Le Théorème de localisation (au niveau de la cohomologie équivariante)

Introduction

[on pourrait relâcher ces hypothèses mais on ne s'engagera pas dans cette direction]

Soit M une variété lisse compacte munie d'une action d'un groupe de Lie (compact) G.

Un candidat naïf pour la cohomologie équivariante de X pourrait être de prendre la cohomologie singulière de l'espace des orbites M/G : $H^\cdot(M/G)$.

<u>Ex.</u> : $G = S^1 \circlearrowright M = S^2$ par rotation autour de l'axe Oz : 

On a alors $M/G = |$ et donc $H^\cdot(M/G) = \mathbb{k}$.

On obtiendrait le même résultat avec un cylindre et on voit donc qu'on a perdu de l'information là où le groupe agit trivialement : au niveau des pôles.

En fait, dès que l'action n'est pas libre, le quotient M/G perd l'information que le stabilisateur d'un point n'était pas trivial.

Pour remédier à ce problème, on va remplacer M par un espace qui lui est homotope mais qui possède une action libre de G : $\underset{\underset{*}{\wr}}{EG} \times M \sim M$, avec EG contractile possédant une G-action libre.

On pourra alors considérer le quotient $M_G = EG \underset{G}{\times} M$ par l'action diagonale : $(hg, m) \sim (h, g\cdot m)$.

On définit alors la cohomologie équivariante par $H^\cdot_G(M) := H^\cdot(M_G) = H^\cdot(EG \underset{G}{\times} M)$.

Ceci définit un foncteur contravariant des G-espaces vers les modules sur $H^\cdot_G(*)$.

En effet, $M \to * \rightsquigarrow H^\cdot_G(*) \longrightarrow H^\cdot_G(M)$

Plan : 1 - Construction de Milnor (EG, BG, exemples)

2 - Construction de Borel (M_G, H_G, conséquences)

3 - Théorème de localisation (quelques explications pour comprendre le résultat)

1 - Construction de Milnor

Déf : le joint de Milnor est donné par le joint infini $EG := G * G * G * \cdots$,

ou de façon plus explicite, par $EG := \operatorname{colim}_n EG(n)$, où $EG(n) = \underbrace{G * \cdots * G}_{n \text{ fois } G}$.

L'espace $EG(n)$ est le quotient :

$$G^{n+1} \times \Delta^n /_\sim = \{ (x_0, t_0 ; x_1, t_1 ; \dots) \mid x_i \in G,\ t_i \in [0,1],\ \textstyle\sum_i t_i = 1 \} /_\sim ,$$

où $(x_0, t_0 ; x_1, t_1 ; \dots) \sim (x_0', t_0' ; \dots)$ ssi $\begin{cases} t_i = t_i' \ \forall i \text{ et} \\ t_i = t_i' \neq 0 \Rightarrow x_i = x_i' \end{cases}$

On notera $\langle x_0, t_0 ; \dots ; x_n, t_n \rangle$ un élément de $EG(n)$.

Rem : les applications $EG(n) \longrightarrow EG(n+1)$ sont données par $\langle x_0, t_0 ; \dots ; x_n, t_n \rangle \longmapsto \langle x_0, t_0 ; \dots ; x_n, t_n ; \underset{\text{ou } x_{n+1}}{1}, 0 \rangle$.

Exemples : (1) $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \{\pm 1\}$. On identifie $EG(n)$ avec la sphère S^n :

$EG(n) \longrightarrow S^n$, $\langle x_0, t_0 ; \dots \rangle \longmapsto (\sqrt{t_0}\, x_0, \dots, \sqrt{t_n}\, x_n)$.

[Bien définie car x_i est uniquement défini si $t_i \neq 0$]

(2) $G = S^1$. De la même façon, on identifie $EG(n)$ avec $S^n(\mathbb{C})$ $(= S^{2n+1})$.

$EG(n) \longrightarrow S^n(\mathbb{C})$, $\langle x, t \rangle \longmapsto (\sqrt{t_0}\, x_0, \dots, \sqrt{t_n}\, x_n)$ (ici $x_j = e^{i\theta_j}$).

On obtient alors respectivement : $E\,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = S^\infty = \{ (x_0, \dots) \mid \underset{\sum x_i^2 = 1}{x_i = 0} \text{ pour presque tous les } i \text{ et } \}$

et $E S^1 = S^\infty(\mathbb{C})$.

<u>Propriétés</u> : 1_ L'espace EG est contractile.

2_ L'action $G \times EG \to EG$, $(g, \langle x,t \rangle) \mapsto \langle g.x, t \rangle$ est libre.

3_ $EG \to EG/G$ est un G-fibré principal.

<u>Démo</u> : 1. Comme on peut le voir sur les deux exemples : $\pi_k(EG(n)) = \{0\}$ $\forall k < n$.

