécessairement strictement positive et sa dérivée garde un signe constant.

Si cette dérivée est positive, l'équation devient $y' = y$ et donc $y(t) = y_0 e^t$ et il faut $y_0 > 0$ pour que y et sa dérivée soit positive.

Si cette dérivée est négative, l'équation devient $y' = -y$ et donc $y(t) = y_0 e^{-t}$ il faut aussi que $y_0 > 0$ pour que y soit positive et sa dérivée négative.

- Existe-t-il des solutions qui s'annulent ? Si oui, on va montrer que l'ensemble S des instants t où y s'annule est un intervalle fermé de \mathbb{R} .

Le caractère fermé de S est clair. Montrons que c'est un intervalle. Si S est un singleton, il n'y a rien à montrer, sinon on prend $t_1 < t_2$ dans S . Si y n'est pas identiquement nulle, il existe $t^* \in]t_1, t_2[$ pour lequel

$$y(t^*) = \max_{[t_1, t_2]} y(t) > 0.$$

En un tel point, la dérivée de y est nulle ce qui implique que $y(t^*) = 0$ d'après l'équation, c'est une contradiction.

Supposons maintenant que $T = \sup S < +\infty$. On sait alors que $y > 0$ sur $]T, +\infty[$ et que $y' > 0$ sur $]T, +\infty[$. Ainsi, sur cet intervalle l'équation devient $y' = y$. Ainsi, il existe un nombre $A > 0$ tel que $y(t) = Ae^t$ pour tout $t \in]T, +\infty[$. On a donc $y(T) = Ae^T > 0$ ce qui contredit le fait que $y(T) = 0$. On fait le même raisonnement pour la borne inférieure et on arrive à la conclusion que y est identiquement nulle.

Exercice 32

Résoudre l'équation $y'' = |y|$ en suivant les indications suivantes :

1. Montrer que toute solution est convexe.
2. Montrer qu'une solution ne peut pas s'annuler plus de deux fois.
3. On suppose qu'une solution y s'annule exactement une fois, montrer que y est nécessairement positive et en déduire que y est nulle.
4. Déterminer toutes les solutions y qui ne s'annulent pas.
5. Soit y une solution qui s'annule exactement deux fois. On notera $\alpha < \beta$ ses deux racines.
 - (a) Montrer que y est positive sur $] -\infty, \alpha[\cup]\beta, +\infty[$ et négative sur $]\alpha, \beta[$.
 - (b) Montrer que $\beta - \alpha = \pi$.
 - (c) Déterminer complètement y .

Exercice 33

Soient $A, B \in M_d(\mathbb{R})$ deux matrices. Pour tout $Y_0 \in M_d(\mathbb{R})$, démontrer qu'il existe une unique fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto Y(t) \in M_d(\mathbb{R})$ telle que

$$Y' = AY + YB,$$

$$Y(0) = Y_0.$$

Calculer $Y(t)$ explicitement.

Exercice 34

Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice. On suppose que A est diagonalisable dans \mathbb{C} et que les parties réelles de toutes ses valeurs propres sont strictement négatives.

1. Montrer qu'il existe $M, \alpha > 0$ tel que

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{-\alpha t}, \forall t \geq 0.$$

2. Soit $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ une fonction continue telle que $g(t, 0) = 0$ et

$$\|g(t, y_1) - g(t, y_2)\| \leq k(t)\|y_1 - y_2\|, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d,$$

avec $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et vérifiant $\lim_{t \rightarrow +\infty} k = 0$.

Montrer que, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^d$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay + g(t, y) \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

admet une unique solution globale.

3. Montrer que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^d$, l'unique solution y du problème (III.18), vérifie

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t)\| = 0.$$

4. Montrer que le résultat persiste sans supposer que A est diagonalisable (mais on suppose bien sûr que les valeurs propres sont de parties réelles strictement négatives).

Exercice 35 (Fonctions de Lyapounov. Théorème de Lyapounov, [Sch91, page 333])

Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$.

