Générateurs du groupe fondamental en théorie de Morse stable

Florian Bertuol
Sous la direction de Jean-François Barraud

4 août 2018

Résumé

On va donner une description de générateurs du groupe fondamental d'une variété en terme d'objets Morse stable, en suivant ce qui a été fait dans l'article [Bar14]. On utilisera [AD10], ainsi que les notations de [Tu11].

Table des matières

1 Théorie de Morse stable **4**
1.1 Notations 4
1.2 Pseudo-gradients 5

2 Espaces de modules **9**
2.1 Définitions 9
2.2 Généricité 10
2.3 Compactification 15
2.4 Recollement 22

3 Pas de Morse stable et lacets de Morse stable **24**
3.1 Pas de Morse stable... 24
3.2 Lacets de Morse stable 25

4 Morphisme évaluation et résultat principal **26**
4.1 Morphisme évaluation 26
4.2 Résultat principal 27

5 Annexes **31**
5.1 Le théorème de sortie de tout compact 31
5.2 Un résultat de transversalité 31

Introduction

La théorie de Morse propose de comprendre la topologie d'une variété M via l'étude des fonctions $f_0 \colon M \to \mathbb{R}$, dont tous les points critiques sont non dégénérés, dites fonctions de Morse. Aux résultats immédiats[1] succèdent des constructions plus élaborées, permettant de donner pour les variétés fermées de nouvelles descriptions de leurs invariants topologiques classiques (homologie, groupe fondamental) en termes d'objets inhérents à la théorie de Morse. On peut résumer ces constructions (celle de l'homologie étant détaillée dans les premiers chapitres de [AD10]) de la manière suivante :

- **Homologie de Morse :** On associe à une fonction de Morse f_0 son gradient X pour une certaine métrique riemannienne sur M, ce qui définit un flot ψ_X. Par compacité de M, les trajectoires obtenues $t \mapsto \psi^t(x)$ sont globales, et joignent toutes deux points critiques distincts. On peut choisir génériquement un gradient qui soit tel que les espaces de trajectoires entre points critiques soient munis d'une structure de variété, forçant au passage à ce que l'indice du point critique de départ soit strictement plus grand que l'indice du point critique d'arrivée. En prenant comme complexe de chaînes les C_k, espaces vectoriels à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$ engendrés par les points critiques d'indice k, et comme morphisme de bord ∂, défini par
$$\partial(b) = \sum_{a \in \mathrm{Crit}_{k-1}(f_0)} n(b,a) \cdot a,$$
où b est un point critique d'indice k et $n(b,a)$ est le nombre de trajectoires joignant b à a modulo 2, on obtient une homologie : l'homologie de Morse à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$. Cette homologie est précisément l'homologie singulière à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$ de la variété. Les inégalités de Morse-Betti sont une conséquence directe de cette construction :

Théorème 1 (Inégalités de Morse-Betti)**.** *Soit M une variété fermée et f_0 une fonction de Morse définie sur M. On note β_i les nombres de Betti à coefficients*

1. Par exemple, si M est compacte, alors toute fonction de Morse $f_0 \colon M \to \mathbb{R}$ admet un point critique d'indice 0 et un point critique d'indice $\dim M$: un minimum et un maximum de f_0.

dans $\mathbb{Z}_2$ de M. Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a :

$$\#\mathrm{Crit}_i(f_0) \geq \beta_i.$$

- **Groupe fondamental de Morse :** On peut décrire le groupe fondamental de M en termes de points critiques d'indices $0, 1$ et 2. En particulier, si $\#\mathrm{Crit}_0(f) = 1$, le groupe fondamental est isomorphe à un quotient du groupe libre engendré par les points critiques d'indices 1. Pour s'en convaincre, on considère un lacet sur notre variété, qui n'intersecte aucune variété stable de points critiques d'indice supérieur ou égal à 2 (un tel choix est générique). On laisse évoluer ce lacet le long du flot ψ_X : au bout d'un certain temps, il devient descriptible en terme de trajectoires entre points critiques d'indice 1 et $\star$ (ce sont les variétés instables de ces points critiques, auxquelles on a rajouté le point $\star$).

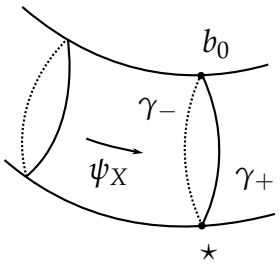

FIGURE 1 – Homotopie entre un lacet et un lacet de Morse.

Les classes d'homotopie de ces lacets de Morse génèrent ainsi le groupe fondamental de la variété. En laissant ensuite évoluer les disques correspondant aux relations, on obtient la présentation du groupe fondamental de Morse, noté $\mathcal{L}_0(f, X, \star)$.

La théorie de Morse stable, quant à elle, apparaît en géométrie symplectique (théorie de Floer, conjecture d'Arnold stable) et consiste à étudier les fonctions de Morse stable sur une variété fermée M, i.e. les fonctions de Morse $f\colon M \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui sont de plus quadratiques à l'infini. Là où la description d'une homologie de Morse stable consiste simplement à refaire le travail qui a déjà été réalisé en théorie de Morse (et redonne au passage la même homologie), la description d'un groupe fondamental de Morse stable est plus problématique. L'obstruction majeure provient des assertions suivantes :

Théorème 2 (Damian, 2002)**.** *1. Il existe une variété M fermée et une fonction de Morse stable $f\colon M \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que :*

$$\#\mathrm{Crit}(f) < \mathrm{Morse}(M),$$

où $\mathrm{Morse}(M)$ *est le nombre minimal de points critiques pour toute fonction de Morse* f_0 *définie sur* M*.*

2. *Il existe une variété* M *fermée et une fonction de Morse stable* $f\colon M \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *telle que :*
$$\#\mathrm{Crit}_1(f) < \mu_{\pi_1}(M),$$
où $\mu_{\pi_1}(M)$ *est le nombre minimal de générateurs pour toute présentation du groupe fondamental de* M*.*

Ainsi, les fonctions de Morse stable présentent parfois strictement moins de points critiques que leurs homologues de Morse, et il arrive même qu'elles ne disposent pas d'assez de points critiques d'indice 1 pour générer le groupe fondamental de la variété. L'objectif de ce mémoire est alors de détailler de nouveaux générateurs pour un groupe fondamental de Morse stable. Pour ce faire, on va continuer l'étude des liaisons entre points critiques d'indices de Morse stable 0 et 1, et définir le groupe des lacets de Morse stable $\mathcal{L}(f, X, \star)$, muni d'un morphisme $\mathrm{ev}\colon \mathcal{L}(f, X, \star) \to \pi_1(M)$. Notre résultat principal sera le suivant :

Théorème 3 (Résultat principal)**.** *Le morphisme* ev *est surjectif.*

Un corollaire immédiat de ce résultat est que l'on généralise, via la définition d'une notion de multiplicité $\nu(b)$ pour les points critiques d'indice de Morse stable 1, l'inégalité déjà existante en théorie de Morse :

Corollaire 1. *Pour toute variété fermée* M*, et pour toute fonction de Morse stable* $f : M \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, on a que*
$$\nu(\star) + \sum_{b\ ;\ |b|=1} \nu(b) \geq \mu_{\pi_1}(M).$$

1 Théorie de Morse stable

1.1 Notations

On supposera que tous les objets que l'on manipule sont lisses. On fixe M une variété fermée de dimension m, $\star$ un point de M, et $n = n_+ + n_-$ des entiers naturels. On utilisera les notations suivantes :

$$\begin{aligned} M^* &= M \times \mathbb{R}^n = M \times \mathbb{R}^{n_+} \times \mathbb{R}^{n_-} \quad \ni \quad x = (p, x_*) = (p, x_+, x_-), \\ M^+ &= M \times \mathbb{R}^{n_+} \times \{0\}^{n_-}, \\ M^- &= M \times \{0\}^{n_+} \times \mathbb{R}^{n_-}, \\ \star^- &= \{\star\} \times \{0\}^{n_+} \times \mathbb{R}^{n_-}. \end{aligned}$$

On munit M^* des projections $\pi_M(p, x_*) = p, \pi_*(p, x_*) = x_*, \pi_\pm(p, x_+, x_-) = x_\pm$. On confondra parfois M et $M \times \{0\}^n$, M^+ et $M \times \mathbb{R}^{n_+}$, M^- et $M \times \mathbb{R}^{n_-}$.

On considère ensuite une fonction de Morse

$$f \colon M^* \to \mathbb{R},$$

dont on suppose qu'elle est quadratique à l'infini, c'est-à-dire qu'on suppose l'existence d'un compact $K \subset M^*$ en dehors duquel $f(p, x_*) = q(x_*)$, où q est la forme quadratique

$$q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_+, x_-) & \longmapsto & ||x_+||^2 - ||x_-||^2 \end{array}.$$

On note enfin $|c| = \mathrm{Ind}_f(c) - n_-$ l'indice de Morse stable d'un point $c \in \mathrm{Crit}(f)$.

Remarque 1. Comme f est quadratique en dehors du compact K, elle l'est en dehors de tout compact de la forme $K' = M \times [-A, A]^n$ contenant K, avec $A > 0$. Pour de tels compacts, on a que [2] $\mathrm{Crit}(f) \subset K'$, et comme les points critiques d'une fonction de Morse sont isolés, on a nécessairement que $\mathrm{Crit}(f)$ est fini. En effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait par compacité créer une suite (x_n) de points critiques distincts qui tendraient vers un nouveau point x_∞, et cette limite est nécessairement un point critique : on a dans une carte $(U, x^1, \dots, x^{m+n})$ au voisinage de x_∞ que, pour tout k, $\frac{\partial f}{\partial x^k}(x_\infty) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\partial f}{\partial x^k}(x_n) = 0$. Ainsi, x_∞ ne serait pas isolé. On peut donc noter c_i ces points critiques, avec $i \in I = \{1, \dots, \#\mathrm{Crit}(f)\} \subset \mathbb{N}$.

Convention 1. On suppose désormais que K est de la forme $M \times [-A, A]^n$, avec $A > 0$.

1.2 Pseudo-gradients

Les preuves que l'on va effectuer ultérieurement utiliseront des pseudo-gradients, i.e. des champs de vecteurs qui miment les propriétés (de l'opposé) du gradient de f. On définit ici ces objets, avant de montrer qu'il en existe et qu'à petite perturbation près ces champs de vecteurs restent des pseudo-gradients.

Convention 2. On suit les notations de [AD10], c'est-à-dire qu'on écrira (U, h) pour la carte de Morse, avec $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$, et $(\Omega, h^{-1}) = (\Omega, x^1, \dots, x^{m+n})$ avec $\Omega \subset M^*$ pour la carte de la variété.

2. En fait, comme $A > 0$, on a même que $\mathrm{Crit}(f) \subset \mathring{K}'$, ce qui jouera un rôle dans la **Proposition 1**.

Définition 1 (Champ de pseudo-gradients adapté à f)**.** On appelle *champ de pseudo-gradients adapté à f* tout champ de vecteurs X sur M^* qui vérifie les conditions suivantes :

1. $\forall x \in M^*, df_x(X_x) \leq 0$, avec égalité si et seulement si $x \in \mathrm{Crit}(f)$ [3],
2. il existe des cartes de Morse (U_i, h_i) de chaque point critique c_i telles que sur chaque U_i, X coïncide avec $(h_i^{-1})^\star(-\nabla(h_i^\star(f)))$ [4],
3. en dehors de K, X coïncide avec $\pi_*^\star(-\nabla q)$ [5].