On peut en fait voir que prendre des joints itérés augmente la connexité. À l'infini, on trouve donc que EG est faiblement contractile. On peut en fait voir que EG est contractile [Dold].

2. L'action de G sur G est libre et il existe au moins un $t_j \neq 0$ à chaque fois car $\sum t_j = 1 \neq 0$.

3. L'action ne touche pas t : on prend le recouvrement induit par $(t_i^*)^{-1}(]0,1])$.

<u>Déf</u> : on note $BG := EG/_G$ (et $BG(n) := EG(n)/_G$).

<u>Ex.</u> : (1) $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: $BG(n) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $BG = \mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$.

(2) $G = S^1$: $BG(n) = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ et $BG = \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$.

<u>Proposition</u> : l'espace BG est classifiant pour les G-fibrés principaux :

$$hMap(B, BG) \simeq \left\{ \begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ B \end{array} \ G\text{-fibrés principaux (dénombrables)} \right\}.$$

On a en fait

$$\begin{tikzcd} f^*EG \cong E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & EG \arrow[d] \\ B \arrow[r, "f"'] & BG \end{tikzcd}$$

<u>Démo</u> : $\begin{tikzcd} E \arrow[r, dotted, "g"] \arrow[d] & EG \arrow[d] \\ B \arrow[r, "f"'] & BG \end{tikzcd}$ on sait construire g explicitement lorsque $E = \bigcup_n E_{|U_n}$, avec $E_{|U_n} \overset{h_n}{\cong} G \times U_n$ et $U_n = u_n^{-1}(]0,1])$ avec $(\overset{B \to [0,1]}{u_n})_{n \geq 0}$ partition de l'unité. Il faut vérifier que ce g est compatible avec l'action de G pour obtenir f.

Par déf. de f^*EG, il existe $f^*EG \to E$ au-dessus de EG et B. On peut voir que g injective et $\mathrm{im}\, g = f^*E$.

On a en fait le résultat suivant :

<u>Proposition</u> : si $\begin{matrix} E \\ \downarrow \\ B \end{matrix}$ G-fibré principal (dénombrable) avec E contractile, alors c'est un G-fibré principal universel.

On en déduit que $BG \underset{\text{homotope}}{\sim} B$ et $E \sim EG$.

<u>Conséquences</u> : (1) $E\mathbb{Z} \sim \mathbb{R}$ et $B\mathbb{Z} \sim S^1$ puisque $\mathbb{R} \sim *$ et $\begin{matrix} \mathbb{R} \\ \downarrow \\ S^1 \end{matrix}$ $\mathbb{Z}$-fibré principal.

(2) si $H < G$ (sous groupe), alors H agit librement sur $EG \sim *$ donc EG/H est un modèle pour BH.

$\hookrightarrow$ $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \subset S^1 \rightsquigarrow B\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \sim S^\infty/(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.

(2) Si G, H groupes, $G\times H$ agit librement sur $EG \times EH \sim *$, donc $BG\times BH$ est un modèle pour $B(G\times H)$.

$\hookrightarrow$ $B(\mathbb{T}^\ell) = B((S^1)^{\times \ell}) \sim B(S^1)^{\times \ell}$.

2 - Construction de Borel

La construction de Borel est le quotient à homotopie près :

$$M_G := EG \underset{G}{\times} M.$$

<u>Rem</u> : le type d'homotopie de ce quotient ne dépend pas du modèle choisi pour $\begin{matrix} EG \\ \downarrow \\ BG \end{matrix}$.

On a le diagramme

$$\begin{tikzcd} EG \arrow[d] & EG\times M \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ BG & M_G \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\sigma"'] & M/G \end{tikzcd}$$

[π en est une, fibre M]

<u>Rem</u> : σ n'est pas une fibration en général. On a $\sigma^{-1}(Gm) = EG/G_m$, où G_m est le stabilisateur de m ($\{g\in G \text{ tq } g.m = m\}$).
$= BG_m$

Si G agit librement sur M, alors $M_G \sim M/G$ (G groupe de Lie compact, M lisse, action lisse).

Déf : la cohomologie équivariante de M est définie par :

$$H^\bullet_G(M) := H^\bullet(M_G).$$ [coïncide avec la cohomologie définie par Alain quand G groupe de Lie connexe compact et M G-variété]

Ex : $H^\bullet_G(pt) = H^\bullet(pt_G) = H^\bullet(BG)$.

On a alors un foncteur contravariant $H^\bullet_G$: G-espaces $\longrightarrow$ $H^\bullet(BG)$-modules (en utilisant la projection $M \to pt$).