1. On suppose qu'il existe une matrice M symétrique définie positive telle que

$$(MAx, x) < 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Montrer que toutes les parties réelles des valeurs propres de A sont strictement négatives puis montrer qu'il existe une norme N sur \mathbb{R}^d telle que, toute solution non nulle de l'équation $x' = Ax$ vérifie

$$\frac{d}{dt}N(x(t)) < 0.$$

2. On souhaite maintenant montrer la propriété réciproque. On suppose que A a toutes les parties réelles de ses valeurs propres strictement négatives.

- (a) Montrer qu'il existe $K > 0, \alpha > 0$ tels que

$$\|e^{tA}\| \leq Ke^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0.$$

- (b) On pose

$$M = \int_0^{+\infty} e^{sA} e^{sA} ds.$$

Montrer que cette intégrale est bien définie et que la matrice M répond à la question.

- (c) Montrer que $x^* = 0$ est un équilibre asymptotiquement stable du système $x' = Ax$.

Exercice 36 (Directions alternées)

Soit $F_1, F_2 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ deux fonctions C^1 globalement lipschitziennes. On pose $F = F_1 + F_2$. On note $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ les flots correspondant aux équations $x' = F(x)$, $x' = F_1(x)$ et $x' = F_2(x)$. Comme les équations sont autonomes ces flots ne dépendent que de $t - s$, il n'y aura donc qu'une seule variable de temps. Le but de l'exercice est de montrer qu'on effectue un calcul approché du flot φ en utilisant seulement les flots φ_1 et φ_2 .

1. Soit $0 < h < 1$. Montrer que pour tout compact K de \mathbb{R}^d , il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in K$ on a

$$\|\varphi(h, x) - \varphi_1(h, \varphi_2(h, x))\| \leq Ch^2.$$

2. On fixe $T > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $N \geq 1$, on pose $h = T/N$ et on définit la suite $(x_n)_n$ par $x_0 = x$ et

$$\forall n \in \{0, \dots, N-1\}, x_{n+1/2} = \varphi_2(h, x_n), x_{n+1} = \varphi_1(h, x_{n+1/2}).$$

Montrer que

$$\|\varphi(T, x) - x_N\| \leq Ch.$$

3. On suppose que $F_1(x) = A_1x$, $F_2(x) = A_2x$ avec $A_1, A_2 \in M_d(\mathbb{R})$. On pose $A = A_1 + A_2$.

- (a) Montrer que

$$\left\| e^{hA} - e^{hA_1} e^{hA_2} + \frac{h^2}{2} [A_1, A_2] \right\| \leq Ch^3,$$

où $[A_1, A_2] = A_1A_2 - A_2A_1$ est le commutateur de A_1 et A_2 .

- (b) En déduire que le résultat général démontré plus haut est optimal en général.

Exercice 37

On considère le système suivant

$$\begin{cases} x' = -x + \alpha y \\ y' = x - \beta y^2, \end{cases}$$

assorti d'une donnée initiale (x_0, y_0) avec $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$. On suppose que $\alpha > \beta > 0$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution au problème à ce problème de Cauchy qui est définie sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que cette solution vérifie $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.
3. Déterminer les points d'équilibre du système et étudier leur stabilité locale.

Exercice 38 (Dépendance par rapport à un paramètre)

Soit $(t, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mapsto A(t, \alpha) \in M_d(\mathbb{R})$ une application continue.

On note $\varphi(t, \alpha, y)$ la solution au temps t du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi(t, \alpha, y) = A(t, \alpha) \varphi(t, \alpha, y) \\ \varphi(0, \alpha, y) = y. \end{cases}$$

On fixe $T > 0$. Montrer que $(\alpha, y) \mapsto \varphi(T, \alpha, y)$ est continue.

Exercice 39

Trouver toutes les fonctions dérivables f telles que

$$f'(x) = f(x) + \left(\int_0^1 f(t) dt \right), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

et $f(0) = 1$.

