Alain (Exposé 3) (1)

Classes caractéristiques équivariantes

1) Fibrés vectoriels équivariants

$$\begin{array}{c} \Sigma \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

G agit sur Σ et M et la fibration est équivariante.

de plus $\forall p \in M$ et $\forall g \in G$ $g : \Sigma_p \to \Sigma_{g(p)}$ est linéaire.

On a une dérivée de Lie $\mathcal{L}^\Sigma$

$$X \in \mathfrak{g} \longmapsto \mathcal{L}^\Sigma_X : C^\infty(\Sigma) \longrightarrow C^\infty(\Sigma)$$
$$\sigma \longmapsto \frac{d}{dt}(\exp tX).\sigma_{|t=0}$$

$$(g\sigma)(p) = g(\sigma(g^{-1}(p)))$$

On peut étendre cette action à $\mathcal{A}(M,\Sigma)$ forme différentielle à valeur dans Σ.

Si $\theta \in \mathcal{A}(M)$ et $\alpha \in \mathcal{A}(M,\Sigma)$

$$\mathcal{L}^\Sigma_X(\theta \wedge \alpha) = \mathcal{L}_X\theta \wedge \alpha + \theta \wedge \mathcal{L}^\Sigma_X \alpha$$

2) Connexion equivariante

∇ connexion sur $\mathcal{E}$

elle est invariante si $\forall g \in G$ ~~...~~

$\forall \sigma$: section définie au voisinage d'un point $p \in M$.

$\forall\ v \in T_pM$ on a $\nabla_{(gv)}(g\sigma) = g(\nabla_v \sigma)$

<u>Rem</u>: Si G est compact on peut obtenir des connexions invariantes par moyennisation.

On associe à ∇, un opérateur d^∇ de différentielle extérieure sur $A(M, \mathcal{E})$

d^∇ est G-invariant donc commute avec $\mathcal{L}_X^{\mathcal{E}}$

<u>Def</u>: la connexion équiv. associée à ∇ est l'opérateur $d_{\mathfrak{g}}^\nabla$ sur $\mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes_{\mathbb{C}} A(M, \mathcal{E})$ définie par $(d_{\mathfrak{g}}^\nabla \alpha)(X) = (d^\nabla - L_{V_X})\, \alpha(X)$

Rappel $X \in \mathfrak{g} \mapsto V_X \in \Gamma(TM)$
$\hookrightarrow$ le champs de vecteurs induit

Rem : ce n'est pas une connexion (voir le degré...)

Rem : si $\theta \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes A(M)$ et $\alpha \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes A(M, \mathcal{E})$

$$d^{\nabla}_{\mathfrak{g}}(\theta \wedge \alpha) = (d_{\mathfrak{g}}\theta) \wedge \alpha + (-1)^{\deg \theta}\, \theta \wedge d^{\nabla}_{\mathfrak{g}}\alpha$$

3) Courbure équivariante

- L_{v_X} commute avec $\mathcal{L}^{\mathcal{E}}_X$ sur $A(M, \mathcal{E})$
- on considère le fibré $\mathrm{End}(\mathcal{E})$

on a une action de G sur $\mathrm{End}(\mathcal{E})$

on forme $A(M, \mathrm{End}(\mathcal{E}))$ et $\mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes A(M, \mathrm{End}(\mathcal{E}))$

on a une "multiplication" entre

et → $\mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes A(M, \mathcal{E})$

à valeur dans

Théorème

l'opérateur $(d^{\nabla}_{\mathfrak{g}})^2 + \mathcal{L}^{\mathcal{E}}_{(\cdot)}$ sur $\mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes A(M, \mathcal{E})$

n'est pas différentiel, c'est le produit par un élément de $\mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes A(M, \mathrm{End}\,\mathcal{E})$ de degré total 2. (cet élément sera nommé courbure équivariante $F^{\nabla}_{\mathfrak{g}}(\cdot)$)