Remarque 2. L'appellation « champ de pseudo-gradients adapté à f » désigne déjà des objets semblables en théorie de Morse : on y ajoute ici la troisième condition.

Proposition 1. *Il existe des champs de pseudo-gradients adaptés à f.*

Démonstration. On choisit pour chaque point critique c_i une carte de Morse $(U_i, h_i)/\Omega_i$. On complète la famille $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ en un recouvrement ouvert $\{\Omega_j\}_{j\in J}$ de M^* constitué d'ouverts de cartes (Ω_j, h_j^{-1}) de M^* (on note $U_j = h_j^{-1}(\Omega_j)$), tel que :

1. chaque point critique c_i admet un voisinage $\mathcal{V}_i$ qui est inclus dans Ω_i et qui vérifie de plus que
$$\mathcal{V}_i \cap (\cup_{\substack{j\in J\\ j\neq i}} \Omega_j) = \varnothing$$
(on peut donc choisir pour chacun des c_i une carte de Morse $(\tilde{\Omega}_i, h_i^{-1}|_{\tilde{\Omega}_i})$ qui n'intersecte aucun des Ω_j, avec $j \neq i$, déjà en jeu),
2. pour $j \in J \setminus I$, on a sur $U_j \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ que $(\pi_* \circ h_j)(u, u_*) = u_*$.

On définit un champ de vecteurs X_j sur chacun des Ω_j en posant, pour $x \in \Omega_j$:
$$(X_j)_x = (h_j)_{\star, h_j^{-1}(x)}(-\nabla(f \circ h_j)(h_j^{-1}(x))).$$

3. Ce qui implique par la règle de la chaîne que $\frac{d}{dt}(f \circ \psi_X^t(x)) \leq 0$ ($\psi_X^t(x)$ désigne le flot associé à X), où l'on lit que f est strictement décroissante le long des trajectoires non-dégénérées.
4. On identifie $\mathfrak{X}(U)$ avec $[\mathcal{C}^\infty(U)]^{m+n}$, ou alors on note ∇ le gradient associé à la métrique riemannienne usuelle sur $\mathbb{R}^{m+n}$.
5. Idem.

On remarque que

$$\begin{aligned} df_x((X_j)_x) = (X_j)_x f &= [(h_j)_{\star,h_j^{-1}(x)}(-\nabla(f\circ h_j)(h_j^{-1}(x)))]f \\ &= [-\nabla(f\circ h_j)(h_j^{-1}(x))](f\circ h_j) \\ &= -\sum_{k=1}^{m+n}\big[\frac{\partial(f\circ h_j)}{\partial r^k}(h_j^{-1}(x))\big]^2 \\ &= -\sum_{k=1}^{m+n}\big[\frac{\partial f}{\partial x^k}(x)\big]^2 \leq 0, \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si x est un point critique de f. On considère ensuite une partition de l'unité $\{\rho_j\}$ subordonnée à $\{\Omega_j\}$ (la collection des supports $\{\operatorname{supp}\rho_j\}$ est localement finie et $\sum_j \rho_j \equiv 1$). On remarque que, grâce à notre première condition, on a $\rho_i \equiv 1$ sur $\tilde{\Omega}_i$. On définit les champs de vecteurs globaux

$$(\tilde{X}_j)_x = \begin{cases} \rho_j(x)(X_j)_x & \text{si } x \in \Omega_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et $X = \sum_j \tilde{X}_j$. Le champ X est alors un champ de pseudo-gradients adapté à f. Vérifions chacun des trois points requis :

1. D'abord, $df_x(X_x) = \sum_j df_x((\tilde{X}_j)_x) = \sum_{j\,;\,x\in\operatorname{supp}\rho_j}\rho_j(x)df_x((X_j)_x) \leq 0$, avec égalité si et seulement si x est un point critique (sinon les $df_x(X_j)_x$ sont tous non-nuls, et les $\rho_j(x)$ ne peuvent pas être simultanément nuls car leur somme vaut 1),
2. Ensuite, sur chaque carte de Morse $\tilde{\Omega}_i$, on obtient que

   $$h_i^\star(X) = (h_i^{-1})_\star(X) = ((h_i^{-1})_\star\circ(h_i)_\star)(-\nabla(f\circ h_i)) = -\nabla(f\circ h_i) = -\nabla(h_i^\star(f)),$$

3. si $x \in M^* \setminus K$, on peut supposer que pour $i \in I, x \notin \Omega_i$ (il est suffisant d'avoir pris des cartes de Morse contenues dans $\mathring{K}$, ce qui est possible d'après la **Remarque 1**). On calcule, grâce à notre seconde condition :

   $$\begin{aligned} (\pi_*)_{\star,x}(X_x) &= \sum_j(\pi_*)_{\star,x}((\tilde{X}_j)_x) = \sum_{j\,;\,x\in\operatorname{supp}\rho_j}\rho_j(x)(\pi_*)_{\star,x}((X_j)_x) \\ &= \sum_{j\,;\,x\in\operatorname{supp}\rho_j}\rho_j(x)(\pi_*)_{\star,x}[(h_j)_{\star,h_j^{-1}(x)}(-\nabla(f\circ h_j)(h_j^{-1}(x)))] \\ &= \sum_{j\,;\,x\in\operatorname{supp}\rho_j}\rho_j(x)(\pi_*\circ h_j)_{\star,h_j^{-1}(x)}(-\nabla(q\circ\pi_*\circ h_j)(h_j^{-1}(x))) \\ &= \sum_{j\,;\,x\in\operatorname{supp}\rho_j}\rho_j(x)(-\nabla q(\pi_*(x))) \\ &= -\nabla q(\pi_*(x)). \end{aligned}$$

Comme en dehors de K, f est égale à $q \circ \pi_*$, où l'on lit qu'elle est indépendante de ses coordonnées en M, alors les coordonnées en M de son gradient sont nulles et on obtient que

$$X = (0, (-\nabla q) \circ (\pi_*)) = \pi_*^\star(-\nabla q).$$

□

Remarque 3. Si X est un pseudo-gradient, et si on retire à M^* un voisinage $\mathcal{V}_i$ de chaque point critique c_i, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in M^* \setminus (\cup_{i\in I}\mathcal{V}_i)$, l'on ait

$$df_x(X_x) \leq -\varepsilon.$$

Définition 2 ($\mathcal{C}^1$-proximité)**.** On dit que des champs de vecteurs X et X' sont *ε-proches au sens $\mathcal{C}^1$*, si pour tout recouvrement de M^* par des ouverts de carte (U_i, ϕ_i) et pour tout compact $K_i \subset U_i$, on a :

$$||(\phi_i)_\star(X) - (\phi_i)_\star(X')||_{\mathcal{C}^1, K_i} < \varepsilon \,^{6}.$$

Proposition 2. *Si un champ de vecteurs X' est ε-proche au sens $\mathcal{C}^1$ d'un pseudo-gradient X adapté à f, avec $\varepsilon > 0$ assez petit, et qu'il lui est égal sur un voisinage de chaque point critique et sur $M^* \setminus K$, alors X' est aussi un pseudo-gradient adapté à f. On appelle « ε-bonne approximation de X » un tel champ de vecteurs.*

Démonstration. Admis. □

Convention 3. On considère à présent un champ de pseudo-gradients adapté à f, que l'on notera X, pour lequel on fixe des cartes de Morse (U_i, h_i) d'images Ω_i fournies par la **Proposition 1**, dont on suppose en plus que les intersections sont deux à deux vides (ce qui est possible comme les points critiques sont isolés).

Proposition 3. *Le flot associé à X est global, i.e. défini sur $\mathbb{R} \times M^*$.*

Démonstration. Supposons que le flot ne soit pas global, i.e. qu'il existe un point $x \in M^*$ tel que $\gamma(t) = \psi_X^t(x)$ ne soit défini que sur un intervalle de temps $]t_\star, t^\star[$, avec $t^\star < +\infty$ (l'argument pour $t_\star > -\infty$ est similaire). D'après le théorème de sortie de tout compact, il existe un temps $t_K \in]t_\star, t^\star[$ tel que pour tout $t_K \leq t < t^\star$, on ait $\gamma(t) \in M^* \setminus K$. Pour de tels t, on a que γ vérifie l'équation

$$(\dot\gamma_M(t), \dot\gamma_+(t), \dot\gamma_-(t)) = (0, -\nabla q(\pi_*(\gamma(t)))) = 2 \cdot (0, -\gamma_+(t), \gamma_-(t)).$$

Ainsi, on aurait $(\gamma_+(t), \gamma_-(t)) = (p, e^{-2t}u, e^{2t}v)$ pour tout $t_K \leq t < t_\star$, avec $p \in M$ et $(u, v) \in \mathbb{R}^n$. Cela contredirait alors le théorème de sortie de tout compact. □

6. On identifie $\mathfrak{X}(\phi_i(U_i))$ et $[\mathcal{C}^\infty(\phi_i(U_i))]$.

Définition 3 (Trajectoires)**.** On appelle *trajectoire issue de* $x \in M^*$ l'application de $\mathbb{R}$ dans M^* définie par $t \mapsto \psi_X^t(x)$. On dit qu'une application $\gamma\colon \mathbb{R} \to M^*$ est une *trajectoire* si il existe un $x \in M^*$ tel que γ soit égale à la trajectoire issue de x.

Proposition 4. *Soit* $\gamma\colon \mathbb{R} \to M^*$ *une trajectoire. On a l'alternative suivante : soit* γ *a une limite en* $\pm\infty$*, qui est un point critique, soit elle sort de tout compact de* M^**.*

Démonstration. On suppose que γ n'intersecte aucune des variétés stables des points critiques. À partir d'un certain temps t_0, elle est en dehors de toute carte de Morse : si elle rentre dans une carte de Morse d'un point critique c_i, elle doit en ressortir, et elle ne peut revenir dans aucune carte de Morse de c_i car f décroît strictement le long des trajectoires ; de plus il n'y a qu'un nombre fini de points critiques. On note $\Omega = \cup_{i\in I}\Omega_{c_i}$. Via la **Remarque 3**, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in M^* \setminus \Omega, df_x(X_x) \leq -\varepsilon.$$

Donc, pour tout $t \geq t_0$,

$$f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0)) = \int_{t_0}^{t} \frac{d(f\circ\gamma)}{du}du = \int_{t_0}^{t} df_{\gamma(u)}(X_{\gamma(u)})du \leq -\varepsilon(t-t_0),$$

et alors $\lim_{t\to+\infty} f(\gamma(t)) = -\infty$, et ainsi γ sort de tout compact de M^*, car sinon $f\circ\gamma$ resterait bornée et on obtiendrait une contradiction. L'argument pour $t \to -\infty$ est identique. □

Convention 4. La notation $\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = c$ signifiera à la fois que la limite de γ à l'infini existe et qu'elle est le point critique c.