Exercice 40

Résoudre l'équation différentielle

$$Y' = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y.$$

Exercice 41

Étudier, en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, l'existence de solutions non triviales du problème suivant

$$\begin{cases} -y'' + \lambda y = 0, & \text{sur } [0, 1], \\ y(0) = 0, \quad y'(1) = 0. \end{cases}$$

Exercice 42 (Valeurs propres de Sturm-Liouville ; Fonction de Green)

Soit $q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit y_λ comme l'unique solution du problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} -y_\lambda'' + q(t)y_\lambda = \lambda y_\lambda, & \text{sur } [0, 1], \\ y_\lambda(0) = 0, & y_\lambda'(0) = 1. \end{cases}$$

1. Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\|y_{\lambda_1} - y_{\lambda_2}\|_\infty \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|e^{|\lambda_1|}.$$

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $F(\lambda) = y_\lambda(1)$.

(a) Montrer que si $\lambda \leq \inf_{[0,1]} q$, alors $F(\lambda) \neq 0$

(b) Montrer que si, pour un certain λ_0 , on a $F(\lambda_0) = 0$, alors on a $y'_{\lambda_0}(1) \neq 0$ et qu'on a ensuite l'équivalent

$$F(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow \lambda_0}{\sim} (\lambda - \lambda_0) \frac{1}{y'_{\lambda_0}(1)} \int_0^1 |y_{\lambda_0}|^2 dx.$$

En déduire que les zéros de F sont isolés.

3. On se donne à partir de maintenant une valeur de λ telle que $F(\lambda) \neq 0$. On définit alors z_λ comme l'unique solution du problème suivant

$$\begin{cases} -z_\lambda'' + q(t)z_\lambda = \lambda z_\lambda, & \text{sur } [0, 1], \\ z_\lambda(1) = 0, & z_\lambda'(1) = 1. \end{cases}$$

Démontrer que y_λ et z_λ sont deux fonctions linéairement indépendantes.

4. Démontrer que pour toute fonction $f \in C^0([0, 1])$, le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u'' + q(t)u = \lambda u + f, & \text{sur } [0, 1], \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

admet une unique solution qui s'exprime sous la forme

$$u(t) = \int_0^1 G_\lambda(t, s)f(s) ds, \quad \forall t \in [0, 1],$$

où G_λ est la fonction définie par

$$G_\lambda(t, s) = \begin{cases} \frac{y_\lambda(t)z_\lambda(s)}{C_\lambda} & \text{si } t \leq s, \\ \frac{y_\lambda(s)z_\lambda(t)}{C_\lambda} & \text{si } t \geq s, \end{cases}$$

la constante C_λ étant à déterminer.

Exercice 43

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\det(A) = 0$. Montrer que toute solution de l'équation $y' = Ay$ est contenue dans un plan de \mathbb{R}^3 .

Exercice 44 (Pb de Kepler)

L'équation qui régit le mouvement d'un corps céleste (donc dans \mathbb{R}^3) soumis à l'attraction universelle exercée par une étoile (qu'on supposera immobile et positionnée à l'origine) est donnée par

$$q'' = -K \frac{q}{\|q\|^3},$$

où $K > 0$ est une constante (qui dépend de la masse des deux corps).

1. Etudier complètement les solutions du système dans le cas où $q'(0)$ et $q(0)$ sont colinéaires.
2. On suppose dorénavant que $q(0)$ et $q'(0)$ ne sont pas colinéaires. En étudiant la quantité $A(t) = q(t) \wedge q'(t)$, montrer que le mouvement est plan (c'est-à-dire qu'il existe un plan P tel que $q(t) \in P$ pour tout $t \geq 0$).
3. Montrer que la quantité vectorielle $e(t) = \frac{1}{K} q'(t) \wedge A - \frac{q(t)}{\|q(t)\|}$ et la quantité scalaire $H(t) = \frac{1}{2} \|q'(t)\|^2 - \frac{K}{\|q(t)\|}$ sont constantes au cours du temps.
4. En déduire que q' reste bornée et que $\|q(t)\|$ ne s'approche pas de 0. Conclure que la solution du problème est globale.
5. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\langle e, q(t) \rangle + \|q(t)\| = \frac{\|A\|^2}{K}$. Quelle est la nature de la courbe $t \mapsto q(t)$?
6. Discuter la périodicité de la solution en fonction des conditions initiales.

