UE Plan d'expérience et analyse d'incertitude
TP 2 : Prédiction et simulations conditionnelles de processus gaussiens

Enseignant : François Bachoc

Language suggéré: R.

1 Contexte

On désire poser un câble de télécommunication sur le fond marin. On travaille sur une section droite du fond marin reliant deux points sous marins, et on note $x \in [0, 1]$ la position sur ce segment et $f(x)$ la profondeur. On ne connaît pas la profondeur en chaque point, mais on peut l'évaluer à l'aide d'une sonde. Ainsi, dans le contexte du cours, une évaluation $f(x_i)$ du simulateur correspond à une mesure de profondeur. On veut évaluer, à l'aide du modèle par processus gaussien, la longueur minimale de câble nécessaire pour relier les deux points sous marins $x = 0$ et $x = 1$ de telle sorte que le câble repose sur le fond marin. La quantité d'intérêt est donc

$$L_{min} = \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Dans ce TP, on suppose que

$$f(x) = 2 + \cos(4x) + x + x^2 - \exp(x) + 0.3 * \sin(12x)$$

est inconnue.

Tracer la fonction f, en utilisant une grille régulière de taille 1000 que l'on gardera pour la suite de ce TP. Évaluer la quantité d'intérêt L_{min} numériquement. (Par exemple, approximer l'intégrale par une somme et les dérivés par différences finies.)

2 Métamodèle par processus gaussien

On observe f en les points d'observations $(x_1, ..., x_6) = (0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1)$. On modélise f comme la réalisation d'un processus gaussien de fonction moyenne nulle et de fonction de covariance Matérn 3/2 avec $\sigma^2 = 0.2$ et $\ell = 0.4$. Tracer les points d'observations, la moyenne conditionnelle du processus gaussien et les courbes des bornes inférieures et supérieures des intervalles de confiance à 95% vus en cours pour les valeurs de $f(x)$. Interpréter brièvement le tracé obtenu. En notant $\hat{f}$ la fonction moyenne conditionnelle, évaluer numériquement

$$\hat{L}_{min,moy} = \int_0^1 \sqrt{1 + (\hat{f}'(x))^2} dx.$$

[On peut évaluer les dérivés par différences finies]. Vous devriez obtenir une sous-estimation de L_{min}. Expliquer pourquoi.

3 Évaluation de la longueur minimale par simulations conditionnelles

Toujours avec les 6 points d'observations précédents, tracer 5 réalisations conditionnelles du processus gaussien précédent, en superposant ce tracé à celui de f et de la moyenne et des intervalles de confiance conditionnelles.

Évaluer L_{min} par méthode de Monte Carlo. C'est à dire effectuer 200 simulations conditionnelles, et évaluer L_{min} pour chacune d'entre elle. L'estimation de L_{min} est alors la moyenne de ces 200 évaluations. Un intervalle de confiance conditionnel à 90% pour L_{min} est défini par les quantiles 5% et 95% de ces 200 évaluations. Donner les valeurs de l'estimation et de l'intervalle de confiance. Les choses devraient mieux se passer que pour la section précédente. Expliquer pourquoi.