COURS DE GÉOMÉTRIE – LICENCE PLURIDISCIPLINAIRE 3ÈME ANNEE

FLORIAN DELOUP

Table des matières

1. ESPACES EUCLIDIENS

1.1. **Produit scalaire.** Un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une application $E \times E \to R$ bilinéaire, symétrique, définie positive.

Notations : $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $(\cdot, \cdot)$, etc.

Remarque : un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vérifie la propriété

$$\langle x, E \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

Ceci est une conséquence de la propriété "définie positive". On dit que le produit scalaire est non dégénéré. Dans ce cas, si E est de dimension finie (ce qui sera la grande majorité des cas dans ce cours), l'application

$$E \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R}), \quad x \mapsto \langle -, x\rangle$$

est un isomorphisme. En particulier, tout homomorphisme $E \to \mathbb{R}$ est réalisé (de façon unique) comme une évaluation par un produit scalaire sur un vecteur donné de E.

Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Voici quelques exemples que l'étudiant devrait détailler à titre d'exercice.

Exemple 1. $E = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

Exemple 2. $E = \mathbb{R}^n$ peut être muni d'autres produits scalaires (voir plus loin).

Exemple 3. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ constitué des suites réelles convergentes vers 0. On peut munir E du produit scalaire

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j\ y_j}{j^2}.$$

Exemple 4. Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. La formule

$$\langle f, g\rangle = \int_{t=0}^{t=1} f(t)g(t)dt$$

définit un produit scalaire sur E.

Proposition 1 (L'inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soit E un espace euclidien. Pour tout $x, y \in E$,*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\ \langle y, y\rangle$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

Démonstration 1. Soit $x, y \in E$. L'astuce classique consiste à écrire que

$$\langle x + t \cdot y, x + t \cdot y\rangle \geq 0, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

En développant on trouve

$$\langle x + t \cdot y, x + t \cdot y\rangle = \langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle.$$

On regarde cette dernière expression comme un trinôme du second degré en t qui doit rester positif ou nul. En particulier, son discriminant (réduit)

$$\Delta = \langle x, y\rangle^2 - \langle x, x\rangle\ \langle y, y\rangle$$

doit être négatif ou nul, d'où le résultat. ∎

Une norme sur un espace vectoriel E est une application $E \to \mathbb{R}_+$ homogène, définie et satisfaisant à l'inégalité triangulaire.

Proposition 2 (Norme euclidienne)**.** *Si $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur E, alors l'application*

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

est une norme sur E.

C'est la norme euclidienne dérivée du produit scalaire sur E.

Démonstration 2. Seule l'inégalité triangulaire mérite d'être précisée. On calcule

$$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \leq \langle x,x\rangle + 2\langle x,x\rangle\ \langle y,y\rangle + \langle y,y\rangle$$

où l'inégalité utilisée est l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Réécrivant en terme de norme, on trouve

$$||x+y||^2 \leq ||x||^2 + 2||x||\ ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2.$$

L'inégalité triangulaire en résulte. ■

Notons l'identité qui apparaît dans la démonstration précédente :

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + 2\ \langle u,v\rangle + ||v||^2. \tag{1}$$

On appliquant cette identité à (u, v) puis à $(u, -v)$, on en déduit aisément la

Proposition 3 (Identité du Parallélogramme)**.** *Pour $u, v \in E$ euclidien,*

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2\ (||u||^2 + ||v||^2). \tag{2}$$

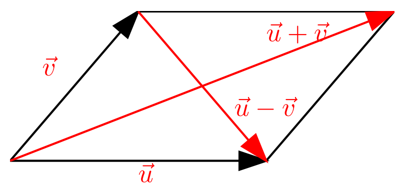

FIG. 1. L'identité du parallélogramme

De l'identité (1), on voit que l'on peut déduire de la norme euclidienne le produit scalaire :

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{2}\Big(||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2\Big). \tag{3}$$

ou encore par la formule

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\Big(||u+v||^2 - ||u-v||^2\Big). \tag{4}$$

Il n'est *pas* vrai en général que l'on puisse associer de cette manière un produit scalaire à n'importe quelle norme. Par exemple, la norme sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$||(x_1, x_2)|| = \max(|x_1|, |x_2|)$$

ne vérifie pas l'identité du parallélogramme. Il en résulte que cette norme *ne provient pas d'un produit scalaire sur* $\mathbb{R}^2$.

Proposition 4. *Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé. La norme $||\cdot||$ est euclidienne (c'est-à-dire est dérivée d'un produit scalaire) si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme.*

Démonstration 3. La condition est nécessaire : c'est la prop. 3 ci-dessus. Montrons qu'elle est suffisante : supposons donc que $||\cdot||$ vérifie l'identité du parallélogramme. Nous devons construire un produit scalaire sur E telle que la norme $||\cdot||$ soit la norme dérivée de ce produit scalaire. Mais nous savons déjà quel doit être ce produit scalaire, il est donné par la formule (3) ou bien (de façon équivalente) par (4). Vérifions donc qu'une telle formule *définit bien* un produit scalaire. Il est clair que $\langle u, v\rangle$ est symétrique en u, v. Montrons que le produit est défini positif. Nous avons

$$\langle u, u\rangle = 0 \iff ||u||^2 = 0 \iff u = 0.$$

Montrons enfin la bilinéarité. Vu la symétrie, il suffit de montrer l'identité

$$\langle x + x', y\rangle - \langle x, y\rangle - \langle x', y\rangle = 0.$$

Pour cela, on applique l'identité du parallélogramme à

1.2. **Orthogonalité.** Deux vecteurs $u, v \in E$ sont orthogonaux si $\langle u, v\rangle = 0$. Notation : $u \perp v$.