Rem : 1. $\sigma^* : H^\bullet(M/G) \longrightarrow H^\bullet_G(M)$ [iso. si G agit librement sur M]

2. $H^\bullet_G(G/H) = H^\bullet_H(pt) = H^\bullet(BH)$, puisque $EG/H \sim BH$ (on peut tracer l'équivalence sur $EG \times_G G/H$).

↳ $pt \in M/G$ correspond à $\# G/G_m$ points de M. La "taille" de la cohomologie équivariante d'un point $H^\bullet_G(G/G_m) = H^\bullet(BG_m)$ dépend de la taille de G_m (si $G_m = \{1\}$, alors $H^\bullet_G(G) = H^\bullet(pt)$, $G_m = G$, $= H^\bullet(BG)$)

3. $i : M \to M_G \rightsquigarrow i^* : H^\bullet_G(M) \longrightarrow H^\bullet(M)$

Quelques calculs

* On a $H^\bullet_{S^1}(pt) = H^\bullet(BS^1) = H^\bullet(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})) = \mathbb{R}[u]$, avec $|u| = 2$.

[provient du fait que $H^\bullet(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \mathbb{R}[u]/(u^{n+1})$, $|u| = 2$ + passage à la limite].

* De la même façon, $H^\bullet_{\mathbb{T}^\ell}(pt) = H^\bullet(B\mathbb{T}^\ell) \simeq H^\bullet((BS^1)^{\times \ell}) \underset{\uparrow \text{formule de Künneth}}{\simeq} H^\bullet(BS^1)^{\otimes \ell} \simeq \mathbb{R}[u_1, \dots, u_\ell]$,

avec $|u_j| = 2$ $\forall j$.

Rem : on peut calculer la cohomologie équivariante en utilisant :

(1) la suite spectrale de Leray associée à la fibration $M_G \to BG$: $E_2^{pq} = H^p(BG) \otimes H^q(M)$,

(2) la suite de Mayer-Vietoris : si $M = U_1 \cup U_2$ ..., $\dots \to H^k_G(M) \to H^k_G(U_1) \oplus H^k_G(U_2) \to H^k_G(U_1 \cap U_2) \to H^{k+1}_G(M) \to \dots$

3. Théorème de localisation

Les théorèmes de localisation concernent le fait que, modulo la torsion,

$H^\cdot(B\mathbb{T})\otimes H^\cdot(F)$
$\wr\mid$
le $H^\cdot(B\mathbb{T})$-module $H^\cdot_{\mathbb{T}}(M)$ ressemble au $H^\cdot(B\mathbb{T})$-module libre $H^\cdot_{\mathbb{T}}(F)$,
où $\mathbb{T}=(S^1)^{\times \ell}$ tore agissant sur M (compacte) et F = point fixe de M sous l'action de $\mathbb{T}$.

On pourra alors écrire une forme différentielle $\mathbb{T}$-équivariante sur M comme une (somme de) forme(s) $\mathbb{T}$-équivariante sur F.

Théorème : l'inclusion $i : F \hookrightarrow M$ induit une application

$$i^* : H^\cdot_{\mathbb{T}}(M) \longrightarrow H^\cdot_{\mathbb{T}}(F)$$

dont les supports du noyau et du conoyau sont inclus dans $\bigcup_{H \text{ ayant un stabilisateur} \neq \mathbb{T}} T_e H \subset T_e\mathbb{T} \simeq \mathbb{R}^\ell$.

[Démo : suite exacte longue de cohomologie : $\dots \longrightarrow H^\cdot_{\mathbb{T}}(M\setminus F) \xrightarrow{j^*} H^\cdot_{\mathbb{T}}(M) \xrightarrow{i^*} H^\cdot_{\mathbb{T}}(F) \longrightarrow \dots$, $\ker i^* = \operatorname{im} j^*$]

Commentaires : (1) $\cancel{\mathbb{R}}\,\mathbb{C}[u_1,\dots,u_\ell] \simeq \operatorname{Sym}(T_e\mathbb{T}^{c*}) = H^\cdot_{\mathbb{T}}(pt) = H^\cdot_{\mathbb{T}}(B\mathbb{T})$
[on a intérêt à travailler sur $\mathbb{C}$ pour avoir de bonnes propriétés]

(2) Si $f \in \cancel{\mathbb{R}}\,\mathbb{C}[u_1,\dots,u_\ell]$, on note $V_f := \{x \in \cancel{\mathbb{R}}\,\mathbb{C}^\ell \mid f(x)=0\} \subset \cancel{\mathbb{R}}\,\mathbb{C}^\ell \simeq T_e\mathbb{T}^c$. ↳ comme le théorème des zéros de Hilbert

Si M est un $\mathbb{C}[u_1,\dots,u_\ell]$-module, son support est défini par

$$\operatorname{Supp} M := \bigcap_{\{f \mid f\cdot M = 0\}} V_f \subset \mathbb{C}^\ell \simeq T_e\mathbb{T}^c.$$

Rem : si M est libre, $\operatorname{Supp} M = \mathbb{C}^\ell$. [si M possède un élément qui n'est pas de torsion aussi]

Ainsi si $\operatorname{Supp} M \subsetneq \mathbb{C}^\ell$, on a que M a uniquement de la torsion.