<u>DÉMO</u> : $\left(\left(d_{\mathfrak{g}}^{\nabla}\right)^2 + \mathcal{L}_X^{\Sigma}\right)\left(\Theta(X)\wedge\alpha(X)\right)$

$$= d_{\mathfrak{g}}^{\nabla}\left(d_{\mathfrak{g}}^{*}\Theta(X)\wedge\alpha(X) + (-1)^{\deg\Theta}\,\Theta(X)\wedge d_{\mathfrak{g}}^{\nabla}\alpha(X)\right)$$

$$+ \mathcal{L}_X\left(\Theta(X)\right)\wedge\alpha(X) + \Theta(X)\wedge\mathcal{L}_X^{\Sigma}\alpha(X)$$

$$= d_{\mathfrak{g}}^{2}\left(\Theta(X)\right)\wedge\alpha(X) + (-1)^{1+\deg\Theta}\cancel{d_{\mathfrak{g}}\Theta(X)\wedge d_{\mathfrak{g}}^{\nabla}\alpha(X)}$$

$$+ (-1)^{\deg\Theta}\cancel{d_{\mathfrak{g}}\Theta(X)\wedge d_{\mathfrak{g}}^{\nabla}\alpha(X)} + (-1)^{2\deg\Theta}\,\Theta(X)\wedge\left(d_{\mathfrak{g}}^{\nabla}\right)^2\alpha(X)$$

$$+ \mathcal{L}_X\Theta(X)\wedge\alpha(X) + \Theta(X)\wedge\mathcal{L}_X^{\Sigma}\alpha(X)$$

$0 =$

$$= \Theta(X)\wedge\left(\left(d_{\mathfrak{g}}^{\nabla}\right)^2\alpha(X) + \mathcal{L}_X^{\Sigma}\alpha(X)\right)$$

$\square$

<u>théorème</u> $F_{\mathfrak{g}}^{\nabla}$ est invariante (dès que la connexion l'est)

et $[d_{\mathfrak{g}}^{\nabla}, F_{\mathfrak{g}}^{\nabla}] = 0$.

4) Moment

$$F_y^\nabla(x) = (d^\nabla - \iota_{V_x})^2 + \mathcal{L}_x^\Sigma$$

$$= (d^\nabla)^2 - (d^\nabla \circ \iota_{V_x} + \iota_{V_x} \circ d^\nabla) + \mathcal{L}_x^\Sigma$$

$$F_y^\nabla(0) = (d^\nabla)^2 = F^\nabla$$

déf: $\mu(x) = \mathcal{L}^\Sigma(x) - (d^\nabla \iota_{V_x} + \iota_{V_x} d^\nabla)$

c'est le moment

Si ∇ est invariante

$$F_y^\nabla(x) = F^\nabla + \mu(x)$$

Bianchi $[(d^\nabla - \iota_{V_x}), (F^\nabla + \mu(x))]$

$$= \underbrace{\cancel{[d^\nabla, F^\nabla]}}_{0 \text{ Bianchi classique}} - [\iota_{V_x}, F^\nabla] + [d^\nabla, \mu(x)] - \underbrace{\cancel{[\iota_{V_x}, \mu(x)]}}_{0}$$

$$= 0 \iff \boxed{[d^\nabla, \mu(x)] = [\iota_{V_x}, F^\nabla]}$$

<u>exemple</u> G agit par isométries sur une variété Riemannienne M et $\Sigma = TM$.

$$\mu(X) = \mathcal{L}_X - \nabla_{V_X}$$

$$\mu(X)(Y) = [V_X, Y] - \nabla_{V_X} Y$$

$$= -\nabla_Y V_X$$

la courbure ~~usuelle~~ équivariante $= R - \nabla . V_X$

<u>exemple</u> (M, ω) var. symplectique

on suppose $L \to M$ fibré en droite complexe avec une connexion ∇^L tq. $(\nabla^L)^2 = i\omega$

on suppose $G \circlearrowright L$ et $G \circlearrowright M$ et ∇^L est G-invariante $\Rightarrow \omega$ est G-invar.

alors $\mu^L(X) = \mathcal{L}^L_X - \nabla^L_X$

$$F_g(X) = \mu^L(X) + i\omega$$

Bianchi $\rightsquigarrow$ $i_{V_X}\omega = d\mu^L(X)$ $\Rightarrow$ l'action de G est hamiltonienne.

<u>Rem</u> Si V_X s'annule en un point $p_0 \in M$.

$$\mu(X) = \underbrace{\mathcal{L}_X^{\Sigma}}_{} - \underbrace{\nabla_{V_X}}_{\text{s'annule en } p_0}$$

en p_0 c'est l'action infinitésimale de X dans Σ_{p_0}.

5) Super connexions.

M variété $\quad \Sigma = \Sigma^+ \oplus \Sigma^-$ fibré $\mathbb{Z}_2$-gradué sur M

- Une connexion sur Σ qui respecte la graduation.