Théorème 1 (Théorème de Pythagore)**.** *Deux vecteurs $u, v \in E$ sont orthogonaux ssi $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.*

Vecteurs normés. Famille orthogonale. Famille orthonormale. Une famille orthonormale quelconque est libre. Écriture dans une base orthonormale.

1.2.1. *Orthonormalisation d'une base (Gram-Schmidt).* Principe : on part d'une base $e_1, \dots, e_n$ d'un espace euclidien et on construit de proche en proche une base orthonormée $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ telle que $\mathrm{Vect}(e_i) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_i)$.

On a $\varepsilon_1 = e_1$ puis on cherche ε_2 tel que

$$(1)\ \mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad (2)\ \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle = 0.$$

On peut écrire $\varepsilon_2 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$, avec λ_1, λ_2 à déterminer de sorte que la condition (1) soit remplie et alors la condition (2) s'écrit

$$\lambda_1 \langle e_1, e_1\rangle + \lambda_2 \langle e_1, e_2\rangle = 0$$

Il y a plusieurs choix possibles pour λ_1, λ_2. Il suffit de prendre $\lambda_1 = -\langle e_1, e_2\rangle / \langle e_1, e_1\rangle$ et $\lambda_2 = 1$ pour obtenir une base orthogonale $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Pour obtenir une base orthonormale, il faut normaliser chaque vecteur de base en divisant par la norme du vecteur en question.

Procédure dans le cas général : soit $e_1, \dots, e_n$ une base de E euclidien. On peut supposer cette base normée : pour tout j, $||e_i|| = 1$. Supposons avoir construit une base orthonormale $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ telle que $\mathrm{Vect}(e_i)_{1 \le i \le n-1} = \mathrm{Vect}(\varepsilon_i)_{1 \le i \le n-1}$. On construit ε_n de la manière suivante : on le cherche sous la forme

$$\varepsilon_n = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \varepsilon_j + \lambda_n e_n,$$

avec des constantes λ_j à déterminer. On a alors, pour tout $i < n$,

$$0 = \langle \varepsilon_i, \varepsilon_n\rangle = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle + \lambda_n \langle \varepsilon_i, e_n\rangle = \lambda_i \cdot 1 + \lambda_n \langle \varepsilon_i, e_n\rangle.$$

Pour que ces égalités soient vérifiées, il *suffit* de choisir

$$\lambda_i = -\langle \varepsilon_i, e_n\rangle, \quad \lambda_n = 1.$$

La base $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ est orthogonale. Pour la rendre orthonormale, il suffit de normaliser le dernier vecteur. En conclusion, il suffit de prendre

$$\varepsilon_n = \frac{e_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle \varepsilon_j, e_n \rangle \varepsilon_j}{\left|\left| e_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle \varepsilon_j, e_n \rangle \varepsilon_j \right|\right|}.$$

On a ainsi démontré le

Théorème 2 (Orthonormalisation)**.** *Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base d'un espace euclidien E. Il existe un automorphisme de E transformant la base $e_1, \ldots, e_n$ en une base orthonormale $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ de E. De plus, la matrice de passage de la base $e_1, \ldots, e_n$ à la base $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale (unipotente).*

Exemple 5. Orthonormaliser la base $(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$ à l'aide de la procédure de Gram-Schmidt ci-dessus.

Théorème 3. *Soit E un espace euclidien et $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ une base orthonormale. Tout vecteur $v \in E$ s'écrit de façon unique*

$$v = \sum_j \langle v, \varepsilon_j \rangle \varepsilon_j$$

et

$$||v||^2 = \sum_j \langle v, \varepsilon_j \rangle^2.$$

Pour tout couple $v, w \in E$,

$$\langle v, w \rangle = \sum_j \langle v, \varepsilon_j \rangle \langle w, \varepsilon_j \rangle.$$

Orthogonal à un ensemble, à un sous-espace. Somme orthogonale de sous-espaces.

Proposition 5. *On suppose E de dimension finie. Soit F un sous-espace de E. Alors*

$$E = F \oplus F^{\perp}, \quad \text{et} \quad F^{\perp\perp} = F.$$

Démonstration 4. Par définition, $\langle F, F^{\perp} \rangle = 0$ et $F \cap F^{\perp} = 0$ (car $x \in F \cap F^{\perp}$ implique $\langle x, x \rangle = 0$ d'où $x = 0$). Donc F et $F^{\perp}$ sont en somme orthogonale. L'application

$$E \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F, \mathbb{R}), \quad x \mapsto \langle -, x \rangle$$

est surjective de noyau exactement $F^{\perp}$. Par conséquent, $E/F^{\perp} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(R, \mathbb{R}) \simeq F$. En particulier, $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$.

La seconde égalité se montre en observant d'abord que $F \subseteq F^{\perp\perp}$. Puis d'après la première appliquée successivement à F et $F^{\perp}$,

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} = F^{\perp} \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp\perp},$$

donc $\dim F = \dim F^{\perp\perp}$ (tous les supplémentaires de $F^{\perp}$ ont même dimension). Ce qui permet de conclure. ■

Exemple 6. L'orthogonal d'un vecteur non nul est un hyperplan.

1.2.2. *Projections orthogonales.*

Proposition 6 (Pythagore)**.** *Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs orthogonale dans un espace euclidien E. Alors*

$$||v_1 + \dots v_n||^2 = ||v_1||^2 + ||v_2||^2 + \dots + ||v_n||^2.$$

Projections orthogonales. Dessins, exemples. Reformuler Pythagore en terme de projection orthogonale : pour tout $x \in E$, les vecteurs $x - p(x)$ et $p(x)$ sont orthogonaux.