2 Espaces de modules

2.1 Définitions

On note

$$W_X^s(a) = \{x \in M^* \ ; \ \lim_{t\to+\infty} \psi_X^t(x) = a\} \text{ et } W_X^u(b) = \{x \in M^* \ ; \ \lim_{t\to-\infty} \psi_X^t(x) = b\}$$

les variétés stables et instables des points $a, b \in \mathrm{Crit}(f)$ associées au champ de vecteurs X.

Convention 5. À partir de maintenant, les lettres a et b non quantifiées désigneront toujours des points critiques de f.

Définition 4 (Espaces de modules)**.** On appelle *espaces de modules* les ensembles suivants :

- **Espace des trajectoires de b à a :**

$$\mathcal{M}(b,a) = (W^u_X(b) \cap W^s_X(a)) \,/\, \sim,$$

où $\sim$ est l'action de $\mathbb{R}$ est donnée par $x \sim y \iff \exists t \in \mathbb{R} \text{ tq } x = \psi^t_X(y)$,

- **Espace des trajectoires de b à M^+ :**

$$\mathcal{M}(b,+) = W^u_X(b) \cap M^+,$$

- **Espace des trajectoires de $\star$ à a :**

$$\mathcal{M}(\star,a) = \star^- \cap W^s_X(a),$$

- **Espace des trajectoires de $\star$ à M^+ :**

$$\mathcal{M}(\star,+) = \{(x,t_+) \in \star^- \times]0,+\infty[\ ; \ \psi^{t_+}_X(x) \in M^+\}.$$

On représente ces espaces de modules dans la **Figure 2** en identifiant leurs éléments à des trajectoires (cette identification sera faite rigoureusement dans la sous-section 2.3).

2.2 Généricité

On va demander à nos pseudo-gradients de vérifier quelques hypothèses génériques, qui auront pour rôle de garantir une structure de variété à bord aux espaces de modules.

Convention 6. Quitte à perturber un peu f, on suppose dès à présent que les points critiques sont situés en dehors de M^+ et de $\star^-$.

Proposition 5 (Condition de Smale, ou condition de transversalité I)**.** *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un champ de vecteurs X', qui est une ε-bonne approximation de X, et qui vérifie en plus :*

$$\forall a,b \in \mathrm{Crit}(f), W^u_{X'}(b) \pitchfork W^s_{X'}(a).$$

Démonstration. La preuve est identique à celle de [AD10]. □

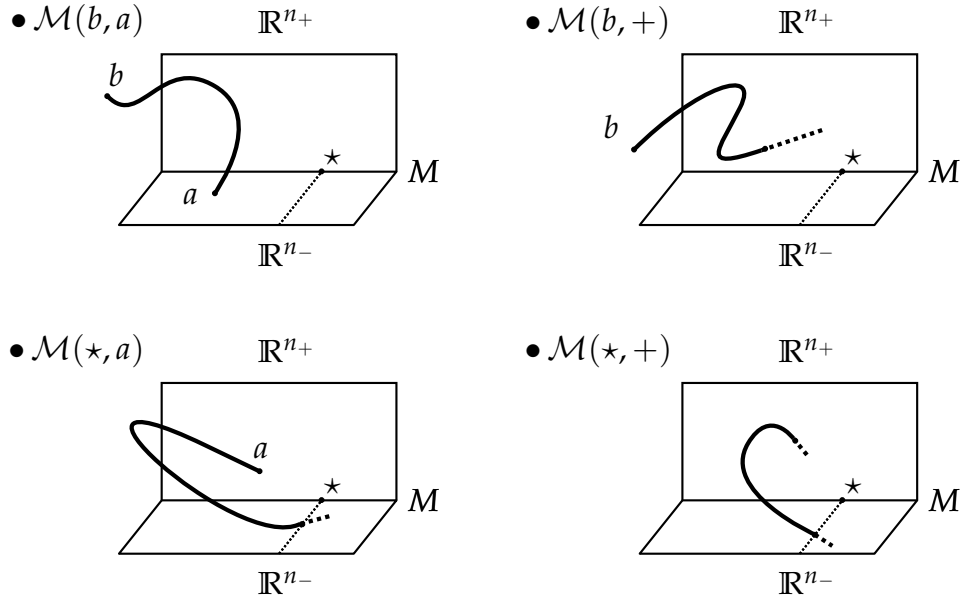

FIGURE 2 – Quelques exemples de trajectoires.

Proposition 6 (Condition de transversalité II)**.** *Pour tout point critique b, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un champ de vecteurs X', qui est une ε-bonne approximation de X, et qui vérifie en plus :*

$$W^u_{X'}(b) \pitchfork M^+.$$

Démonstration. On commence par voir que $W^u_X(b) \cap M^+ = \Theta^{-1}(0)$, où

$$\Theta : \begin{array}{ccc} W^u_X(b) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n_-} \\ x & \longmapsto & \pi_-(x) \end{array}.$$

Le théorème de Sard assure l'existence d'un $\epsilon \in \mathbb{R}^{n_-}$, arbitrairement proche de 0, qui est une valeur régulière de Θ. On va choisir un pseudo-gradient qui va légèrement translater la variété instable de b, pour faire en sorte que sa nouvelle intersection avec M^+ soit son ancienne intersection avec $M \times \mathbb{R}^{n_+} \times \{\epsilon\}$.

Soit alors $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bosse centrée en 0, valant 1 sur $[-B, +B]$ et 0 sur $\mathbb{R}\backslash]-B-\iota, B+\iota[$, avec $B > 0$ et $\iota > 0$ choisis tels que si $||x_-|| \leq B + \iota$, alors (p, x_+, x_-) n'est pas un point critique de f (ce qui est possible grâce à notre **Convention 6**) et tels que $||\epsilon|| < B$. On note $M = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\beta'(t)|$. Soit ensuite $\tilde{\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une seconde fonction bosse centrée en 0, valant 1 sur $[-A, A]$ et 0 sur $\mathbb{R}\backslash]-A-\iota', A+\iota'[$, avec $\iota' > 0$.

On appelle Φ l'application définie par

$$\Phi(p, x_+, x_-) = (p, x_+, x_- - \beta(||x_-||) \cdot \tilde{\beta}(||x_+||) \cdot \epsilon).$$

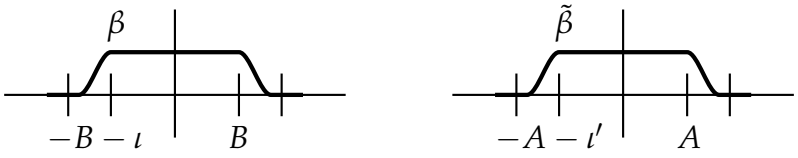

FIGURE 3 – Nos fonctions bosses.

Lemme 1. *Pour $||\epsilon||$ assez petite, l'application Φ est un difféomorphisme de M^*.*

Démonstration. Ce résultat est une conséquence du théorème d'inversion globale. Vérifions-en les hypothèses :

1. Φ **est injective :** Supposons que $\Phi(p, x_+, x_-) = \Phi(p', x'_-, x'_+)$. On a bien sûr que $p = p'$ et que $x_+ = x'_+$. De plus, $x_- - \beta(||x_-||) \cdot \tilde{\beta}(||x_+||) \cdot \epsilon = x'_- - \beta(||x'_-||) \cdot \tilde{\beta}(||x'_+||) \cdot \epsilon$, et donc $x_- - x'_- = [\tilde{\beta}(||x_+||) \cdot (\beta(||x_-||) - \beta(||x'_-||))] \cdot \epsilon$. L'inégalité des accroissements finis donne alors que

$$||x_- - x'_-|| \leq M \cdot ||x_- - x'_-|| \cdot ||\epsilon||.$$

   Quitte à changer ϵ en un vecteur de norme strictement plus petite que $\frac{1}{M}$, on obtient finalement que $x_- = x'_-$, et ainsi Φ est injective.

2. Φ **est surjective :** Certainement.

3. $\Phi_\star$ **est inversible en tout point de** M^* **:** Il suffit de vérifier cette inversibilité pour les points de

$$M \times]-A-\iota', -A[\cup]A, A+\iota'[^{n_+} \times]-B-\iota, -B[\cup]B, B+\iota[^{n_-},$$

   étant donné que sur le complémentaire de cet ensemble Φ n'est autre que soit l'identité, soit une translation (et donc $\Phi_\star$ est soit l'identité, soit l'identité). Pour de tels points, en prenant des coordonnées quelconques en M et les coordonnées usuelles sur $\mathbb{R}^n$, la matrice de $\Phi_\star$ est

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_m & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{n_+} & 0 \\ 0 & I & J \end{pmatrix},$$

   où

$$(I_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n_- \\ 1 \leq j \leq n_+}} = \beta(||x_-||) \cdot \tilde{\beta}'(||x_+||) \cdot \frac{x_{+,j}}{||x_+||} \cdot \epsilon_i,$$

et où

$$(J_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n_-\\1\leq j\leq n_-}} = \delta_{i,j} + \beta'(||x_-||)\cdot\tilde{\beta}(||x_+||)\cdot\frac{x_{-,j}}{||x_-||}\cdot\epsilon_i.$$

Quitte à changer ϵ en un vecteur de norme assez petite pour que cette matrice soit à diagonale strictement dominante, on obtient alors l'inversibilité de $\Phi_\star$.

Finalement, d'après le théorème d'inversion globale, Φ est un difféomorphisme de M^* sur lui-même. □

Notons maintenant $\Phi_\star X$ le champ de vecteurs X poussé en avant par Φ, défini par $(\Phi_\star X)_x = (\Phi_{\star,\Phi^{-1}(x)})(X_{\Phi^{-1}(x)})$. Ce champ de vecteurs est $\mathcal{C}^1$-proche de X (car Φ peut être rendue aussi proche que l'on souhaite de l'identité au sens $\mathcal{C}^1$), égal à X sur les cartes de Morse Ω_i de chaque point critique (comme Φ est l'identité au voisinage de chaque point critique), et est égal à X en dehors de notre compact K (en fait légèrement épaissi en $M\times[-A-\iota',A+\iota']^n$, mais cela n'a pas d'importance). Il ne reste plus qu'à établir la transversalité recherchée : pour cela, on commence par montrer que $\Phi(\psi^t_X(x)) = \psi^t_{\Phi_\star X}(\Phi(x))$. On obtient en effet en dérivant par rapport à t que

$$[\Phi(\psi^t_X(x))]' = \Phi_{\star,\psi^t_X(x)}(X_{\psi^t_X(x)}) = (\Phi_\star X)_{\Phi(\psi^t_X(x))},$$

puis que

$$[\psi^t_{\Phi_\star X}(\Phi(x))]' = (\Phi_\star X)_{\psi^t_{\Phi_\star X}(\Phi(x))},$$

et les conditions initiales $\Phi(\psi^t_X(x))|_{t=0} = \psi^t_{\Phi_\star X}(\Phi(x))|_{t=0} = \Phi(x)$ permettent de conclure. Ainsi :

$$\begin{aligned}
W^u_{\Phi_\star X}(b) &= \{x\in M^*\ ;\ \lim_{t\to-\infty}\psi^t_{\Phi_\star X}(x) = b\}\\
&= \{x\in M^*\ ;\ \lim_{t\to-\infty}\Phi(\psi^t_X(\Phi^{-1}(x))) = b\}\\
&= \{x\in M^*\ ;\ \lim_{t\to-\infty}\psi^t_X(\Phi^{-1}(x)) = \Phi^{-1}(b)\}\\
&= \{\Phi(x)\in M^*\ ;\ \lim_{t\to-\infty}\psi^t_X(x) = \Phi^{-1}(b)\}\\
&= \Phi(W^u_X(\Phi^{-1}(b))).
\end{aligned}$$

Comme $b = \Phi(b)$, on obtient que[7]

$$W^u_{\Phi_\star X}(b)\cap M^+ = \Phi(W^u_X(b))\cap\Phi(M\times\mathbb{R}^{n_+}\times\{\epsilon\}) = \Phi\big(W^u_X(b)\cap(M\times\mathbb{R}^{n_+}\times\{\epsilon\})\big).$$

7. Ici, les ensembles M^+ et $\Phi(M\times\mathbb{R}^{n_+}\times\{\epsilon\})$ ne sont pas égaux : Φ ne translate pas tout $M\times\mathbb{R}^{n_+}\times\{\epsilon\}^{n_-}$, mais seulement le compact $M\times[-A,A]^{n_+}\times\{\epsilon\}^{n_-}$. Cependant, les intersections ayant lieu dans ce compact (voir la **Proposition 8**), l'égalité reste vraie.