Exercice 45 (Espèces en compétition, [CM86, p. 85])

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = (a - bx - cy)x \\ y' = (\alpha - \gamma x - \beta y)y, \end{cases}$$

avec $x(0) = x_0 > 0$ et $y(0) = y_0 > 0$. Tous les coefficients $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ sont strictement positifs.

1. Dans ce système x et y représentent le nombre d'individus de deux espèces (animales par exemple) qui coexistent dans un même territoire et qui se partagent les mêmes ressources. Commenter/interpréter les différents termes dans le système.
2. Montrer que le problème admet une unique solution maximale définie sur un intervalle I contenant 0.
3. Montrer que pour tout $t \in I$, on a $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$.
4. Montrer que la solution est globale en temps positif, c'est-à-dire que $[0, +\infty[\subset I$ et que x et y sont bornées sur $[0, +\infty[$.
5. Déterminer les points d'équilibre du système et étudier leur stabilité.

Exercice 46 (Problème aux limites non-linéaires [CM86, p. 88])

Soit $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, localement lipschitzienne par rapport à u , telle que pour tout $x \in [0, 1]$, la fonction $u \in \mathbb{R} \rightarrow f(x, u) \in \mathbb{R}$ est croissante et vérifie

$$|f(x, u)| \leq C(1 + |u|), \quad \forall x \in [0, 1], \forall u \in \mathbb{R},$$

pour un certain $C > 0$.

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on s'intéresse au problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u'' + f(x, u) = 0, \\ u(0) = \alpha, \\ u(1) = \beta. \end{cases} \quad (\text{III.19})$$

1. Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} -u'' + f(x, u) = 0, \\ u(0) = \alpha, \\ u'(0) = \gamma. \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

Montrer que celui-ci admet une unique solution définie sur l'intervalle $[0, 1]$. On la note u_γ .

2. Montrer que pour tout γ_1, γ_2 tels que $\gamma_1 > \gamma_2$ et pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$u_{\gamma_1}(x) - u_{\gamma_2}(x) \geq (\gamma_1 - \gamma_2)x.$$

On pourra commencer par montrer que

$$(u_{\gamma_1} - u_{\gamma_2})'(u_{\gamma_1} - u_{\gamma_2}) > 0, \text{ sur }]0, 1[.$$

3. Montrer que l'application

$$\gamma \in \mathbb{R} \mapsto u_\gamma(1) \in \mathbb{R},$$

est strictement croissante, continue et bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

4. En déduire que le problème (III.19) admet une unique solution.

Exercice 47 (Preuve directe du théorème de C.-L. dans le cas linéaire, [Pom94, page 315])

Soit $t \in I \mapsto A(t) \in M_d(\mathbb{R})$ une application continue, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}^d$. On cherche à montrer l'existence d'une solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(t)y, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

sans utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz général (la propriété d'unicité de la solution découle toujours du lemme de Gronwall).

On définit l'application constante $Y_0 : t \in I \mapsto y_0$ puis les applications $(Y_n)_n$ par la relation de récurrence

$$Y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t A(s)Y_n(s) ds.$$

1. Montrer que les Y_n sont des fonctions continues sur I .

2. Soit $[\alpha, \beta] \subset I$ un intervalle compact contenant t_0 . On note $C = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|A(t)\|$. Montrer que

$$\forall n \geq 0, \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|Y_{n+1}(t) - Y_n(t)\| \leq \|y_0\| \frac{C^{n+1}|\beta - \alpha|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

3. En déduire que la suite $(Y_n)_n$ converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$ vers une fonction continue Y qui vérifie

$$Y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t A(s)Y(s) ds, \quad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

4. Conclure.

5. Dans le cas où $A(t) = A$ est indépendant de t , calculer les fonctions $(Y_n)_n$ puis déterminer leur limite. Qu'en déduit-on ?