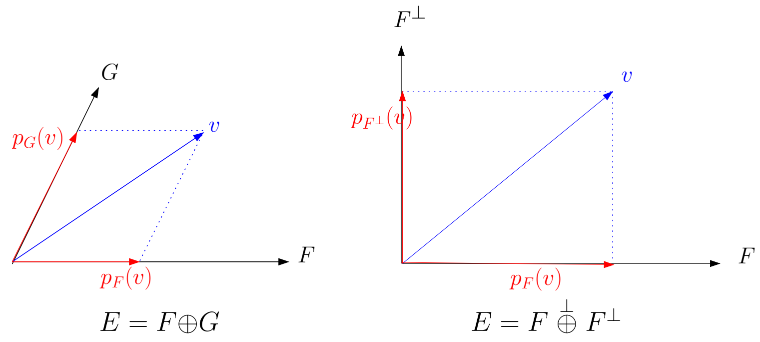

Fig. 2. Projection et projection orthogonale

Caractérisation d'une projection orthogonale (parmi les projections).

Proposition 7. *Soit E un espace euclidien. Une projection $p : E \to E$ est une projection orthogonale ssi $||p(x)|| \leq ||x||$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration 5. Si p est orthogonale alors $E = \mathrm{Ker}(p) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(p)$ et pour tout $x \in E$,

$$||x||^2 = ||x - p(x)||^2 + ||p(x)||^2$$

d'après le théorème de Pythagore. Il en résulte que

$$||p(x)|| \leq ||x||.$$

Réciproquement, vu que p est une projection, $F = \mathrm{Ker}(p)$ et $G = \mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires dans E. Soit $x \in E$. Il existe $y \in \mathrm{Ker}(p)$ et $z \in \mathrm{Im}(p)$ tels que

$$x = y + z.$$

Donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons

$$p(\lambda y + z) = p(z) = z.$$

Donc

$$||z||^2 = ||p(\lambda y + z)||^2 \leq ||\lambda y + z||^2 = \lambda^2 ||y||^2 + 2\lambda \langle y, z \rangle + ||z||^2.$$

D'où :

$$0 \leq \lambda^2 ||y||^2 + 2\lambda \langle y, z \rangle \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On en déduit aisément que $\langle y, z \rangle = 0$. Donc $G \subseteq F^\perp$. Comme $\dim E = \dim F + \dim G = \dim F + \dim F^\perp$, nous avons $\dim G = \dim F^\perp$. Par conséquent $G = F^\perp$.
■

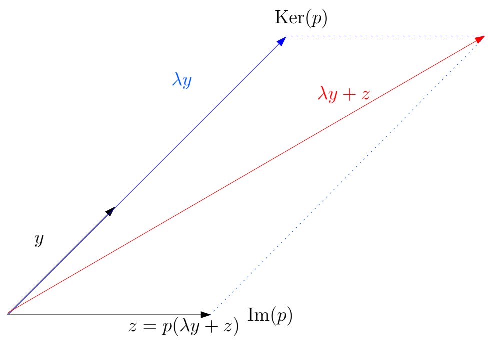

FIG. 3. L'explication de la démonstration de la prop. 7 : si l'on augmente la longueur d'un vecteur $v = \lambda y + z$ dans la direction de la projection, la longueur de la projection.

Remarque utile. Si $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ est une base orthonormale de F, la projection de v sur F s'écrit

$$p_F(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, \varepsilon_i \rangle \ \varepsilon_i.$$

Exemple 7. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Si $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in E$, alors

$$p_F(x) = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Distance d'un point à un sous-espace. On rappelle que la distance d'un vecteur $v \in E$ à un sous-espace F est par définition

$$d(v, F) = \inf_{x \in F} ||v - x||.$$

Proposition 8. *Soit F un sous-espace d'un espace euclidien E et $v \in E$. Alors*

$$d(v, F) = ||v - p_F(v)||.$$

Démonstration 6. On peut justifier abstraitement l'existence d'un vecteur $x_0 \in E$ tel que la borne inférieure soit atteinte : intersecter F avec une sphère unité qui est compacte en dimension finie, d'où le fait que la fonction $x \mapsto ||v - x||^2$ continue sur un compact atteint en un vecteur x_0 sa borne inférieure.

D'un autre côté on peut calculer ce minimum. Soit p la projection orthogonale sur F. Nous avons

$$||v - p(v)|| \leq ||v - y|| \text{ pour tout } y \in F$$

avec égalité ssi $y = p(v)$. Faire un dessin et utiliser le théorème de Pythagore. Le résultat s'en suit. ∎

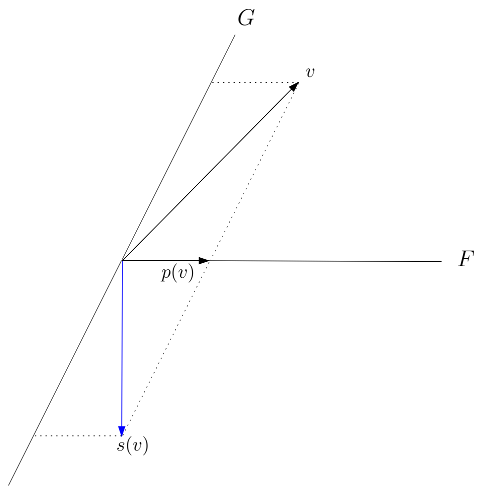

FIG. 4. Symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G.

1.2.3. *Symétries orthogonales.* Rappel : symétrie vectorielle $s_{F,G}$ par rapport à un sous-espace F, parallèlement à un sous-espace G. Formule en terme de décomposition $E = F \oplus G$ et de projection.

Rappelons que $s^2 = s \circ s = \mathrm{Id}_E$, que l'espace F est l'espace invariant par s, c'est-à-dire Ker $(s - \mathrm{Id}_E) = F$ et que l'espace G est l'espace (-1)-invariant par s, c'est-à-dire que Ker $(s + \mathrm{Id}_E) = G$. Réciproque : tout endomorphisme s de E vérifiant $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ est une symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace F est la symétrie par rapport à F et parallèlement à $F^{\perp}$. Elle est donc uniquement déterminée par le sous-espace F.