La transversalité de cette intersection découle enfin du fait qu'elle est l'image de l'intersection déjà transverse $W^u_X(b) \cap (M \times \mathbb{R}^{n_+} \times \{\epsilon\})$ par le difféomorphisme Φ, et le fait que cette cette dernière soit effectivement transverse est un résultat classique.

□

Proposition 7 (Condition de transversalité III)**.** *Pour tout point critique a, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un champ de vecteurs X', qui est une ε-bonne approximation de X, et qui vérifie en plus :*

$$\star^- \pitchfork W^s_{X'}(a).$$

Démonstration. On commence par voir que $\star^- \cap W^s_X(a) = \Theta^{-1}(\star, 0)$, où

$$\Theta : \begin{array}{ccc} W^s_X(a) & \longrightarrow & M \times \mathbb{R}^{n_+} \\ x & \longmapsto & (\pi_M(x), \pi_+(x)) \end{array}.$$

Le théorème de Sard assure l'existence d'un $(\tilde{\star}, \epsilon) \in M \times \mathbb{R}^{n_+}$, arbitrairement proche de $(\star, 0)$, qui est une valeur régulière de Φ. On choisit cette fois-ci un difféomorphisme qui translate le long de $\mathbb{R}^{n_+}$ et dans un compact le plan $M \times \{\epsilon\} \times \mathbb{R}^{n_-}$ sur M^-, et qui translate le long de M le point $\tilde{\star}$ sur le point $\star$ (on choisit $\tilde{\star}$ assez proche de $\star$ pour qu'ils soient présents dans un même ouvert de carte). Le reste de la preuve est identique à celle de la **Proposition 6**. □

Convention 7. Dans la suite, on considèrera un champ Morse-Smale (i.e. un champ de pseudo-gradients adapté à f vérifiant les trois conditions de transversalité), toujours noté X, et on désignera plus simplement par $\psi^t(x)$ son flot.

Corollaire 2. *Avec la **Convention 7**, les espaces de modules sont des variétés, dont les dimensions (lorsqu'ils sont non-vides) sont données par :*

1. $\dim \mathcal{M}(b, a) = |b| - |a| - 1$,
2. $\dim \mathcal{M}(b, +) = |b|$,
3. $\dim \mathcal{M}(\star, a) = -|a|$,
4. $\dim \mathcal{M}(\star, +) = 1$.

Démonstration.

- **Espace des trajectoires de b à a :** Grâce à la condition de Smale, $W^u(b) \cap W^s(a)$ est une variété de dimension $|b| - |a|$. L'action de $\mathbb{R}$ étant libre et le quotient étant séparé, $\mathcal{M}(b, a)$ est une variété de dimension

$$\dim \mathcal{M}(b, a) = |b| - |a| - 1.$$

- **Espace des trajectoires de b à M^+ :** La seconde condition de transversalité assure que $\mathcal{M}(b, +)$ est une variété de dimension

$$\dim \mathcal{M}(b, +) = \mathrm{Ind}(b) + (m + n_+) - (m + n) = \mathrm{Ind}(b) - n_- = |b|.$$

- **Espace des trajectoires de $\star$ à a :** La troisième condition de transversalité assure que $\mathcal{M}(\star, a)$ est une variété de dimension

$$\dim \mathcal{M}(\star, a) = n_- + (m + n - (|a| + n_-)) - (m + n) = -|a|.$$

- **Espace des trajectoires de $\star$ à M^+ :** On réecrit $\mathcal{M}(\star, +)$ comme $\Psi^{-1}(M^+)$, où

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \star^- \times]0, +\infty[& \longrightarrow & M^* \\ (x, t_+) & \longmapsto & \psi^{t_+}(x) \end{array}.$$

  On vérifie que Ψ est transverse à M^+, ce qui implique que $\mathcal{M}(\star, +)$ est une variété de dimension

$$\dim \mathcal{M}(\star, +) = n_- + 1 - n_- = 1.$$

□

2.3 Compactification

On va rendre compact les espaces de trajectoires jusqu'à M^+ en y ajoutant les trajectoires brisées, tout en prenant en compte la topologie déjà présente sur ces espaces. Avant cela, on commence par identifier les espaces de modules à des espaces de trajectoires, auxquelles on peut associer des temps de trajet.

Identification entre espaces de modules et trajectoires

On commence par faire les identifications suivantes, sous forme de remarque :

Remarque 4. 1. On peut identifier un point de $\mathcal{M}(b, a)$ à une classe d'équivalence de trajectoires $[\beta]$, où $\beta \sim \beta' \iff \exists T \in \mathbb{R}$ tq $\beta' = \beta(\bullet - T)$, l'identification étant donnée par $[x] \mapsto [\psi^t(x)]$. On constate que, indépendamment du représentant choisi,

$$\lim_{t \to -\infty} \beta(t) \text{ et } \lim_{t \to +\infty} \beta(t)$$

sont bien définies, respectivement égales à b et a. On s'autorisera ainsi à noter β un point de $\mathcal{M}(b, a)$. Le seul moment où il faudra se rappeler que β désigne une classe d'équivalence sera lors de la définition du temps de trajet dans la **Définition 5**.

2. On identifie aussi :
   (a) un point $x \in \mathcal{M}(b, +)$ à la trajectoire $\psi^t(x)$, que l'on imagine « coupée sur M^+ » (i.e. on considère la restriction $]-\infty, 0] \ni t \mapsto \psi^t(x)$),

(b) un point $y \in \mathcal{M}(\star, a)$ à la trajectoire $\psi^t(y)$, que l'on imagine « coupée sur $\star$ » (ici la restriction $[0, +\infty[\ni t \mapsto \psi^t(x)$),

(c) et un point $(z, t_+) \in \mathcal{M}(\star, +)$ à la trajectoire $\psi^t(z)$ (et donc $\psi^{t_+}(z)$ appartient à M^+), que l'on imagine « coupée sur $\star$ et sur M^+ » (et là la restriction $[0, t_+] \ni t \mapsto \psi^t(x)$).

Proposition 8. *Les trajectoires ainsi obtenues sont toutes comprises dans K.*

Démonstration. En effet, si l'une des trajectoires passe par un point $x \in M^* \setminus K$, on a l'alternative suivante :

1. soit $x \in M \times \left(]-\infty, -A[\cup]A, +\infty[\right)^{n_+} \times \mathbb{R}^{n_-}$, et en projetant l'équation vérifiée par $\psi^t(x)$ sur $\mathbb{R}^{n_+}$, on obtient en intégrant que $\psi^t_+(x) = e^{-2t}u$, avec $u \in \mathbb{R}^{n_+}$,
2. soit $x \in M \times \mathbb{R}^{n_+} \times \left(]-\infty, -A[\cup]A, +\infty[\right)^{n_-}$, et en projetant l'équation vérifiée par $\psi^t(x)$ sur $\mathbb{R}^{n_-}$, on obtient en intégrant que $\psi^t_-(x) = e^{2t}v$, avec $v \in \mathbb{R}^{n_-}$.

Ainsi, si x est un tel point d'une trajectoire de $\beta \in \mathcal{M}(b, a)$, on est dans l'un des deux cas précédents, et on obtient une contradiction grâce au fait que $\lim_{t\to-\infty} \beta(t) = b$ ou $\lim_{t\to+\infty} \beta(t) = a$. De même, si x est un tel point d'une trajectoire $\beta \in \mathcal{M}(b, +)$, la contradiction vient cette-fois ci soit du fait que $\lim_{t\to-\infty} \beta(t) = b$, soit du fait que pour tout $t \geq 0$, $||\beta(t)|| = |e^{2t}| \cdot ||v|| > 0$ (si $||v|| = 0$ alors $x \in M^+$, et on était en fait dans le premier cas), et ainsi il est impossible que x arrive sur M^+. L'argument est analogue pour $\mathcal{M}(\star, a)$ et pour $\mathcal{M}(\star, +)$. □

Temps de trajet

Ces identifications en tête, on va être capable d'associer un temps de trajet, dépendant des cartes de Morse préalablement fixées, à chaque élément d'un espace de module :

Définition 5 (Temps de trajet)**.** On suppose que Ω_b n'intersecte pas M^+ et Ω_a n'intersecte pas $\star^-$.

1. Soit $\beta \in \mathcal{M}(b, a)$, tel que β sorte de Ω_b au temps t_b et entre dans Ω_a au temps t_a . Le *temps de trajet de Ω_b à Ω_a de β* est
$$\tau_\beta = t_a - t_b \in]0, +\infty[.$$
2. Soit $\beta \in \mathcal{M}(b, +)$, tel que β sorte de Ω_b au temps t_b. Le *temps de trajet de Ω_b à M^+ de β* est
$$\tau_\beta = 0 - t_b \in]0, +\infty[.$$

3. Soit $\beta \in \mathcal{M}(\star, a)$, tel que β entre dans Ω_a au temps t_a. Le *temps de trajet de* $\star$ *à* Ω_a *de* β est
$$\tau_\beta = t_a - 0 \in]0, +\infty[.$$
4. Soit $\beta \in \mathcal{M}(\star, +)$. Le *temps de trajet de* $\star$ *à* M^+ *de* β est défini par
$$\tau_\beta = t_+ \in]0, +\infty[.$$

Si jamais on dispose d'une trajectoire qui ne fait que passer dans Ω_b et/ou Ω_a, partant de $\star$ et/ou arrivant sur M^+, on définit son temps de trajet de manière analogue.

Remarque 5.
1. Dans le cas où $\beta \in \mathcal{M}(b, a)$, le temps de trajet est bien défini : si β' est une reparamétrisation de β, alors
$$\tau_{\beta'} = (t_b + T) - (t_a + T) = t_b - t_a = \tau_\beta.$$
2. On considère une suite de trajectoires (β_n) d'un des espaces de modules précédents. Si (τ_{β_n}) est la suite des temps de trajet de Ω_b à Ω_a des β_n, et si $(\tilde{\tau}_{\beta_n})$ est la suite des temps de trajet de $\tilde{\Omega}_b$ à $\tilde{\Omega}_a$, où $\tilde{\Omega}_b$ et $\tilde{\Omega}_a$ sont d'autres images de cartes de Morse de b et a, alors :
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \tau_\beta = +\infty \iff \sup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\tau}_{\beta_n} = +\infty.$$
Les cartes de Morse que l'on se fixe n'ont donc aucune importance quant à la vérification du fait qu'une suite de temps de trajet est bornée ou non.