Exercice 48 (Etude d'une EDO à coefficients variables. Adapté de [ZQ95, page 416])

Soit $a : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $|a(t)| \leq 1$ pour tout $t \geq 0$. On s'intéresse au modèle de population suivant

$$x' = -x + a(t)x^2,$$

avec $x(0) = x_0$.

On suppose que $0 < x_0 < 1$.

1. On note $T^* \in]0, +\infty]$ le temps d'existence de la solution maximale de ce problème.

(a) Montrer que $x(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T^*[$.

(b) On veut montrer que $x(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T^*[$. On suppose que ça n'est pas vrai et on considère l'ensemble

$$S = \{t \in [0, T^*[, \text{ tel que } x(s) \leq 1, \forall s \in [0, t]\}.$$

i. Montrer que S est non vide.

ii. Montrer que $T = \sup S$ vérifie $T < T^*$.

iii. Montrer que $x(T) = 1$.

iv. Montrer que

$$\forall t \in [0, T], \quad x'(t) \leq 0,$$

en déduire que $x(T) < 1$.

v. Conclusion.

(c) Montrer que $T^* = +\infty$ et que $x(t) \leq x_0$ pour tout $t \geq 0$.

(d) Montrer enfin que

$$x(t) \leq x_0 e^{-(1-x_0)t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Qu'en déduit-on du point de vue du modèle ?

2. Etudier le cas $x_0 = 1$.

Exercice 49 (une sorte de Gronwall non-linéaire)

Soit $C \geq 0$ et $y : [0, T[$ une fonction continue positive vérifiant

$$\forall t \in [0, T[, \quad y(t) \leq C^2 + \int_0^t \sqrt{y(s)} ds.$$

Montrer que

$$\forall t \in [0, T[, \quad y(t) \leq \left(C + \frac{t}{2}\right)^2.$$

Exercice 50

On s'intéresse au problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y' = \sin\left(\frac{1}{y}\right), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

où $y_0 > 0$.

1. Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale à ce problème.
2. Déterminer les solutions constantes positives de l'équation différentielle étudiée.
3. Montrer que si $y_0 \in]1/\pi, +\infty[$, alors la solution maximale est globale. Montrer qu'elle est strictement croissante et qu'elle vérifie

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 1/\pi, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty.$$

4. Montrer que si $y_0 \in]0, 1/\pi[$, alors la solution maximale est également globale, monotone et admet des limites en $\pm\infty$ qu'on déterminera en fonction de y_0 .

Exercice 51 (voir [Gou94, p 360])

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$. Montrer que si $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ vérifie

$$f'(t) + \alpha f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0,$$

alors $f(t) \rightarrow 0$ quand t tend vers $+\infty$.

2. Montrer que si $\operatorname{Re}(\alpha) \leq 0$ le résultat précédent est en défaut.
3. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que le polynôme

$$P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i,$$

a toutes ses racines de partie réelle strictement négative.

Montrer que si $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ est de classe \mathcal{C}^n et vérifie

$$\sum_{i=0}^n a_i f^{(i)}(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0,$$

alors on a

$$f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Exercice 52

Soit $a > 0$. On cherche toutes les fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur $I =]0, a[$ qui vérifient

$$x f'(x) = f(a - x), \quad \forall x \in I.$$

1. Déterminer une équation différentielle (E) d'ordre 2 dont une telle fonction f est solution.
2. Vérifier que (E) possède une solution particulière simple, notée f_1 , que l'on déterminera.
3. Chercher toutes les solutions de (E) sous la forme $f = f_1 g$.
4. Résoudre le problème initial.