Propriété : “une symétrie orthogonale conserve les longueurs”. Cette propriété est caractéristique. En formule :

Proposition 9. *Une symétrie s d'un espace euclidien E vérifie*

$$||s(x)|| = ||x|| \quad \text{pour tout } x \in E$$

ssi s est orthogonale.

Dans ce cas, s est LA symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration 7. Supposons s orthogonale par rapport à un sous-espace F. Écrire

$$x = y + z$$

avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$. Alors

$$||x||^2 = ||y||^2 + ||z||^2 = ||y - z||^2 = ||s(x)||^2.$$

Réciproquement, soit s une symétrie par rapport à F parallèlement à G conservant la norme. Nous avons

$$||x||^2 = ||y + z||^2 = ||y - z||^2 = ||s(x)||^2$$

ssi
$$2\langle y,z\rangle = -2\langle y,z\rangle$$
ssi
$$\langle y,z\rangle = 0.$$
Il en résulte aisément que $G = F^{\perp}$ d'où le résultat. ■

Nous verrons que les symétries orthogonales sont un cas particulier fondamental d'*isométries* de E.

Exemple 8. Soit $F = v^{\perp}$ de codimension 1 dans E. Alors
$$s_F(x) = x - \frac{x, v}{\langle v, v\rangle} v.$$
Une telle symétrie est appelée symétrie hyperplane.

1.3. **Dualité et théorème de représentation.** Le fait que le produit scalaire soit *défini* implique que l'application *adjointe*
$$E \to E^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E,\mathbb{R}),\ \ v \mapsto \langle v, -\rangle$$
est injective. Si E est de dimension finie – ce qu'on suppose toujours sauf mention expresse du contraire – alors on sait que $E \simeq E^*$ (isomorphisme non canonique) donc $\dim E = \dim E^*$ d'où il résulte que l'application ci-dessus est bijective.

En particulier toute forme linéaire s'obtient via l'adjoint.

Théorème 4 (Th. de représentation)**.** *Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E,\mathbb{R})$ une forme linéaire. Il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que*
$$\langle v, x\rangle = \varphi(x) \ \text{ pour tout } x \in E.$$

L'argument précédent n'est pas constructif. Comment trouver un tel v ? D'après le th. du rang, le noyau d'une forme linéaire est un hyperplan H. Donc $\varphi(H) = \langle v, H\rangle = 0$ pour le vecteur v cherché. Donc $v \in H^{\perp}$. Vu que H est un hyperplan, son orthogonal est une droite vectorielle, disons $H^{\perp} = \mathbb{R}w$. Donc pour tout $x \in E$,
$$\varphi(x) = \lambda\langle w, x\rangle$$
pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$ à déterminer. En spécifiant $x = w$, nous trouvons que nécessairement
$$\varphi(w) = \lambda\langle w, w\rangle, \ \text{ soit } \lambda = \frac{\varphi(w)}{||w||^2}.$$
Donc finalement
$$\varphi(x) = \frac{\varphi(w)}{||w||^2}\langle w, x\rangle \ \text{ pour tout } x \in E,$$
pour n'importe quel vecteur $w \in (\mathrm{Ker}(\varphi))^{\perp}$.

1.4. **Isométries d'un espace euclidien.** Définition d'une isométrie : toute application linéaire de E dans E conservant la norme. De façon équivalente, toute application linéaire de E dans E conservant le produit scalaire.

Proposition 10. *L'ensemble des isométries de E forme un groupe pour la composition, appelé le groupe orthogonal de E et noté $O(E)$.*

Démonstration 8. La composée de deux isométries reste une isométrie en appliquant successivement la définition. Inverse : il suffit de voir qu'une isométrie est bijective. La définition donne l'injectivité, le fait que $\dim E < \infty$ donne le reste. ■

Exemple 9. Une symétrie orthogonale est une isométrie. On a même caractérisé les symétries orthogonales parmi les isométries par la proposition 9. Les symétries hyperplanes (orthogonales) sont donc les isométries non triviales de E laissant invariant le plus gros sous-espace possibles.

Théorème 5 (Décomposition géométrique)**.** *Le groupe $O(E)$ est engendré par les symétries hyperplanes. De manière plus précise, toute isométrie g est le produit de q symétries hyperplanes avec $q = \dim \operatorname{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$.*

1.5. **Matrices orthogonales et isométries.** Le groupe orthogonal agit librement et transitivement sur les bases orthonormales de E. Écriture du produit scalaire dans une base orthonormée, d'une isométrie dans une base orthonormée de E. Pour tout $g \in O(E)$, $\det g \in \{\pm 1\}$ (utiliser la représentation matricielle ou l'adjoint).

Définition du groupe spécial orthogonal $SO(E) = \{g \in O(E) \mid \det g = 1\}$. Ce sont les isométries préservant l'orientation de E.

Traduction matricielle en prenant $E = \mathbb{R}^n$.

1.6. **Orientation d'un espace euclidien.** Equivalence de bases orthonormées. Orientation d'un espace euclidien E : choix d'une classe de bases. Orientation opposée.

1.7. **Volume d'un espace euclidien.** Soit $n = \dim E$. On sait que l'espace $\Lambda^n E^*$ des formes n-linéaires alternées de E est de dimension 1. Par définition du déterminant, on a l'identité :

$$\varphi(f(v_1), \dots, f(v_n)) = \det(f)\ \varphi(v_1, \dots, v_n),$$

pour tout $f \in \Lambda^n E^*$ et tout $v_1, \dots, v_n \in E$. Supposons que $v = (v_1, \dots, v_n)$ soit une base orthonormale de E. Alors il existe deux formes φ_1, φ_2 et deux seulement telles que

$$|\varphi_1(v)| = |\varphi_2(v)| = 1.$$

Les ensembles

$$\mathcal{B}_i = \{v \text{ base orthonormale de } E \mid \varphi_i(v) = +1\}$$

sont les deux orientations possibles de E. Réciproquement, si E est orienté par $\mathcal{B}$, alors la forme $\varphi_i \in \Lambda^n E^*$ telle que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_i$ est appelée *forme volume* de E.

