

Examen partiel du 3 novembre 2015
Durée : Corrigé

Exercice 1. (6.5 Points) Désignons par A_α le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ constitué des points (x, y) qui satisfont le système d'inéquations suivant : $\begin{cases} y^2 + x^2 \leq \alpha^2, \\ x + y < 1, \end{cases}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ désigne un paramètre fixé.

a) Les représentations graphiques demandées sont :



A_1

$A_{\frac{1}{2}}$

- b) Oui, l'ensemble $A_{\frac{1}{2}}$ est borné, car il est contenu dans la boule de centre l'origine et rayon 1, de plus, il est fermé parce qu'il coïncide avec la boule euclidienne fermée de rayon $\frac{1}{2}$, et centre l'origine. En effet, si $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$, tant $x^2 \leq \frac{1}{4}$, et $y^2 \leq \frac{1}{4}$. Ainsi $x \leq |x| \leq \frac{1}{2}$, $y \leq \frac{1}{2}$, ainsi $x + y \leq 1$. Or si $x + y = 1$, en désignant par L la droite d'équation $X + Y = 1$, nous avons $d((0, 0), L) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, et $d((0, 0), (x, y)) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ de sorte que $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$. Au total, A_α est la boule fermée, qui est un fermé, et tout fermé borné du plan est compact.
- c) Soit $|\alpha| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, puisque A_α est toujours borné, il faut montrer que ce n'est pas une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

Pour ce faire repérons un point de son adhérence qui ne soit pas dans A_α . Le point sur la diagonale : $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ne peut être dans A_α , et est limite de la suite $(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n})$. Il suffira de prouver que cette suite est une suite de points de A_α pour prouver que c'est un point de l'adhérence qui n'est pas dans A_α et conclure que A_α n'est pas fermé, donc n'est pas compact.

Les points $(x_n, y_n) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n})$ vérifient l'équation $x_n + y_n = 1 - 2\frac{1}{n} < 1$. Montrons que pour $n > 1$, ils vérifient $x_n^2 + y_n^2 \leq \alpha^2$ dès que $|\alpha| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, c'est-à-dire $\alpha^2 \geq \frac{1}{2}$.

En effet, $(\frac{1}{2} - \frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{n})^2 = \frac{1}{2} - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} \leq \frac{1}{2}$ car si $n > 1$, $\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} < 0$.

Ainsi la suite de points $(x_n, y_n) \in A_\alpha$ converge vers le point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \notin A_\alpha$, qui n'est donc pas compact.

Exercice 2. (4 Points)

- a) La fonction $g(x, y) = \frac{\sin(y^6)}{x^2 + y^4}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $g(0, 0) = 0$. est continue sur tout le plan. Montrons la continuité au point $(0, 0)$ comme demandé. Nous savons que $|\sin u| \leq |u|$ sur tout $\mathbb{R}$, dès-lors, $|\sin y^6| \leq y^6$, et pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $|g(x, y)| \leq \frac{y^6}{x^2 + y^4} \leq y^2 \frac{y^4}{x^2 + y^4} \leq y^2$, qui a 0 comme limite quand $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Puisque $g(0, 0) = 0$, la fonction est continue à l'origine.
- b) La fonction $h(x, y) = \frac{x^2 y^2 + x^{10}}{(x^2 + y^2)^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $h(0, 0) = 0$ n'est pas continue au point $(0, 0)$, car sur la suite $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ (qui à $(0, 0)$ comme limite) nous avons $h(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4n^6} \rightarrow \frac{1}{4} \neq h(0, 0)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 3. (5 Points) On considère l'équation différentielle homogène $H : x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$.

- a) Cherchons une solution évidente sous la forme d'un polynôme. Le degré 2 semble suffisant, $y(x) = ax^2 + bx + c$, $y'(x) = 2ax + b$, $y''(x) = 2a$, ainsi on doit avoir $0 = 2ax^2 - 8ax^2 - 4bx + 6ax^2 + 6bx + 6c = 0ax^2 + 2bx + 6c$, le polynôme $y_0(x) = x^2$ est une solution. (On le vérifie bien!)

Cherchons une deuxième solution, indépendante de la première, par une simple variation de la constante et une quadrature. Pour que $y(x) = k(x)y_0(x)$ soit solution, $(y' = k'y_0 + ky'_0, y'' = k''y_0 + 2k'y'_0 + ky''_0)$ il faut que $x^4 k''(x) + (4x^3 k' - 4x^3 k') + k(x^2 y''_0 - 4xy'_0 + 6y_0) = 0$, or $x^2 y''_0 - 4xy'_0 + 6y_0 = 0$, d'où en mettant $Z = k'$, il suffira de trouver Z , tel que $x^4 Z' = 0$, $Z' = 0$, $Z = 1$, $k(x) = x$, $y(x) = k(x)y_0(x) = x^3$. Ainsi, sur chaque intervalle sans singularités, x^3 est aussi une solution, le couple (x^2, x^3) est une base de l'espace des solutions de l'équation H .