Bibliographie

- [AH09] Kendall ATKINSON et Weimin HAN : *Theoretical numerical analysis*, volume 39 de *Texts in Applied Mathematics*. Springer, Dordrecht, third édition, 2009. A functional analysis framework.
- [BG10] Sylvie BENZONI-GAVAGE : *Calcul différentiel et équations différentielles*. Dunod, 2010.
- [BR06] P. BOYER et J.J. RISLER : *Algèbre pour la licence 3*. Dunod, 2006.
- [Bré88] Claude BRÉZINSKI : *Introduction à la pratique du calcul numérique*. Dunod Université, 1988.
- [CBG⁺94] Jean-Luc CHABERT, Évelyne BARBIN, Michel GUILLEMOT, Anne MICHEL-PAJUS, Jacques BOROWCZYK, Ahmed DJEBBAR et Jean-Claude MARTZLOFF : *Histoire d'algorithmes*. Collection Regards sur la Science. Belin, Paris, 1994. Du caillou à la puce.
- [CdB81] Samuel D. CONTE et Carl de BOOR : *Elementary numerical analysis*. Mc Graw-Hill international editions, third édition, 1981.
- [CLF95] Antoine CHAMBERT-LOIR et Stéphane FERMIGIER : *Exercices de Mathématiques pour l'agrégation. Analyse 2*. Masson, 1995.
- [CLF96] Antoine CHAMBERT-LOIR et Stéphane FERMIGIER : *Exercices de Mathématiques pour l'agrégation. Analyse 3*. Masson, 1996.
- [CM84] Michel CROUZEIX et Alain L. MIGNOT : *Analyse numérique des équations différentielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1984.
- [CM86] Michel CROUZEIX et Alain L. MIGNOT : *Exercices d'analyse numérique des équations différentielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1986.
- [Ded06] J.P. DEDIEU : *Points fixes, Zéros et la méthode de Newton*. Springer, 2006.
- [Dem91] Jean-Pierre DEMAILLY : *Analyse Numérique et équations différentielles*. Collection Grenoble Sciences. Presses Universitaires de Grenoble, 1991.
- [Gou94] Xavier GOURDON : *Les maths en tête, mathématiques pour M', Analyse*. Ellipses, 1994. 416 pages.
- [GT96] S. GONNORD et N. TOSEL : *Thèmes d'Analyse pour l'Agrégation, Tome 1 : Topologie et Analyse fonctionnelle*. Ellipses, 1996.
- [GT98] S. GONNORD et N. TOSEL : *Thèmes d'Analyse pour l'Agrégation, Tome 2 : Calcul différentiel*. Ellipses, 1998.
- [HH06] John HUBBARD et Florence HUBERT : *CALCUL SCIENTIFIQUE : De la théorie à la pratique. Premier volume : Equations algébriques, traitement du signal et géométrie effective*. Vuibert, 2006.
- [Hig96] Nicholas J. HIGHAM : *Accuracy and stability of numerical algorithms*. SIAM, 1996.
- [LT00a] P. LASCAUX et R. THÉODOR : *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur - Tome 1*. Dunod, 2000.
- [LT00b] P. LASCAUX et R. THÉODOR : *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur - Tome 2*. Dunod, 2000.
- [LZ04] Vincent LEFÈVRE et Paul ZIMMERMANN : *Arithmétique flottante*. Rapport technique 5105, INRIA, 2004.
- [Pom94] Alain POMMELLET : *Agrégation de Mathématiques, Cours d'Analyse*. Ellipses, 1994.
- [QSG10] Alfio QUARTERONI, Fausto SALERI et Paola GERVASIO : *Calcul Scientifique*. Springer, 2010. Cours, exercices corrigés et illustrations en MATLAB et Octave. 2nde édition.
- [QSS07] Alfio QUARTERONI, Riccardo SACCO et Fausto SALERI : *Méthodes numériques*. Springer-Verlag Italia, Milan, 2007. Algorithmes, analyse et applications.
- [Rom96] Jean-Etienne ROMBALDI : *Problèmes corrigés d'analyse numérique*. Collection Enseignement des Mathématiques. Masson, Paris, 1996.

- [Rud95] Walter RUDIN : *Analyse fonctionnelle*. Édiscience international, 1995.
- [Sch91] Michelle SCHATZMAN : *Analyse numérique*. InterEditions, Paris, 1991. Cours et exercices pour la licence.
- [ZQ95] C. ZUILY et H. QUEFFÉLEC : *Eléments d'analyse pour l'agrégation*. Agrégation de Mathématiques. Masson, Paris, 1995.