Supposons E orienté muni de sa forme volume φ. Alors pour $x_1, \dots, x_{n-1} \in E$ fixés, l'application

$$E \to \mathbb{R},\ x \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, x)$$

est linéaire. D'après le th. de représentation, il existe donc un vecteur unique $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \in E$ tel que

$$\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \langle x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}, x \rangle.$$

C'est le *produit mixte* des $(n-1)$ vecteurs $x_1, \dots x_{n-1}$ dans cet ordre.

Proposition 11. *L'application*

$$E^{n-1} \to E,\ (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$$

est $(n-1)$-linéaire alternée et son image est dans $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})^\perp$. De plus,

$$\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}) = ||x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}||^2.$$

En particulier, si les $x_1, \dots, x_{n-1}$ *sont deux à deux orthogonaux, alors* $x_1, \dots, x_{n-1}, x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$ *est une base orthogonale directe.*

La preuve est immédiate de la définition.

Si $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne orientée canonique (c'est-à-dire que la base canonique est orthonormée directe), alors $\varphi = \det$. Écriture de $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$ en fonction des x_i.

2. STRUCTURE DU GROUPE ORTHOGONAL

2.1. **Petites dimensions.** A l'aide de la caractérisation des matrices orthogonales comme matrices formées par les vecteurs d'une base orthonormale, on trouve que $O(1) = \{\pm 1\}$ et $SO(1) = \{1\}$.

Un petit calcul montre que

$$SO(2) = \{A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid a^2 + b^2 = 1.\}.$$

Interprétation de $SO(2)$ comme groupe de rotations. Conséquence : $SO(2)$ est commutatif. [Pour $O(2)$, qui n'est pas commutatif, voir plus loin.]

2.2. **Décomposition des isométries.** Les isométries se décomposent en isométries plus simples. Forme normale.

Lemme 1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un sous-espace $0 \neq F \subseteq E$ tel que $\dim F \leq 2$ et $f(F) \subseteq F$.*

Démonstration 9. Soit P un polynôme à coefficients réels tel que $P(f) = 0$. [Preuve rapide : $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2 donc il doit y avoir une relation linéaire entre $1, f, f^2, f^3, \dots, f^{n^2-1}$.] On décompose $P = p_1 \dots p_r$ en un produit de polynômes irréductibles à coefficients réels, donc de degré 1 ou 2. Il existe un polynôme, disons p_1, tel que $p_1(f)$ n'est pas inversible (sinon $P(f) = p_1(f) \dots p_r(f) = 0$ est inversible, absurde). Donc il existe un vecteur non nul $v \in \mathrm{Ker}(p_1(f))$. Alors $\mathrm{Vect}(v, f(v))$ est invariant par f (utiliser le fait que p_1 est de degré au plus égal à 2.) ■

Un sous-espace $F \subseteq E$ est dit irréductible sous g si les seuls sous-espaces de F invariant par g sont 0 et F lui-même.

Théorème 6 (Forme normale d'une isométrie)**.** *Soit $g \in O(E)$. Il existe une décomposition orthogonale*

$$E = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_2 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_k$$

telle que

- *$g(E_i) = E_i$ pour tout $1 \leq i \leq k$;*
- *$1 \leq \dim E_i \leq 2$ pour tout $1 \leq i \leq k$;*
- *E_i est irréductible sous g pour tout $1 \leq i \leq k$;*
- *Si $\dim E_i = 2$ alors $g|_{E_i} \in SO(E_i)$.*

Démonstration 10. Récurrence sur $\dim E$. C'est acquis pour $\dim E = 1$, 2. Soit maintenant F un sous-espace non nul invariant par g de dimension minimale. D'après le lemme, $1 \leq \dim F \leq 2$. Nous avons alors

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}, \quad g(F^{\perp}) = F^{\perp}.$$

(La seconde égalité est un petit exercice.) On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à $(F^{\perp}, g|_{F^{\perp}})$. L'irréductibilité vient de la minimalité de $\dim F \neq 0$. Si maintenant $\dim E_i = 2$, je dis que $g|_{E_i}$ a un déterminant égal à 1. Sinon c'est un produit d'un nombre impair $q \geq 1$ de symétries hyperplanes, avec $q = \dim \mathrm{Fix}(g|_{E_i})$, d'après le théorème de représentation géométrique. Mais puisque $q \geq 1$, il existe un vecteur non nul $v \in E_i$ tel que $g(v) = v$, ce qui contredit l'irréductibilité de E_i. Donc $\det g|_{E_i} = 1$. ■

Puisque l'on a décrit les isométries en petites dimensions, on peut en déduire la forme matricielle du théorème.

Théorème 7. *Pour tout $g \in O(E)$, il existe une base orthonormée de E telle que la matrice $M(g)$ de g relativement à cette base soit de la forme*

$$M(g) = \begin{bmatrix} A_1 & & & & \\ & \cdots & & & \\ & & A_p & & \\ & & & \mathrm{I}_q & \\ & & & & -\mathrm{I}_r \end{bmatrix}, \quad p, q, r \geq 0 \quad 2p + q + r = \dim E$$

où $A_i \in SO(2), A_i \neq \pm I_2$ pour tout $1 \leq i \leq p$.

Sous forme normale, on peut calculer le déterminant de g : c'est $(-1)^r$.

2.3. **Application à la classification en petites dimensions suivant le sous-espace des points fixes.**

2.3.1. *dim $E = 2$.* .