Proposition 9. *Dans le cas où* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \tau_{\beta_n} = +\infty$*, alors il existe un point critique tel que, pour tout voisinage* $\mathcal{V}$ *de ce point critique, il existe une trajectoire* $\beta_{n_\mathcal{V}}$ *qui intersecte* $\mathcal{V}$*.*

Démonstration. On suppose dans un premier temps que les trajectoires vont de Ω_b à Ω_a. Si la conclusion n'était pas vraie, on aurait comme dans la preuve de la **Proposition 4** un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout n,
$$f(\beta_n(t_a^n)) - f(\beta_n(t_b^n)) \leq -\varepsilon(t_a^n - t_b^n),$$
avec des notations évidentes. Or $f(\beta_n(t_a^n)) - f(\beta_n(t_b^n)) =: -e$, avec $e > 0$, ne dépend pas de n (c'est l'écart entre les niveaux de sortie de Ω_b et d'entrée de Ω_a), et $t_a^n - t_b^n$ est égal à τ_{β_n} par définition. Ainsi,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \tau_{\beta_n} \leq \frac{e}{\varepsilon},$$

et donc $\sup_{n\in\mathbb{N}} \tau_{\beta_n} \leq \frac{e}{\varepsilon}$. À présent, supposons que les trajectoires vont de Ω_b à M^+. En contredisant à nouveau notre conclusion, on aurait l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que

$$f(\beta_n(0)) - f(\beta(t_b^n)) \leq -\varepsilon(0 - t_b^n),$$

avec des notations (toujours) évidentes. Or, la **Proposition 8** nous apprend que, pour tout n, $\beta_n(0)$ appartient à K, sur lequel f est minorée par un certain ι. Ainsi, en posant $-e = \iota - f(\beta_n(t_b^n))$ (qui ne dépend pas de n), on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \tau_{\beta_n} \leq \frac{e}{\varepsilon},$$

et nous avons la même conclusion. L'argument est analogue pour les trajectoires allant de $\star$ à Ω_a et de $\star$ à M^+. □

Ajout des trajectoires brisées

Convention 8. Quitte à perturber un peu f, on suppose dès à présent que les points critiques sont ordonnés, i.e. que $f(c_1) > f(c_2) > \cdots > f(c_{\#I})$: cela va nous servir à décrire plus facilement les ensembles qui vont intervenir ci-dessous.

- **Compactification de l'espace des trajectoires de b à M^+ :** On pose

$$\bar{\mathcal{M}}(b,+) = \cup_{q=0}^{\#I}[\cup_{i_1<\cdots<i_q} \mathcal{M}(b,c_{i_1}) \times \cdots \times \mathcal{M}(c_{i_{q-1}},c_{i_q}) \times \mathcal{M}(c_{i_q},+)]$$

(le premier terme de cette union est par convention $\mathcal{M}(b,+)$). On munit cet ensemble de la topologie suivante : soit $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_q,\lambda_{q+1}) \in \mathcal{M}(b,c_{i_1}) \times \cdots \times \mathcal{M}(c_{i_{q-1}},c_{i_q}) \times \mathcal{M}(c_{i_q},+)$ une trajectoire brisée. Pour chaque point critique impliqué, ici $b, c_{i_1},\ldots,c_{i_q}$, on considère des voisinages ouverts de l'entrée et de la sortie de la trajectoire brisée dans la carte de Morse du point critique (dans leurs niveaux). On note $\mathbf{U}^e$ la collection des voisinages des points d'entrées, et $\mathbf{U}^s$ la collection des voisinages des points de sorties. On considère enfin un voisinage U^+ de $\lambda_{q+1}(0)$ dans M^+ (le 0 indique qu'on repense à cette trajectoire comme à un simple point de M^+ : on devra jongler entre nos identifications plusieurs fois, mais le contexte sera toujours assez clair pour qu'on n'ait pas à le repréciser). On définit l'ensemble $\mathcal{W}(\lambda,\mathbf{U}^e,\mathbf{U}^s,U^+)$ en déclarant que $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_k,\mu_{k+1}) \in \mathcal{W}(\lambda,\mathbf{U}^e,\mathbf{U}^s,U^+)$ si et seulement si :

1. $k \leq q$,
2. il existe des entiers $i'_1 < \cdots < i'_k$ tels que :
   (a) $(i'_1,\ldots,i'_k)$ est un sous k-uplet de $(i_1,\ldots,i_q)$,
   (b) $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_k,\mu_{k+1}) \in \mathcal{M}(b,c_{i'_1}) \times \cdots \times \mathcal{M}(c_{i'_{k-1}},c_{i'_k}) \times \mathcal{M}(c_{i'_k},+)$,

(c) la trajectoire brisée entre et sort des cartes de Morse de chaque point critique impliqué $(b, c_{i_1}, \dots, c_{i_q})$ par les voisinages de $\mathbf{U}^e$ et $\mathbf{U}^s$ correspondants, et $\mu_{k+1}(0) \in U^+$.

Les $\mathcal{W}(\lambda, \mathbf{U}^e, \mathbf{U}^s, U^+)$ forment une base de voisinages pour une topologie sur $\bar{\mathcal{M}}(b, +)$.

La démonstration de la compacité de cet espace repose sur un résultat découlant de la régularité du flot, nous permettant en connaissant nos trajectoires à un niveau $A = \{f = a\}$ donné d'obtenir des informations sur ces mêmes trajectoires dans un autre ensemble B.

Lemme 2. *Soit $A = \{f = a\}$ et B un fermé, avec $A \cap B = \varnothing$. On suppose que (x_n) est une suite de points de A qui tend vers $x_\infty \in A$, telle que pour tout n il existe un temps t_n tel que $\psi^{t_n}(x_n) \in B$, et telle que $\sup_{n\in\mathbb{N}} t_n < +\infty$. Alors il existe un temps $t_\infty \in]0, +\infty[$ tel que $\psi^{t_0}(x_0) \in B$ et tel qu'à extraction près, $\lim_{n\to+\infty} t_n = t_\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \psi^{t_n}(x_n) = \psi^{t_\infty}(x_\infty)$.*

Démonstration. À extraction près, on peut supposer que la suite (t_n) converge vers un certain $t_\infty \in [0, +\infty[$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \psi^{t_n}(x_n) = \psi^{t_\infty}(x_\infty)$, et comme B est un fermé de M^*, on a en plus que $\psi^{t_\infty}(x_\infty)$ appartient à B. Si jamais $t_\infty = 0$, alors $x_\infty = \psi^{t_\infty}(x_\infty)$ appartiendrait à $A \cap B = \varnothing$, ce qui serait contradictoire. Ainsi, $t_\infty \in]0, +\infty[$. □

Remarque 6 (Une différence entre le cas Morse et le cas Morse stable)**.** Dans le cas Morse, les ensembles B concernés sont eux aussi des niveaux : comme les trajectoires ne peuvent les intersecter qu'une seule fois, l'extraction de la conclusion **Lemme 2** n'a plus lieu d'être.

Montrons maintenant que $\bar{\mathcal{M}}(b, +)$ est bien une compactification de $\mathcal{M}(b, +)$:

Proposition 10. *L'espace $\bar{\mathcal{M}}(b, +)$ muni de cette topologie est compact.*

Démonstration. Quand on extraira des sous-suites de points d'intersections de trajectoires avec des ensembles, on signifiera en réalité qu'on extrait la sous-suite de trajectoires correspondantes. De plus, on gardera la même notation pour la suite et la sous-suite que l'on aura extraite.

Soit (λ_n) une suite de trajectoires de $\bar{\mathcal{M}}(b, +)$. On commence par supposer que λ_n appartient à $\mathcal{M}(b, +)$ pour tout n. On a l'alternative suivante :

- La suite des temps de trajet de Ω_b à M^+ des λ_n est bornée. Comme les trajectoires coupent toutes la sphère instable de b, i.e. l'ensemble $S^u(b) = \partial\Omega_b \cap W^u(b)$, on peut par compacité extraire une suite de points x_n d'intersections des trajectoires λ_n avec cette sphère, qui tend vers un point limite x_∞ [8]. L'hypothèse sur les temps de trajet nous permet d'appliquer le **Lemme 2** : on obtient alors une trajectoire

$$\lambda_\infty \in \mathcal{M}(b,+) \subset \bar{\mathcal{M}}(b,+)$$

limite d'une sous-suite de (λ_n).

•• La suite des temps de trajet de Ω_b à M^+ des λ_n est non bornée. D'après la **Proposition 9**, il existe un point critique c tel que la suite de trajectoires pénètre dans tout voisinage de c. On peut alors extraire une sous-suite de trajectoires de (λ_n) qui entrent dans Ω_c en y_n et en sortent en $\tilde{y}_n$, de telle sorte que $y_\infty = \lim_{n\to+\infty} y_n$ appartienne à $S^s(c)$ et $\tilde{y}_\infty = \lim_{n\to+\infty} \tilde{y}_n$ appartienne à $S^u(c)$ (où $S^s(c) = \partial\Omega_c \cap W^s(c)$). Les trajectoires obtenues vont de Ω_b à Ω_c et de Ω_c à M^+. La discussion devient :

  (a) Les suites des temps de trajet de Ω_b à Ω_c et de Ω_c à M^+ des λ_n sont bornées. On commence par récupérer la suite (x_n) de $S^u(b)$ [9] des points s'envoyant sur les y_n au temps t_n, dont on extrait une sous-suite convergente vers un certain $x_\infty \in S^u(b)$. D'après le **Lemme 2**, il existe un $t_\infty \in]0,+\infty[$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \psi^{t_n}(x_n) = \psi^{t_\infty}(x_\infty)$. Par unicité de la limite, on obtient $\psi^{t_\infty}(x_\infty) = y_\infty$. On a donc fabriqué une trajectoire $\lambda^1_\infty \in \mathcal{M}(b,c)$, à savoir la trajectoire $\psi^t(x_\infty)$. Ensuite, en appliquant à nouveau le **Lemme 2**, il existe un temps $\tilde{t}_\infty \in]0,+\infty[$ tel qu'à extraction près $\lim_{n\to+\infty} \psi^{\tilde{t}_n}(\tilde{y}_n) = \psi^{\tilde{t}_\infty}(\tilde{y}_\infty) \in M^+$, où $\tilde{t}_n$ est défini par $\psi^{\tilde{t}_n}(\tilde{y}_n) = \lambda_n(0)$. On nomme $\lambda^2_\infty \in \mathcal{M}(c,+)$ la trajectoire $\psi^t(\tilde{y}_\infty)$. On a construit une trajectoire

$$\lambda_\infty = (\lambda^1_\infty, \lambda^2_\infty) \in \mathcal{M}(b,c) \times \mathcal{M}(c,+) \subset \bar{\mathcal{M}}(b,+)$$

  limite d'une sous-suite de (λ_n).

