$\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ euclidiens

Sous-espaces vectoriels

Exercice 1. Donner une équation cartésienne de la droite vectorielle de vecteur directeur $v = (1, -2)$.

Exercice 2. Donner une équation cartésienne et une paramétrisation de la droite vectorielle D orthogonale à la droite D' d'équation $2x + 3y = 0$.

Exercice 3. Soient v et w dans $\mathbb{R}^2$ et D_v et D_w les deux droites vectorielles de vecteur directeur respectivement v et w. Montrer que si un vecteur non nul u appartient à l'intersection de D_v et D_w, alors $D_v = D_w$.

Exercice 4. On considère les ensembles $D = \{(-t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ et $D' = \{(3s, -6s) \mid s \in \mathbb{R}\}$.

a) Démonter que D et D' sont des droites vectorielles.

b) Donner quelques exemples de vecteurs directeurs de D.

c) Montrer que $D = D'$.

d) Donner un exemple de paramétrisation de la droite vectorielle orthogonale à D.

Exercice 5. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$, lesquels sont des droites vectorielles ? On précisera la nature de ceux qui ne sont pas des droites vectorielles.

a) $A = \{(3t + 7u, t - u), t, u \in \mathbb{R}\}$;

b) $B = \{(1 + 3t - 6u, -3 + t - 2u), t, u \in \mathbb{R}\}$;

c) $C = \{(t, t^2), t \in \mathbb{R}\}$;

d) $D = \{(t^2, 2t^2), t \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 6. Dessiner les droites définies respectivement par les équations $x - 2y = 0$ et $x + y = 0$. Déterminer l'angle entre elles.

Exercice 7. Déterminer une paramétrisation et un système d'équations cartésiennes des sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^3$:

a) le plan vectoriel engendré par $u = (1, 0, 1)$ et $v = (0, 2, -3)$;

b) le plan vectoriel orthogonal au vecteur $n = (2, 3, 4)$.

c) la droite vectorielle engendré par $u = (1, 1, 1)$;

Exercice 8. Soient E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u_1 = (2, 3, -1)$ et $u_2 = (1, -1, -2)$, et F celui engendré par $v_1 = (3, 7, 0)$ et $v_2 = (5, 0, -7)$. Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 9. Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ la droite définie par les équations $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ et P le plan défini par l'équation : $x + 2y + 3z = 0$.

a) Trouver une paramétrisation de D et une paramétrisation de P.

b) La droite D est-elle incluse dans le plan P ?

c) Donner une équation cartésienne d'un plan P_1 qui contienne la droite D.

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}^3$, considérons les plans P et P' d'équations respectives $x - y + z = 0$ et $x + 2y + 3z = 0$.

a) Montrer que l'intersection de P et P' est une droite D dont on donnera une paramétrisation.

b) Donner une équation cartésienne du plan vectoriel P'' perpendiculaire à D.

c) Déterminer l'intersection de P, P' et P''.

Exercice 11. Déterminer si les vecteurs suivants sont linéairement indépendants ou non :

Dans $\mathbb{R}^2$:

a) $u = (0,0)$ et $v = (1,3)$;
b) $u = (2,-4)$ et $v = (1,3)$;
c) $u = (2,-4)$ et $v = (-1,2)$;
d) $u = (1,1)$, $v = (-1,3)$ et $w = (2,1)$.

Dans $\mathbb{R}^3$:

a) $u = (1,2,3)$ et $v = (-1,3,2)$;
b) $u = (2,1,3)$ et $v = (4,2,6)$;
c) $u = (2,4,6)$, $v = (4,2,6)$ et $w = (6,4,2)$;
d) $u = (-1,0,1)$, $v = (1,1,1)$ et $w = (0,1,2)$;
e) $u = (-1,0,1)$, $v = (1,1,1)$, $w = (0,1,2)$ et $x = (2,4,1)$.

Transformations du plan et de l'espace

Exercice 12. On considère le vecteur $v = (0,1)$ et la droite vectorielle D de vecteur directeur $(1,1)$. Déterminer la projection orthogonale de v sur D ainsi que l'image de v par la symétrie orthogonale par rapport à D.

Exercice 13.

a) Soit p la projection sur la droite D d'équation $2x+y=0$ parallèlement à la droite D' d'équation $x+y=0$. Donner les coordonnées de l'image d'un vecteur (x_0, y_0) quelconque de $\mathbb{R}^2$ par cette projection. Vérifier que $p \circ p = p$.
b) Même question avec la symétrie s par rapport à D' parallèlement à D. Vérifier que $s \circ s = Id_{\mathbb{R}^2}$.

Exercice 14. Soient P le plan d'équation $x+y-z=0$ et D la droite vectorielle de vecteur directeur $(1,-1,2)$.

a) Soit p_1 la projection sur la droite D parallèlement au plan P. Donner les coordonnées de l'image d'un vecteur $P : (x_0, y_0, z_0)$ quelconque de $\mathbb{R}^3$ par cette projection.
b) Même question pour s_1, la symétrie par rapport à la droite D parallèlement au plan P.
c) Même question pour s_2, la symétrie par rapport au plan P parallèlement à la droite D.
d) Même question pour p_2, la projection sur le plan P parallèlement à la droite D.

Exercice 15. Soit h_α l'homothétie de centre l'origine, de rapport $\alpha \in \mathbb{R}$. Quelles sont les coordonnées de l'image du vecteur (x,y) par h_α ?

Exercice 16. Existe-t-il une rotation de centre l'origine qui envoie $A : (1,1)$ sur $A' : (-1,1)$ et $B : (0,-4)$ sur $B' : (4,0)$? Dans l'affirmative, préciser l'angle de cette rotation.

Exercice 17. Considérons les vecteurs $v = (-1,-4,8)$ et $v' = (1,-5,7)$. Existe-t-il un plan P tel que le projeté orthogonal de v sur P soit v'. dans l'affirmative, déterminer une équation cartésienne de P.