Lemme 2. $\det g = 1$ *implique que g est l'identité ou le produit de deux symétries hyperplanes ;* $\det g = -1$ *implique que g est une symétrie hyperplane.*

[Preuve directe sans référence au théorème de décomposition : on sait que $g^2 - \mathrm{Trace}(g) - 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = \mathrm{Trace}(g)^2 + 4 > 0$ donc g admet deux valeurs propres réelles distinctes. Comme g est une isométrie, ce ne peut être que 1 et -1. Ainsi g est diagonalisable avec 1 et -1 sur la diagonale dans une base appropriée. Donc $g^2 = \mathrm{Id}_E$. C'est donc une symétrie orthogonale. Ce ne peut être $g = -\mathrm{Id}_E$ car $\det(-\mathrm{Id}_E) = +1$. Donc g est bien une symétrie hyperplane (une réflexion = une symétrie par rapport à une droite). ■.]

Proposition 12. *Soit r une rotation de E. Il existe s_1, s_2 symétries hyperplanes (= symétries par rapport à des droites) telles que $r = s_1 \circ s_2$. De plus, l'une d'entre elles peut être choisie arbitrairement.*

Démonstration 11. Prendre pour s_1 une symétrie hyperplane quelconque. Posons $s_2 = s_1^{-1} r$. Alors s_2 est une isométrie négative de E donc une symétrie hyperplane d'après le lemme précédent. ■

On a vérifié que le groupe $SO(E)$ est commutatif. Le groupe $O(E)$ n'est pas commutatif :

$$\text{Pour tout } r \in SO(E),\ s \in O(E) - SO(E),\ srs^{-1} = r^{-1}.$$

En termes de groupes, $O(E)$ est le produit semi-direct de $SO(E)$ par $\mathbb{Z}/2$.

En conséquence, pour E de dim 2 : si $\dim \mathrm{Fix}(g) = 0$ alors g est une rotation ; si $\dim \mathrm{Fix}(g) = 1$ alors g est une symétrie hyperplane (sinon ce serait un produit de deux symétries hyperplanes distinctes donc n'aurait pas de vecteur fixe non nul).

2.3.2. *$dimE = 3$.* Utiliser la forme normale pour écrire la matrice de g en fonction de $\det g$. En déduire que si $g \in SO(E)$ avec $g \neq \mathrm{Id}_E$ alors $\dim \mathrm{Fix}(g) = 1$. C'est bien la rotation autour de son axe fixe.

Finalement en dimension 3, on a la classification suivante :

- $\dim \mathrm{Fix}(g) = 0 : g = r \circ s = s \circ r$;
- $\dim \mathrm{Fix}(g) = 1 : g = r$;
- $\dim \mathrm{Fix}(g) = 2 : g = s$;
- $\dim \mathrm{Fix}(g) = 3 : g = \mathrm{Id}_E$.

3. RAPPELS ET COMPLÉMENTS SUR LES ACTIONS DE GROUPES

3.1. **Groupes.** Généralités (groupe, sous-groupe, groupe engendré) avec les exemples suivants : $\mathrm{Aut}(X) = S_X$ (groupe symétrique sur un ensemble), $\mathrm{Aut}(V) = GL(V)$ (groupe des automorphismes sur un espace vectoriel) et $O(V)$ (groupe orthogonal).

Les trois groupes sont liés : 1) il existe un unique morphisme injectif

$$\mathrm{Aut}(X) \to GL(V_X)$$

envoyant une permutation d'un ensemble X sur l'automorphisme de l'espace vectoriel V_X librement engendré par X. 2) si de plus, on met une structure euclidienne sur V_X définie par

$$\langle x, y \rangle = \delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors le morphisme $\mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{GL}(V_X)$ se factorise en un morphisme injectif

$$\mathrm{Aut}(X) \to O(V_X).$$

Groupe distingué. Groupe quotient, groupe produit. Suites exactes. Définition d'une extension de groupe. Produit direct.

3.2. **Actions de groupes.** Généralités. Action fidèle. Stabilisateur (groupe d'isotropie G_x). Relation $gG_xg^{-1} = G_{gx}$. Orbites. Une orbite Gx est en bijection ensembliste avec G/G_x. Action transitive. Exemples. Action n-transitive. Action libre. Une action libre est fidèle. Libre + transitive = simplement transitive.

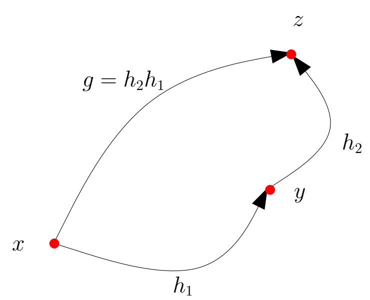

FIG. 5. Action libre et transitive.

Proposition 13. *Une action fidèle et transitive d'un groupe commutatif G est simplement transitive.*

Démonstration 12. Supposons $gx = hx$ pour un certain $x \in X$. Il s'agit de voir que $g = h$. Nous avons $k(gx) = k(hx)$ pour tout $k \in G$. Comme G est commutatif, cela équivaut à : $g(kx) = h(kx)$ pour tout $k \in G$. Comme l'action est transitive, $Gx = X$ donc $gy = hy$ pour *tout* $y \in X$. D'où $g^{-1}hy = y$ pour tout $y \in X$. Comme l'action est fidèle, cela implique $g^{-1}h = 1$ soit $g = h$. ■

3.3. **Produit semi-direct de groupes.** Produit semi-direct externe : soit H et K deux groupes et $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ un morphisme de groupes (nb : c'est une action du groupe K sur le groupe H). Le *produit semi-direct* de H et K par φ est le groupe $H \times K$ muni de l'opération :

$$(h,k) \cdot (h',k') = (h\varphi(k)(h'), kk').$$

(C'est bien un groupe. On vérifie notamment que $(h,k)^{-1} = (\varphi(k^{-1})(h^{-1}), k^{-1})$.) On le note $H \rtimes_\varphi K$. Dans le cas où H et K sont finis, alors $H \rtimes_\varphi K$ est aussi fini et

$$|H \rtimes_\varphi K| = |H| \cdot |K|.$$

Dans le cas où φ est trivial (constant égal à l'identité), on retrouve le produit direct : $H \rtimes_{\mathrm{id}} K = H \times K$.