  (b) L'une des suites des temps de trajet de Ω_b à Ω_c et de Ω_c à M^+ des λ_n est non bornée. On étudie à nouveau l'alternative • ou ••, en s'intéressant d'abord aux trajet effectués entre Ω_b et Ω_c puis aux trajet effectués entre Ω_c et M^+. Il n'y a que deux nouveaux cas à prendre en compte : le passage d'un point critique c_i déjà impliqué vers un

8. On est ici dans le cas particulier où toutes les trajectoires intersectent $S^u(b)$, mais l'argument repose sur le seul fait qu'elles intersectent $\partial\Omega_b$ et qu'on puisse extraire de ces intersections une sous-suite qui tende vers un point de $S^u(b)$.

9. Voir la remarque précédente.

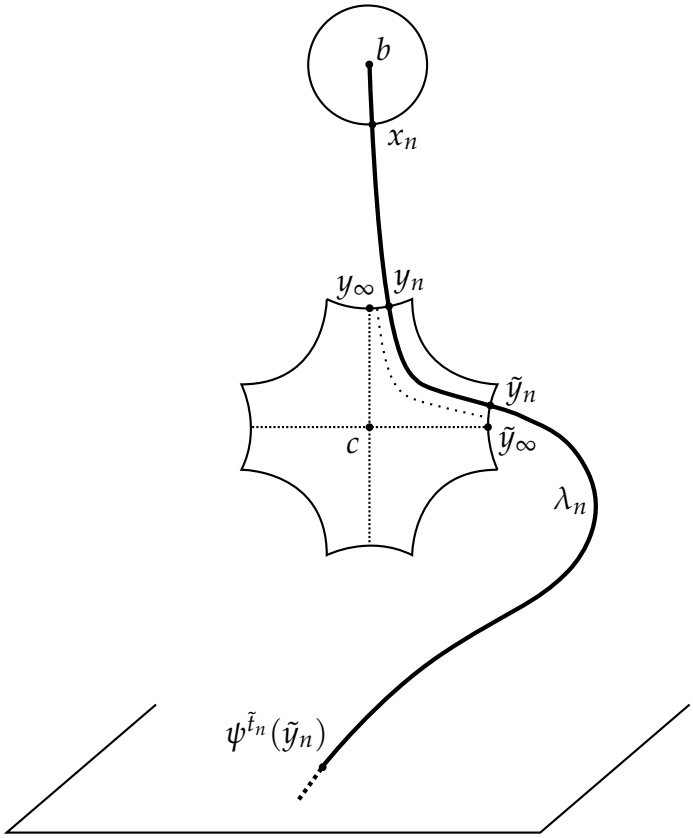

FIGURE 4 – Brisure sur un point critique c.

nouveau point critique c_i, et le passage d'un nouveau point critique c_j à un point critique déjà impliqué c_i. Les discussions pour ces configurations reposent sur les mêmes arguments : dans le premier cas, on récupère dans le niveau de sortie de Ω_i une suite (x_n), qui par hypothèse converge déjà vers un point x_∞ appartenant à $S^u(c_i)$ (il s'agit d'une sous-suite de $(\tilde{y}_n)$ créée lors de l'étape précédente concernant c_i), et dans le second cas on applique le **Lemme 2**, et on fabrique bien une trajectoire $\lambda_\infty^{j,i} \in \mathcal{M}(c_j, c_i)$. On répète ce processus, et ce un nombre fini de fois étant donné que cela implique (au moins) un nouveau point critique à chaque étape et que ces derniers sont en nombre fini. On obtient finalement une trajectoire

$$\lambda_\infty \in \mathcal{M}(b, c_1) \times \cdots \times \mathcal{M}(c_k, c_{k+1}) \times \mathcal{M}(c_{k+1}, +) \subset \bar{\mathcal{M}}(b, +)$$

limite d'une sous-suite de (λ_n).

Dans le cas général, où la suite (λ_n) est quelconque (i.e. potentielement bri-

sée), alors comme il n'y a qu'un nombre fini d'ensembles dans l'union

$$\cup_{q=0}^{\#I}[\cup_{i_1<\cdots<i_q}\mathcal{M}(b,c_{i_1})\times\cdots\times\mathcal{M}(c_{i_{q-1}},c_{i_q})\times\mathcal{M}(c_{i_q},+)],$$

il y a une infinité de termes de la suite dans l'un des $\mathcal{M}(b,c_{i_1})\times\cdots\times\mathcal{M}(c_{i_{q-1}},c_{i_q})\times\mathcal{M}(c_{i_q},+)$. On applique la discussion précédente à chaque suite composante de $(\lambda_n)=(\lambda_1^n,\ldots,\lambda_q^n,\lambda_{q+1}^n)$.

□

Remarque 7. Les efforts que nous venons de déployer par rapport à la preuve de la proposition analogue en théorie de Morse servent principalement à gérer les composantes dans les espaces de modules $\mathcal{M}(b,+)$, ainsi que comme annoncé à palier à l'alternative de la **Proposition 4** qui n'a pas lieu en théorie de Morse.

• **Compactification de l'espace des trajectoires de $\star$ à M^+ :** On pose

$$\bar{\mathcal{M}}(\star,+)=\mathcal{M}(\star,+)\cup\left[\cup_{i\in I,|c_i|=0}\mathcal{M}(\star,c_i)\times\mathcal{M}(c_i,+)\right]\cup\{(\star,0)\}.$$

On définit une topologie de façon semblable : pour une trajectoire brisée $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathcal{M}(\star,c_i)\times\mathcal{M}(c_i,+)$, on récupère des voisinages ouverts (dans leurs niveaux) U^e et U^s de l'entrée λ_1 et de la sortie de λ_2 dans Ω_i, ainsi qu'un voisinage $U^\star$ de $\lambda_1(0)$ dans $\star^-$ et un voisinage U^+ de $\lambda_2(0)$ dans M^+ ; pour $\lambda=(\star,0)$, on récupère un voisinage $U^\star$ de $\star$ dans $\star^-$ et un voisinage U^+ de $\star$ dans M^+.

Les ensembles $\mathcal{W}(\lambda,U^e,U^s,U^\star,U^+)$ constituent une base de voisinages pour une topologie sur $\bar{\mathcal{M}}(\star,+)$.

Proposition 11. *L'espace $\bar{\mathcal{M}}(\star,+)$ muni de cette topologie est compact.*

Démonstration. La démonstration de la compacité de cet espace est identique à celle précédemment proposée. □

2.4 Recollement

Convention 9. À partir de maintenant, on demande à ce que $|b|=1$.

On achève de mettre de la structure sur les espaces de modules en montrant que les compactifications obtenues dans la partie précédente sont en fait des variétés à bord, dont les bords sont exactement constitués des trajectoires brisées :

Proposition 12. *Les espaces $\bar{\mathcal{M}}(b,+)$ et $\bar{\mathcal{M}}(\star,+)$ sont des variétés à bord. De plus, on a :*

1. $\partial\bar{\mathcal{M}}(b,+) = \cup_{\substack{a\in \mathrm{Crit}(f)\\ |a|=0}} \mathcal{M}(b,a)\times\mathcal{M}(a,+)$,
2. $\partial\bar{\mathcal{M}}(\star,+) = \left[\cup_{\substack{a\in \mathrm{Crit}(f)\\ |a|=0}} \mathcal{M}(\star,a)\times\mathcal{M}(a,+)\right] \cup \{(\star,0)\}$.

Démonstration. La preuve est analogue à celle de [AD10] :

- Pour $\bar{\mathcal{M}}(b,+)$, l'idée est de fabriquer pour chaque trajectoire brisée (λ_1,λ_2) un plongement φ d'un intervalle $[0,\delta[$ dans l'espace de modules correspondant, tel que

$$\begin{cases} \varphi(0) = (\lambda_1,\lambda_2) \in \bar{\mathcal{M}}(b,+), \\ \varphi(s) \in \mathcal{M}(b,+) \text{ si } s \neq 0 \end{cases},$$

  et tel que si (β_n) est une suite de trajectoires qui tend vers (λ_1,λ_2), alors elle est dans $\mathrm{Im}(\varphi)$ pour n assez grand (i.e. chaque trajectoire brisée est en effet bien un bord). L'idée pour construire ce plongement est d'aller récupérer l'intervalle $[0,\delta[$ dans une carte de Morse, et l'argument technique qui permet de le faire rigoureusement est d'utiliser les conditions de transversalité établies précédemment.

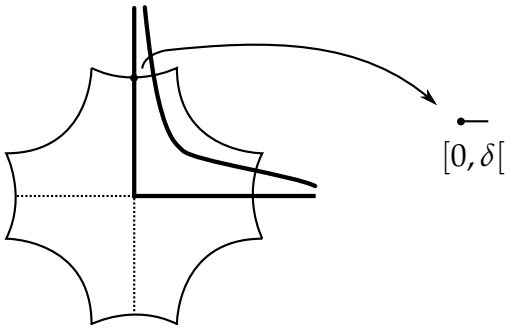

FIGURE 5 – L'intervalle $[0,\delta[$ récupéré dans une carte de Morse.

- Pour $\mathcal{M}(\star,+)$, le raisonnement est identique, sauf pour un point particulier du bord : $(\star,0)$. On raisonne de la manière suivante : on observe que $\mathcal{M}(\star,+)\cup\{(\star,0)\} = \mathrm{Y}^{-1}(M^+)$, où

$$\mathrm{Y} : \begin{array}{ccc} \star^- \times [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t_+) & \longmapsto & \psi^{t_+}(x) \end{array},$$

et on constate que Y est transverse à M^+. De plus, si l'on note π l'application

$$\pi : \begin{array}{ccc} \Upsilon^{-1}(M^+) & \longrightarrow & [0,+\infty[\\ (x,t_+) & \longmapsto & t_+ \end{array},$$

on remarque que π est transverse à $\{0\}$, ce qui implique que $(\star,0)$ est bien un point du bord de $\mathcal{M}(\star,)$.

□

3 Pas de Morse stable et lacets de Morse stable

On rappelle qu'on a fixé $|b| = 1$.

3.1 Pas de Morse stable...

... passant par un point critique b

D'après la **Proposition 12**, $\bar{\mathcal{M}}(b,+)$ est une variété peut-être à bord compacte de dimension 1, i.e. une union disjointe de cercles et de segments.

Définition 6 (Pas de Morse stable passant par un point critique)**.** Un *pas de Morse stable P passant par b* est une composante connexe à bord de $\bar{\mathcal{M}}(b,+)$ munie d'une orientation, ce qui correspond à la donnée du couple de trajectoires brisées $((\beta,\alpha),(\beta',\alpha'))$ formant le bord de cette composante connexe, où :

1. $\beta \in \mathcal{M}(b,a), \alpha \in \mathcal{M}(a,+), \beta' \in \mathcal{M}(b,a')$ et $\alpha' \in \mathcal{M}(a',+)$, avec a et a' des points critiques tels que $|a| = |a'| = 0$,
2. l'orientation induite sur le bord de la composante connexe est telle que l'orientation de (β,α) est -1 et celle de (β',α') est $+1$.

... passant par $\star$

Toujours d'après la **Proposition 12**, $\bar{\mathcal{M}}(\star,+)$ est une variété à bord compacte de dimension 1.

