UE Plan d'expérience et analyse d'incertitude
TP 3 : Deux méthodes d'estimation des indices de sensibilité

Enseignant : François Bachoc

Langage suggéré: R.

1 Contexte

On considère la fonction $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$. En utilisant le cours, donner, presque sans calcul, les valeurs des indices de sensibilité du premier ordre et totaux de f : I_1, I_2, TI_1 et TI_2.

2 Estimation par Monte Carlo

Mettre en œuvre la méthode d'estimation des indices I_1, I_2, TI_1 et TI_2 vue en cours, avec $n = 100000$. Donner les valeurs estimées (qui doivent être très proches des vraies valeurs).

3 Estimation à l'aide du modèle par processus gaussien

On observe f en 4 points d'observations, qui constituent les 4 coins du domaine $[0,1]^2$. On modélise f comme la réalisation d'un processus gaussien de fonction moyenne nulle et de fonction de covariance définie par

$$K_{\sigma^2,\ell}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sigma^2 e^{-\frac{|x_1 - x_2|}{\ell}} e^{-\frac{|y_1 - y_2|}{\ell}},$$

avec $\sigma^2 = 0.2$ et $\ell = 0.4$. Calculer les moyennes conditionnelles de ce processus gaussien (métamodèle de f) en 100 points $x_{new,1}, ..., x_{new,100}$ tirés au hasard, uniformément sur $[0,1]^2$, et de manière indépendante. On note $\hat{f}(x_{new,1}), ..., \hat{f}(x_{new,100})$ les valeurs de ces moyennes conditionnelles. La fonction $\hat{f} : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ est telle que $\hat{f}(x)$ correspond à la notation $\hat{Y}(x)$ du cours.

1) Tracer les points du plan $(f(x_{new,i}), \hat{f}(x_{new,i}))$ pour $i = 1, ..., 100$. Expliquer comment ce tracé permet, visuellement, d'évaluer la qualité du métamodèle par processus gaussien $\hat{f}$.

2) Mettre en œuvre la méthode d'estimation des indices I_1, I_2, TI_1 et TI_2 vue en cours, avec $n = 100000$, mais où la fonction f est remplacée par la fonction métamodèle $\hat{f}$. Donner les valeurs estimées (qui devraient avoir le même ordre de grandeur que les vraies valeurs, mais où des différences non-négligeables devraient apparaître).

3) Répéter les questions 1) et 2) avec 9 points d'observations au lieu de 4. Ces 9 points d'observations sont les couples $(0,0)$, $(0,1/2)$, $(0,1)$, $(1/2,0)$, $(1/2,1/2)$, $(1/2,1)$, $(1,0)$, $(1,1/2)$ et $(1,1)$. La précision du métamodèle augmente t'elle? La précision de l'estimation des indices de sensibilité est-elle meilleure?

4 Conclusion

Dans les parties 2 et 3, on a vu deux méthodes différentes d'estimation des indices de sensibilité : avec ou sans métamodèle par processus gaussien. Discuter les avantages et les inconvénients relatifs de ces deux méthodes, dans le contexte dans lequel les évaluations de f sont coûteuses.