Théorème 8. *Soit G un groupe. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une suite exacte*
$$1 \to H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} K \to 1$$
et un morphisme $s : K \to G$ tel que $p \circ s = \mathrm{Id}_K$;
2. *Il existe un sous-groupe distingué Δ de G et un sous-groupe Γ de G tel que $\Gamma \cap \Delta = \{1\}$ et $G = \Delta\Gamma$.*
3. *Il existe un morphisme de groupe $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ et un isomorphisme $H \rtimes_\varphi K \to G$.*

Démonstration 13. (1) $\Longrightarrow$ (2) : on prend $\Gamma = s(K)$ et $\Delta = i(H)$. Soit $x \in \Gamma \cap \Delta$. L'exactitude de la suite implique $x = s(0) = 0$. Le fait que $\Delta\Gamma = G$ résulte de la section s. (2) $\Longrightarrow$ (3) : soit $\varphi : \Gamma \to \mathrm{Aut}(\Delta)$ défini par

$$\varphi(\gamma)(\delta) = \gamma\delta\gamma^{-1}, \quad \gamma \in \Gamma.$$

(Noter que ce morphisme est bien défini comme étant à valeurs dans $\mathrm{Aut}(\Delta)$ car Δ est distingué dans G.) On définit un morphisme $\Delta \rtimes_\varphi \Gamma \to G$ par

$$(\delta, \gamma) \mapsto \delta\gamma.$$

On vérifie que c'est un isomorphisme. (3) $\Longrightarrow$ (1) : on a la suite exacte

$$1 \to H \xrightarrow{i} H \rtimes_\varphi K \xrightarrow{p} K \to 1$$

avec les morphismes inclusion $i : h \mapsto (h, 1)$ et projection $p : (h,k) \mapsto k$. La projection a une section $s : K \to H \rtimes_\varphi K$ définie par $s(k) = (1,k)$ et qui vérifie bien $p \circ s = \mathrm{id}_K$. Soit f l'isomorphisme de G sur $H \rtimes_\varphi K$. Alors la suite

$$1 \to H \xrightarrow{i'} G \xrightarrow{p'} K \to 1$$

avec $i' = f^{-1} \circ i$ et $p' = p \circ f$ est exacte. De plus, $s' = f^{-1} \circ s$ est une section de p' (ie : $p' \circ s' = \mathrm{id}_K$). ■

Exemple 10. Le groupe diédral D_{2n} des symétries d'un polygône régulier à n côtés est engendré par une réflection σ et une rotation ρ d'angle $2\pi/n$. La réflection σ engendre un groupe cyclique d'ordre 2 (isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) et la rotation ρ engendre un groupe cyclique d'ordre n (isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). La réflection agit sur le sous-groupe $C = \langle\rho\rangle$ engendré par ρ :

$$\sigma \cdot \rho = \sigma \cdot \rho \cdot \sigma^{-1}.$$

On a ainsi un morphisme $\langle\sigma\rangle \to \mathrm{Aut}(C)$. Alors $D_{2n} = \langle\rho\rangle \rtimes_\varphi \langle\sigma\rangle$. On vérifie en effet que tout élément de D_{2n} s'écrit comme un produit unique $\rho^n\sigma^k$ pour $n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exemple 11. Le groupe $O(n)$ est isomorphe à un produit semi-direct de $SO(n)$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il existe en effet une suite exacte

$$1 \to SO(n) \to O(n) \stackrel{\det}{\to} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1.$$

Une section $s : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to O(n)$ du morphisme det est par exemple donnée par

$$s(\pm 1) = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

4. GÉOMÉTRIE AFFINE

4.1. **Généralités.** Définition d'un espace affine : un espace affine $\mathcal{E}$ est un ensemble $\mathcal{E}$ muni d'une action simplement transitive d'un groupe commutatif $(E, +)$. On dit que $\mathcal{E}$ est un espace affine *dirigé* par E.

Il revient au même de munir $\mathcal{E}$ d'une application

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \to E, \quad (x, y) \mapsto \vec{xy}$$

vérifiant les axiomes suivants :

- Pour tout $x \in \mathcal{E}$, l'application $\mathcal{E} \to E,\ y \mapsto \vec{xy}$ est bijective.
- Pour tous x, y, z, $\vec{xy} + \vec{yz} = \vec{xz}$. (Relation de Chasles)

Il revient au même de se donner un ensemble $\mathcal{E}$ et un groupe commutatif E et une application

$$E \times \mathcal{E} \to \mathcal{E},\ (v, x) \mapsto x + v$$

telle que $(x + v) + w = x + (v + w),\ x + 0 = x$ pour tout $x \in \mathcal{E}$ et $v, w \in E$ et pour tout $x \in \mathcal{E}$, l'application $v \mapsto x + v$ est une bijection de $\mathcal{E}$ dans lui-même.

Points = éléments de $\mathcal{E}$. La dimension de $\mathcal{E}$ est la dimension de E comme espace vectoriel. Droite affine, plan affine.

Quelques remarques : 1) $\overrightarrow{xy} = -\overrightarrow{yx}$ pour tout $x, y \in \mathcal{E}$.
2) $\overrightarrow{xx} = \vec{0}$ pour tout $x \in \mathcal{E}$.