⇝ on obtient d^∇ de différentielle extérieure sur $A(M, \Sigma)$

- $\mathrm{End}\,\Sigma$ hérite aussi d'une graduation

pair = ceux qui respectent la graduation

impair = ceux qui échangent Σ^+ et Σ^-

⇝ une $\mathbb{Z}_2$ graduation sur $A(M, \mathrm{End}\,\Sigma)$

$\ni$ a, b

- On utilise le "<u>super commutateur</u>"

$$[a,b] = ab - (-1)^{\deg a \deg b}\, ba.$$

ex: Das le contexte précédant $\Sigma = \Sigma^+$
$\Sigma^- = \{0\}$

et le super commutateur
$$\mu_X = \mathcal{L}_X - [\iota_{X_x}, d^\nabla]$$

<u>Defn</u>: Une super connexin est un opérateur sur $A(M,\Sigma)$ qui est la some de d^∇ (où ∇ respecte la graduation).
et d'un élément impair de $A(M, End(\Sigma))$

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_{[0]} + \mathbb{A}_{[1]} + \mathbb{A}_{[2]} + \mathbb{A}_{[3]} + \dots$$

$\mathbb{A}_{[0]}$ ↓ endom. impaire

$\mathbb{A}_{[1]}$ ↓ $d^{\nabla'}$, ∇' respecte la décomposit.

$\mathbb{A}_{[2]}$: forme deg = 2 à valeur dans les endom. impair

$\mathbb{A}_{[3]}$: forme de deg 3. à valeur dans les endom. pair.

<u>théo</u> $\mathbb{A}^2$ est le produit par un élément pair de $A(M, End(\Sigma))$ (non-differentiel.

<u>preuve</u>: $\mathbb{A}^2 = (d^{\nabla'})^2 + [d^{\nabla'}, (\mathbb{A} - d^{\nabla'})] + (\mathbb{A} - d^{\nabla})^2.$

6) Classe caratéristiques avec des supers connexions

Super trace $Tr_{\mathcal{E}^+} - Tr_{\mathcal{E}^-}$

Théo $Str(\exp - \mathbb{A}^2)$ est une forme fermée dont la classe de cohomologie de deRham ne dépend pas de la superconnexion.

---

preuve :

calcul : $d(Str(\exp - \mathbb{A}^2)) = Str[d^\nabla, \exp(-\mathbb{A}^2)]$

$= Str[\mathbb{A}, \exp(-\mathbb{A}^2)]$

$= 0$.

indépendance : l'espace des superconnexion est affine

on peut considérer $t \to \mathbb{A}_t$

on fait la construction sur $M \times [0, 1]$.

$\boxed{4}$

7) Cas equivariant

On remplace d^P par $\mathbb{A}$

$$\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}(X) = \mathbb{A} - \iota_{V_X}$$

$\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}(X)^2 - \mathcal{L}_X$ est le produit par.

$$F_{\mathfrak{g}}(X) \in \left(\mathcal{A}(M, \operatorname{End} \mathcal{E})\right)^+$$

Bianchi $[\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}(X), F_{\mathfrak{g}}(X)] = 0$.

$$F_{\mathfrak{g}}(X) = F^{\mathbb{A}} + \mu(X)$$

$$\Rightarrow \mathbb{A}\,\mu(X) = -\iota_{V_X} F^{\mathbb{A}}$$

Classes caratéristiques f polynôme ou série entière

$$f(F_{\mathfrak{g}}) \in \left(\mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes \mathcal{A}(M, \operatorname{End} \mathcal{E})\right)^+$$

$$\operatorname{Str} : \mathcal{A}_G(M, \operatorname{End}(\mathcal{E}))^+ \to \mathcal{A}_G(M)$$

$\mathrm{Str}(f(F_{\mathfrak{g}}))$ forme caract. equivariante

$d_{\mathfrak{g}}(\quad) = 0$

la classe de cohomologie ~~caract.~~ ne dépend pas de A.

Caratère de Chern $\mathrm{Str}(\exp F_{\mathfrak{g}})$.

$\hat{A}$-genre. $\sqrt{\det\left(\frac{F_{\mathfrak{g}}/2}{\sinh F_{\mathfrak{g}}/2}\right)}$

$eu_{\mathfrak{g}}(\nabla)(x) = \mathrm{Pf}(-F_{\mathfrak{g}}(x))$.