(3) si $f \in \mathbb{C}[u_1,\dots,u_\ell]$ non nul, on peut considérer le localisé $\mathbb{C}[u_1,\dots,u_\ell]_f \subset \mathbb{C}(u_1,\dots,u_\ell)$ défini par $\left\{ \frac{P(u)}{f(u)^k} \,;\, P(u) \in \mathbb{C}[u_1,\dots,u_\ell] \text{ et } k \geq 0 \right\}$.

On définit aussi le $\mathbb{C}[u_1,\dots,u_\ell]_f$-module localisé $M_f := M \otimes_{\mathbb{C}[u_1,\dots,u_\ell]} \mathbb{C}[u_1,\dots,u_\ell]_f$.

Rem : si $V_f \supset \operatorname{Supp} M$, alors $M_f = \{0\}$. [Théorème des zéros de Hilbert]

Donc en choisissant convenablement f (s'il existe) et en localisant, on peut tuer le noyau et le conoyau de façon à obtenir un iso. [un tel f vérifiant ker, coker $\subset V_f$ existe]

On a aussi un morphisme de Gysin :

$i_* : H^k(Z) \longrightarrow H^{k+q}(M)$, où $i : Z \hookrightarrow M$ est une inclusion de codimension q, défini par

$$H^k(Z) \xrightarrow[\uparrow]{\Phi} H^{k+q}(\nu, \nu \setminus Z) \xrightarrow{\text{excision}} H^{k+q}(M, M\setminus Z) \xrightarrow{\text{restriction}} H^{k+q}(M).$$

isomorphisme de Thom

avec ν le fibré normal de Z dans M (supposé orienté).

<u>Proposition</u> : on a $i^* i_* (\underset{\substack{\cap \\ H^0(Z)}}{1}) = \mathrm{Eul}(\nu)$ et $i^* i_* (\underset{\substack{\cap \\ H^\cdot(Z)}}{x}) = x \cup \mathrm{Eul}(\nu)$. [Z connexe ici j'imagine]

<u>Version équivariante</u> :

$$\underset{\text{i de sous-variétés}}{Z \hookrightarrow M} \rightsquigarrow i : EG \times_G Z \longrightarrow EG \times_G M \rightsquigarrow i_* : H_G^\cdot(Z) \longrightarrow H_G^\cdot(M).$$

Et on a la même proposition (avec ν le fibré normal de $EG\times_G Z$ dans $EG \times_G M$).

<u>Proposition</u> : le noyau et le conoyau de $i_* : H_{\mathbb{T}}^\cdot(F) \longrightarrow H_{\mathbb{T}}^\cdot(M)$ ont un support dans $\bigcup T_e H$, où H stabilisateurs $\neq \mathbb{T}$ des points de M.

Dans une bonne localisation ($V_f \supset \mathrm{Supp}(\ker i_*)$ et $\mathrm{Supp}(\mathrm{coker}\, i_*)$), les classes d'Euler ($F$ a plusieurs composantes a priori) sont inversibles puisque i_*, i^* inj. et surj.

<u>Théorème</u> (localisation aux points fixes) Si $x \in H_{\mathbb{T}}^\cdot(M)$, dans une bonne localisation, on a $x = \sum_{Z \subset F} \frac{i_*^Z i_Z^* x}{\mathrm{Eul}_{\mathbb{T}}(\nu_Z)}$.

[il n'y a pas d'erreur dans l'ordre de i_*^Z et i_Z^* : on restreint sur les composantes points fixes, ce qui donne la somme. Si on applique i^* à $x - \sum_{Z\subset F} \frac{i_*^Z i_Z^* x}{\mathrm{Eul}_{\mathbb{T}}(\nu_Z)}$, on tombe sur zéro ; on conclut avec l'injectivité de i^*]

<u>Conséquence</u> : en appliquant le poussé-en-avant vers un point $\pi_*^M : H_{\mathbb{T}}^\cdot(M) \longrightarrow H_{\mathbb{T}}^\cdot(pt) = \mathbb{C}[u_1, \dots, u_\ell]$, on en déduit la formule d'intégration :

$$\pi_*^M \phi = \sum_{Z \subset F} \pi_*^Z \left\{ \frac{i_Z^* \phi}{\mathrm{Eul}(\nu_Z)} \right\}.$$

[à voir plutôt dans $\mathbb{C}(u_1, \dots, u_\ell)$ si on localise]