Remarque 8. On dispose d'une projection $\tau\colon \bar{\mathcal{M}}(\star,+) \to [0,+\infty]$, qui prolonge la projection « durée du trajet » $\tau : \mathcal{M}(\star,+) \to]0,+\infty[$ définie par $\tau(x,t_+) = t_+$, en posant $\tau(\star,0) = 0$ et $\tau(\beta,\alpha) = +\infty$.

Proposition 13. *Dans $\bar{\mathcal{M}}(\star,+)$, il y a exactement une composante connexe à bord $C_\star$ telle que $0 \in \tau(C_\star)$. Les autres composantes connexes à bord ont leurs bords au-dessus de $+\infty$.*

Démonstration. Comme $\tau^{-1}(0) \in M^+ \times \star^- = \{(\star, 0)\}$, seule la composante connexe $C_\star$ contenant le point $(\star, 0)$ est telle que $0 \in \tau(C_\star)$. □

Convention 10. On notera par la suite $\star$ la « trajectoire singulière »$(\star, 0)$,et $(\beta_\star, \alpha_\star)$ l'autre point du bord de la composante connexe contenant $\star$.

Définition 7 (Pas de Morse stable passant par $\star$)**.** On distingue deux types de pas :

- Un *pas de Morse stable distingué passant par* $\star$ est la composante connexe à bord exhibée dans la **Proposition 13**, munie d'une orientation. Cela correspond soit à la donnée du couple trajectoire singulière/trajectoire brisée $P_\star = (\star, (\beta_\star, \alpha_\star))$, soit à la donnée du couple trajectoire brisée/trajectoire singulière $\bar{P}_\star = ((\beta_\star, \alpha_\star), \star)$.
- Un *pas de Morse stable classique passant par* $\star$ est une composante connexe à bord de $\bar{\mathcal{M}}(\star, +)$ différente de $P_\star$ munie d'une orientation, ce qui correspond à la donnée du couple de trajectoires brisées $((\beta, \alpha), (\beta', \alpha'))$ formant le bord de cette composante connexe, où :
  1. $\beta \in \mathcal{M}(\star, a), \alpha \in \mathcal{M}(a, +), \beta' \in \mathcal{M}(\star, a')$ et $\alpha' \in \mathcal{M}(a', +)$, avec a et a' des points critiques tels que $|a| = |a'| = 0$,
  2. l'orientation induite sur le bord de la composante connexe est telle que l'orientation de (β, α) est -1 et celle de (β', α') est $+1$.

3.2 Lacets de Morse stable

Définition 8 (Lacets de Morse stable)**.** Un *lacet de Morse stable* ℓ est la donnée de pas de Morse stable

$$P_0 = P_\star, P_1 = ((\beta_1, \alpha_1), (\beta_1', \alpha_1')), \ldots, P_r = ((\beta_r, \alpha_r), (\beta_r', \alpha_r')), P_{r+1} = \bar{P}_\star$$

vérifiant :

1. $\alpha_1 = \alpha_r' = \alpha_\star$,
2. $\forall i \in \{1, \ldots, r-1\}, \alpha_i' = \alpha_{i+1}$.

On note $\ell = P_\star \cdot P_1 \cdot \ldots \cdot P_n \cdot \bar{P}_\star$ un lacet de Morse stable. Un tel lacet ℓ étant fixé, on note $\bar{\ell} = P_\star \cdot \bar{P}_r \cdot \ldots \cdot \bar{P}_1 \cdot \bar{P}_\star$, la barre au-dessus des pas de Morse stable signifiant que l'on renverse leur orientation (ce qui revient à changer $P = ((\beta, \alpha), (\beta', \alpha'))$ en $\bar{P} = ((\beta', \alpha'), (\beta, \alpha))$, et ce qui est compatible avec la notation déjà existante $\bar{P}_\star$).

On note

$$\mathcal{G}(f, X, \star)$$

le groupe libre engendré par les pas de Morse stable, quotienté par les relations $P \cdot \bar{P} = 1$, et on note

$$\mathcal{L}(f, X, \star)$$

le sous-groupe de $\mathcal{G}(f, X, \star)$ formé des lacets de Morse stable, dont on continue de noter les éléments $\ell = P_\star \cdot P_1 \cdot ... \cdot P_n \cdot \bar{P}_\star$ (avec « $\cdot$ » désignant désormais le produit dans le groupe quotient, on a par exemple l'égalité $P_\star \cdot P \cdot \bar{P} \cdot \bar{P}_\star = 1$).

4 Morphisme évaluation et résultat principal

4.1 Morphisme évaluation

On dispose d'un morphisme de groupes « évaluation » $\mathrm{ev} \colon \mathcal{L}(f, X, \star) \to \pi_1(M, \star)$, défini de la manière suivante. À un pas de Morse stable pré-compactifié $\mathring{P}$ (i.e. un ensemble de points d'un espace de modules non-compactifié qui correspond aux points intérieurs d'un pas de Morse stable P dans l'espace de modules compactifié), on peut associer une application $\mathrm{ev}_{\mathring{P}} \colon \mathring{P} \to M$ définie par

$$\begin{cases} \mathrm{ev}_{\mathring{P}}(x) = \pi_M(x) & \text{si } \mathring{P} \subset \mathcal{M}(b, +), \\ \mathrm{ev}_{\mathring{P}}(x, t_+) = \pi_M(\psi^{t_+}(x)) & \text{si } \mathring{P} \subset \mathcal{M}(\star, +). \end{cases}$$

Ces applications s'étendent par continuité [10] aux pas de Morse stable $P = ((\beta, \alpha), (\beta', \alpha'))$ (cas particulier $P_\star$ compris) en des applications ev_P, en posant

$$\begin{cases} \mathrm{ev}_P(\beta, \alpha) = \pi_M(\alpha(0)) & \text{si } \alpha \in \mathcal{M}(a, +), \\ \mathrm{ev}_P(\star) = \star & \text{pour le cas particulier.} \end{cases}$$

En choisissant des paramétrisations de chaque pas de Morse stable $\gamma_P \colon [-1, 1] \to P$, respectant l'orientation, on obtient avec les applications $\mathrm{ev}_P \circ \gamma_P$ des chemins dans M (commençant en α et terminant en α' si $P = ((\beta, \alpha), (\beta', \alpha'))$).

Par définition des lacets de Morse stable, l'application

$$\mathrm{ev} : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(f, X, \star) & \longrightarrow & \pi_1(M, \star) \\ P_\star \cdot P_1 \cdot ... \cdot P_n \cdot \bar{P}_\star & \longmapsto & [(\mathrm{ev}_{P_\star} \circ \gamma_{P_\star}) \cdot (\mathrm{ev}_{P_1} \circ \gamma_{P_1}) \cdot ... \cdot (\mathrm{ev}_{P_r} \circ \gamma_{P_r}) \cdot (\mathrm{ev}_{\bar{P}_\star} \circ \gamma_{\bar{P}_\star})] \end{array},$$

où « $\cdot$ » désigne à droite la concaténation de chemins, est bien définie (les chemins sont consécutifs, le lacet obtenu est basé en $\star$, et des choix différents de

10. Grâce au **Lemme 2**.

paramétrisations redonnent la même classe d'homotopie). Cette application est bien un morphisme.

Achevons alors notre travail en montrant notre résultat principal :

4.2 Résultat principal

Théorème 4 (Résultat principal)**.** *Le morphisme* ev *est surjectif.*

Démonstration. On suit la preuve de [Bar14], qu'on va essayer de résumer.

On fixe une fonction de Morse $f_0 : M \to \mathbb{R}$ (de manière générale, les objets indexés par 0 désigneront des objets de théorie de Morse) avec un seul minimum [11]. On fixe ensuite b_0 un point critique de f_0 d'indice de Morse 1. On choisit comme point $\star$ le minimum de f_0, et on note $\mathcal{M}_0(b_0, \star) = \{\gamma_-, \gamma_+\}$. On va construire un disque abstrait Δ, muni d'une application $\mathrm{ev}_\Delta : \Delta \to M$, tel que cette application se restreigne au bord de Δ en la concaténation du lacet de Morse (γ_-, γ_+) et de l'évaluation d'un lacet de Morse stable [12]. Comme les lacets de Morse génèrent le groupe fondamental de la variété, ceci montrera bien que le morphisme ev est surjectif.

Convention 11. La lettre b non-quantifiée désignera à présent soit un point critique de f tel que $|b| = 1$, soit le point $\star$. On continuera de rappeler cette alternative pour éviter les confusions.

On aura besoin des espaces de modules suivants :

- **Espace des trajectoires hybrides de b_0 à a :**

$$\mathcal{M}_h(b_0, a) = \pi_M^{-1}(W_0^u(b_0)) \cap M^- \cap W^s(a).$$

Proposition 14. *Les espaces $\mathcal{M}_h(b_0, a)$ sont des variétés de dimension $1 - |a|$, que l'on peut compactifier en les espaces $\bar{\mathcal{M}}_h(b_0, a)$ par ajout des trajectoires brisées, ce qui les munit de structures de variétés à bord dont les bords sont exactement constitués des trajectoires brisées : lorsque $|a| = 0$, on a*

$$\partial\bar{\mathcal{M}}_h(b_0, a) = \cup_{\substack{|b|=1 \\ (ou\ b=\star)}} \mathcal{M}_{h\ (ou\ 0)}(b_0, b) \times \mathcal{M}(b, a)$$

11. On ne détaillera pas cette construction, qui est toujours possible.
12. Plus précisément, du lacet servant à définir l'application, avant qu'on considère sa classe d'homotopie : on confondra désormais les deux.

Démonstration. Les preuves de chaque partie de cette assertion sont analogues à celles qui ont été données dans les sous-sections 2.2,2.3 et 2.4, si ce n'est qu'il faut ici prendre en compte les brisures de Morse, i.e. le cas $b = \star$. □

On fait les mêmes identifications et illustrations pour cet espace de modules que pour les précédents :

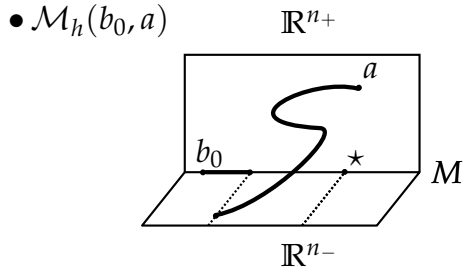

FIGURE 6 – Un exemple de trajectoire hybride.

Définissons ensuite l'ensemble

$$B(b_0) = [\cup_{\substack{|b|=1,|a|=0 \\ (\text{ou } b=\star)}} \mathcal{M}_{h\,(\text{ou } 0)}(b_0, b) \times \mathcal{M}(b, a) \times \mathcal{M}(a, +)] \cup [\mathcal{M}_0(b_0, \star) \times \{\star\}]$$

comme l'espace des trajectoires hybrides brisées deux fois, muni des projections

$$\wedge : \begin{array}{ccc} (\gamma, \beta, \alpha) & \mapsto & (\gamma, \beta) \\ (\gamma_\pm, \star) & \mapsto & \gamma_\pm \end{array} \quad \text{et} \quad \vee : \begin{array}{ccc} (\gamma, \beta, \alpha) & \mapsto & (\beta, \alpha) \\ (\gamma_\pm, \star) & \mapsto & \star \end{array},$$

respectivement « brisure haute » et « brisure basse ».