La solution sur l'intervalle I_- est

$$\mathcal{S}_- = \{\gamma : I_- \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \gamma(x) = C_1 x^2 + C_2 x^3\}.$$

La solution sur l'intervalle I_+ est

$$\mathcal{S}_+ = \{\gamma : I_+ \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \gamma(x) = C_1 x^2 + C_2 x^3\}.$$

- b) Les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 qui sont solutions de l'équation (H) sont, par restriction, solutions dans chacun des intervalles I_- et I_+ . Ainsi il existe des constantes réelles $C_{+,1}, C_{+,2}, C_{-,1}$ et $C_{-,2}$ telles que $y(x) = C_{+,1}x^2 + C_{+,2}x^3$ si $x > 0$, et $y(x) = C_{-,1}x^2 + C_{-,2}x^3$ si $x < 0$. La fonction a valeur 0 à l'origine (par continuité), ainsi que sa première dérivée est 0 à l'origine.

Par contre cette fonction n'est deux fois dérivable qu'à condition d'avoir $C_{+,1} = C_{-,1}$. Et dans ce cas, la fonction est de classe C^2 .

Ainsi $\mathcal{S}^2$ est un sous-espace de $C^2(\mathbb{R})$ de dimension 3 de base (x^2, y_-, y_+) , où $y_-(x) = x^3$ si $x \leq 0$, et 0 si $x \geq 0$, puis $y_+(x) = x^3$ si $x \geq 0$, et 0 si $x \leq 0$.

Exercice 4. (4.5 Points)

- a) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application continue. Soit donné $A \subset \mathbb{R}^p$, montrons que $f^{-1}(A^\circ) \subset [f^{-1}(A)]^\circ$. Pour prouver cette inclusion, considérons $x \in f^{-1}(A^\circ)$, nous avons donc que $f(x) \in A^\circ$, de ce fait on peut prendre un rayon (de protection) $\rho > 0$ tel que la boule $B_\rho(f(x))$ soit contenue dans A . En prenant ce $\rho (= \epsilon)$ dans la définition de continuité, on en déduit que l'on peut considérer $\eta > 0$ tel que si x' vérifie $d(x, x') < \eta$, l'on ait $d(f(x), f(x')) < \rho$. En clair, si x' est dans la boule de rayon η autour de x , la valeur $f(x')$ est dans la boule $B_\rho(f(x))$ et donc dans A , ce qui prouve que x' est un point de $f^{-1}(A)$ et de ce fait x est un point intérieur de $f^{-1}(A)$ achevant la preuve de $f^{-1}(A^\circ) \subset [f^{-1}(A)]^\circ$.

Une autre possibilité de démonstration est de constater que

$$A^\circ \subset A, \implies f^{-1}(A^\circ) \subset f^{-1}(A),$$

et que la continuité de f entraîne que $f^{-1}(A^\circ)$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.

Or l'intérieur d'un ensemble est la plus grande partie ouverte qui y soit contenue.

Ainsi $[f^{-1}(A)]^\circ$ est le plus grand ensemble ouvert qui soit contenu dans $f^{-1}(A)$. Or $f^{-1}(A^\circ)$ est un ensemble ouvert contenu dans $f^{-1}(A)$, il est donc plus petit que $[f^{-1}(A)]^\circ$. Ceci prouve que

$$f^{-1}(A^\circ) \subset [f^{-1}(A)]^\circ.$$

- b) L'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel de dimension 4 dans lequel on peut considérer une norme quelconque, puisqu'elles sont toutes équivalentes. Le sous-ensemble $\text{SL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ est fermé, parce que la fonction déterminant est continue, polynomiale même, et $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ est la pré-image du fermé $\{1\}$

Par contre, il ne peut être compact, parce que les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les fermés bornés, et $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ n'est pas borné. En effet, la suite des matrices diagonales, dont les éléments de la diagonale sont $(n, \frac{1}{n})$ est une suite d'éléments de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ dont la norme va vers l'infini (quelque soit cette norme). Par exemple la norme de Frobenius est $\sqrt{n^2 + 1/n^2}$ qui va vers $+\infty$.