On va effectuer sur cet espace la « marche du crocodile », qui consiste à itérer alternativement les involutions « collage haut » et « collage bas » :

$$\#^\bullet : B(b_0) \to B(b_0) \text{ et } \#_\bullet : B(b_0) \to B(b_0),$$

définies respectivement par

$$\#^\bullet : \begin{cases} (\gamma, \beta, \alpha) & \in \mathcal{M}_{h\,(\text{ou } 0)}(b_0, b) \times \mathcal{M}(b, a) \times \mathcal{M}(a, +) & \longmapsto & (\gamma', \beta', \alpha) \\ (\gamma_\pm, \star) & \in \mathcal{M}_0(b_0, \star) \times \{\star\} & \longmapsto & (\gamma_\mp, \star) \end{cases},$$

où $(\gamma, \beta) \xrightarrow{\#} (\gamma', \beta')$ (cette notation signifiant que (γ', β') est l'autre point du bord de la composante connexe à bord de l'espace de modules concerné contenant (γ, β)), et par

$$\#_\bullet : \begin{cases} (\gamma, \beta, \alpha) & \in \mathcal{M}_{h\,(\text{ou } 0)}(b_0, b) \times \mathcal{M}(b, a) \times \mathcal{M}(a, +) & \longmapsto & (\gamma, \beta', \alpha') \\ (\gamma_\pm, \star) & \in \mathcal{M}_0(b_0, \star) \times \{\star\} & \longmapsto & (\gamma_\pm, \beta_\star, \alpha_\star) \end{cases},$$

où $(\beta, \alpha) \xrightarrow{\#} (\beta', \alpha')$.

Remarque 9.
1. Les composantes connexes concernées par $\#_\bullet$ sont toutes des pas de Morse stable.
2. Les seules transformations que l'on a du ajouter artificiellement sont $\#^\bullet(\gamma_\pm, \star) = (\gamma_\mp, \star)$.

La construction du disque Δ s'effectue alors de la manière suivante : on commence par fabriquer des copies abstraites des composantes connexes à bord des espaces de modules concernés, grâce à leurs suspensions (resp. leurs demi-suspensions pour les pas de Morse stable), qui sont homéomorphes à la suspension du segment $[-1, 1]$ (resp. la demi-suspension du segment $[-1, 1]$), et par conséquent homéomorphes à des diamants (resp. des diamants tronqués).

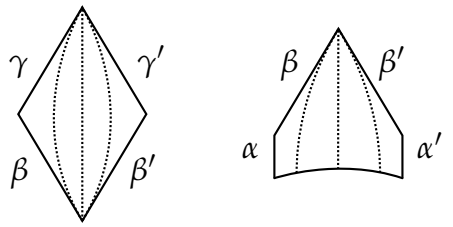

FIGURE 7 – Les copies abstraites.

Chacun de ces diamants δ a un bord correspondant à un couple de de trajectoires brisées, et est muni d'une application $\text{ev}_\delta : \delta \to M$, définie sur le diamant entier, qui a le comportement attendu (par exemple, elle est l'évaluation du lacet de Morse stable sur le côté tronqué des copies des pas de Morse stable).

On part finalement de la copie de la composante connexe de $\mathcal{M}_h(b_0, *)$ contenant $(\gamma_-, \beta_\star)$ et de la copie de $P_\star$, identifiées le long du côté correspondant à $\beta_\star$, et on itère collages bas et collages hauts : l'ensemble obtenu est un disque (il l'est à chaque étape), le morphisme ev_Δ est bien continu, et il a bien le comportement attendu sur le bord de δ.

□

Détaillons pour conclure ce mémoire le corollaire annoncé lors de l'introduction :

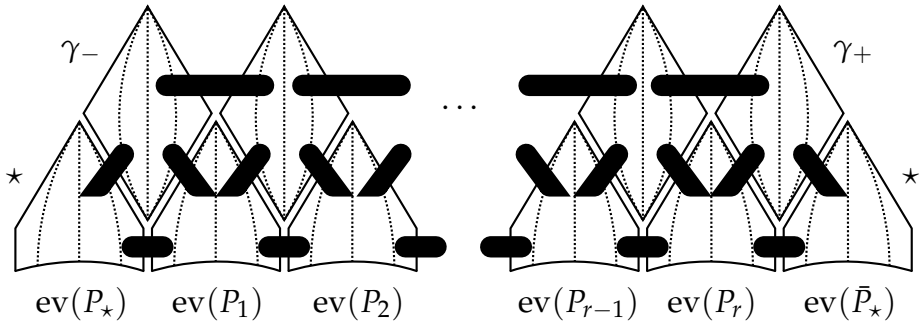

FIGURE 8 – La marche du crocodile et les identifications de bords.

Définition 9 (Multiplicité de Morse stable)**.** 1. On appelle *multiplicité de Morse stable du point critique* b, avec $|b| = 1$, le nombre de pas de Morse stable passant par b, i.e. l'entier

$$\nu(b) = \frac{1}{2} \sum_{a \ ; \ |a|=0} \#\mathcal{M}(b,a) \cdot \#\mathcal{M}(a,+).$$

2. On appelle *multiplicité de Morse stable du point* $\star$ le nombre de pas de Morse stable passant par $\star$, i.e. l'entier

$$\nu(\star) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{a \ ; \ |a|=0} \#\mathcal{M}(b,a) \cdot \#\mathcal{M}(a,+) - 1\Big).$$

Corollaire 3. *Pour toute variété fermée* M*, et pour toute fonction de Morse stable* $f : M \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, on a que*

$$\nu(\star) + \sum_{b \ ; \ |b|=1} \nu(b) \geq \mu_{\pi_1}(M).$$

5 Annexes

5.1 Le théorème de sortie de tout compact

Théorème 5 (Théorème de sortie de tout compact)**.** *Soit X un champ de vecteurs sur une variété M. Soit γ une trajectoire dont le domaine $]t_\star, t^\star[$ n'est par $\mathbb{R}$ tout entier. Si $t^\star < +\infty$ (resp. si $t_\star > -\infty$), il existe alors pour tout compact $K \subset M$ un temps $t_K \in]t_\star, t^\star[$ tel que pour tout $t_K \leq t < t^\star$, $\gamma(t) \in M \setminus K$ (resp. pour tout $t_\star < t \leq t_K$, $\gamma(t) \in M \setminus K$).*

Démonstration. On s'inspire de la preuve de [Lee12]. On suppose que $t^\star < +\infty$ (l'argument pour $t_\star > -\infty$ est similaire). On raisonne par l'absurde : soit K un compact tel que pour tout temps $t \in]t_\star, t^\star[$, il existe un temps $\tilde{t}$ tel que $t \leq \tilde{t} < t^\star$ et $\gamma(\tilde{t}) \in K$. On va montrer que l'on peut alors prolonger γ, ce qui contredira sa maximalité.

On note $p = \gamma(0)$, et on a donc $\gamma(t) = \psi^t(p)$. Si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de temps approchant $t^\star$ à gauche, l'hypothèse nous donne une suite de points $(\tilde{t}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui continuent d'approcher $t^\star$ à gauche, et tels que $\gamma(\tilde{t}_n) \in K$. Par compacité, on peut donc extraire de cette suite de points une sous-suite convergente vers un point $q \in M$. On choisit un voisinage U de q et un réel $\varepsilon > 0$ tels que ψ soit défini sur $]-\varepsilon, +\varepsilon[\times U$. On choisit un n assez grand pour avoir $\gamma(\tilde{t}_n) \in U$ et $\tilde{t}_n > t^\star - \varepsilon$, et on définit $\sigma \colon]t_\star, \tilde{t}_n + \varepsilon[\to M$ par

$$\sigma(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } t_\star < t < t^\star \\ \psi^{t-\tilde{t}_n} \circ \psi^{\tilde{t}_n}(p) & \text{si } \tilde{t}_n - \varepsilon < t < \tilde{t}_n + \varepsilon \end{cases}.$$

Les deux expressions sont égales sur $]t_\star, t^\star[\cap]\tilde{t}_n - \varepsilon, \tilde{t}_n + \varepsilon[$ (car $\psi^{t-\tilde{t}_n} \circ \psi^{\tilde{t}_n}(p) = \psi^t(p) = \gamma(t)$), donc σ est bien définie. C'est une courbe intégrale qui prolonge γ : un tel compact ne peut donc pas exister. □

5.2 Un résultat de transversalité

Proposition 15. *Soient $U \subset M$ et $V \subset N$ des variétés, et soit $f \colon M \to N$ telle que $f \pitchfork V$ et $f|_U \pitchfork V$. Alors $U \pitchfork f^{-1}(V)$.*

Démonstration. On a pour tout $p \in U \cap f^{-1}(V)$ que

$$\begin{aligned}
T_p(U \cap f^{-1}(V)) &= T_p((f|_U)^{-1}(V)) && \text{(par définition de la restriction)}\\
&= ((f|_U)_{\star,p})^{-1}(T_{f(p)}V) && \text{(comme } f|_U \pitchfork V\text{)}\\
&= ((f_{\star,p})|_{T_pU})^{-1}(T_{f(p)}V) && ((f|_U)_{\star,p} = (f_{\star,p})|_{T_pU})\\
&= [(f_{\star,p})^{-1}(T_{f(p)}V)] \cap T_pU && \text{(par définition de la restriction)}\\
&= T_pU \cap T_p(f^{-1}(V)) && \text{(comme } f \pitchfork V\text{).}
\end{aligned}$$

On conclut à l'aide de la formule de Grassmann : pour tout $p \in U \cap f^{-1}(V)$,

$$\begin{aligned}
&\dim(T_pU + T_p(f^{-1}(V)))\\
&= \dim T_pU + \dim T_p(f^{-1}(V)) - \dim[T_pU \cap T_p(f^{-1}(V))]\\
&= \dim T_pU + \dim T_p(f^{-1}(V)) - \dim[T_p(U \cap (f^{-1}(V)))]\\
&= \dim T_pU + (\dim T_pM - \operatorname{codim}_{T_pM} T_p(f^{-1}(V))) - [\dim T_pU - \operatorname{codim}_{T_pU} T_p(U \cap (f^{-1}(V)))]\\
&= \dim T_pU + (\dim T_pM - \operatorname{codim}_{T_{f(p)}N} T_{f(p)}V) - [\dim T_pU - \operatorname{codim}_{T_{f(p)}N} T_{f(p)}V]\\
&= \dim T_pM.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $p \in f^{-1}(V) \cap U$, on a bien $T_pU + T_p(f^{-1}(V)) = T_pM$, et par conséquent $U \pitchfork f^{-1}(V)$. □

Références

[AD10] Michèle AUDIN et Mihai DAMIAN : *Théorie de Morse et homologie de Floer*. EDP Sciences, 2010.

[Bar14] Jean-François BARRAUD : A floer fundamental group. *ArXiv e-prints*, 2014.

[Lee12] John M. LEE : *Introduction to smooth manifolds*. Springer, deuxième édition, 2012.

[Tu11] Loring W. TU : *An introduction to manifolds*. Springer, deuxième édition, 2011.