Vectorialisation d'un espace affine = privilégier un point de $\mathcal{E}$ pour définir une structure d'ev sur $\mathcal{E}$. Isomorphisme alors entre $\mathcal{E}$ et E. Notion de repère cartésien. Repère affine : soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n. Un *repère affine* est constitué de $(n+1)$ points $A, B_1, \ldots, B_n$ tels que $(\vec{AB}_1, \ldots, \vec{AB}_n)$ est une base de E.

Tout espace vectoriel E peut être regardé comme un espace affine. En effet, E agit sur lui-même simplement transitivement. À un vecteur $x \in \mathcal{E} = E$, on associe $x + v \in \mathcal{E} = E$.

Notation de Grassmann : $y = x + \vec{v}$. Pour un espace affine dirigé par E, on note $\mathcal{E} = x + E$ pour tout $x \in \mathcal{E}$.

Proposition 14. *Pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, $v \in E$,*

$$\overrightarrow{(x+v)(y+v)} = \overrightarrow{xy}.$$

Démonstration 14. C'est une reformulation des notations et des axiomes. ■

Exemple 12. Droite affine ; équation d'une droite affine ; direction d'une droite affine.

Exemple 13. Plan affine ; équation d'un plan affine ; direction d'un plan affine.

Exemple 14. L'ensemble des solutions d'un système $Ax = b$ est un espace affine.

Exemple 15. Produit d'espaces affines.

4.2. **Sous-espaces affines.** Une partie $\mathcal{F}$ d'un espace affine $\mathcal{E}$ est un *sous-espace affine* de $\mathcal{E}$ s'il existe un sous-espace vectoriel F de la direction E de $\mathcal{E}$ et un point $x \in \mathcal{F}$ tel que

$$\mathcal{F} = x + F = \{x + v \mid v \in F\}.$$

Les points d'un espace affine sont ainsi les sous-espaces affines dirigés par l'espace nul $\{0\}$.

Les sous-espaces vectoriels sont les sous-espaces affines qui passent par l'origine 0.

Des points sont alignés (coplanaires) s'il appartiennent à une même droite affine (à un même plan affine). Deux sous-espaces affines sont *parallèles* s'ils ont même direction. Il résulte de la définition la

Proposition 15. *Deux sous-espaces affines parallèles sont confondus ou disjoints.*

La réciproque est fausse : par exemple, deux droites dans $\mathbb{R}^3$ peuvent être disjointes sans être parallèles.

Proposition 16. *Deux sous-espaces affines de même direction s'obtiennent l'un de l'autre par une unique translation.*

Démonstration 15. Écrire $\mathcal{F} + v$, c'est un sous-espace affine encore dirigé par la direction F de $\mathcal{F}$. ■

C'est une généralisation de l'axiome des droites parallèles d'Euclide. La proposition suivante fait aussi partie des axiomes d'Euclide. Elle se déduit ici des axiomes de la géométrie affine :

Proposition 17. *Par deux points distincts x et y d'un espace affine passe une et une seule droite xy.*

Démonstration 16. Par définition, il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que $x + v = y$. La droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}(v)$ dirige donc la droite affine $x + D$. ■

Sous-espace affine engendré par une famille de points. Notion de parallélisme (les directions coïncident), voire de parallélisme faible (l'une des direction est incluse dans l'autre).

4.3. **Applications affines.** Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines. Une application affine entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ est une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ telle qu'il existe $F \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que

$$f(x + \vec{v}) = f(x) + F(\vec{v}), \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{E}, \vec{v} \in E.$$

Une application affine entre deux espaces affines est une application qui ressemble à une application équivariante.

L'application linéaire F associée à f est déterminée par le fait que

$$F(\vec{v}) = \overrightarrow{f(x)f(x + \vec{v})}.$$

On la note souvent $F = \vec{f}$.

Réciproquement, si l'on connaît $\vec{f}$, alors l'application affine f est déterminée par l'image d'un point O de $\mathcal{E}$. En effet, on alors

$$f(x) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{Ox}), \text{ pour tout } x \in \mathcal{E}.$$

Notion d'isomorphisme affine, d'automorphisme affine. Affinités.

On peut transformer n'importe quelle application linéaire $\vec{f} : E \to F$ en une application affine en posant

$$f(o + v) = o' + \vec{f}(v), \ v \in E,$$

où $o \in \mathcal{E}$ et $o' \in \mathcal{F}$.

En particulier, à tout $\vec{f} \in \mathrm{GL}(E)$, on associe une affinité en posant

$$f_o(o + v) = o + \vec{f}(v), \ v \in E.$$

Exemple 16. Applications constantes.

Exemple 17. Homothétie de centre x et de rapport λ.

Exemple 18. Translations.

Exemple 19. Expression analytique des applications affines.

Proposition 18. *Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine.*

(i) *Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction A, alors $f(\mathcal{A})$ est un sous-espace affine de $\mathcal{F}$ de direction $\vec{f}(A)$.*

(ii) *Si $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{F}$ de direction B alors $f^{-1}(\mathcal{B})$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $f^{-1}(B)$.*

(iii) *En particulier, si $f^{-1}(y)$ est non vide et contient $x \in \mathcal{E}$ alors $f^{-1}(y) = x + \mathrm{Ker}(\vec{f})$. De plus, $\dim \mathcal{E} = \dim f^{-1}(y) + \dim f(\mathcal{E})$.*

L'application $f \mapsto \vec{f}$ vérifie les propriétés suivantes :

(i) La composée d'applications affines est affine et $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$;

(ii) L'inverse d'une application affine bijective est affine et $\overrightarrow{f^{-1}} = \overrightarrow{f}^{-1}$.

Il en résulte :

Proposition 19. *L'ensemble des automorphismes affines de $\mathcal{E}$ est un groupe $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ pour la composition.*

Noter qu'en fixant un repère cartésien, on peut se ramener à considérer $\mathrm{GA}(\mathbb{R}^n)$:

Proposition 20. *Tout espace affine réel de dimension n est affinement isomorphe à $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration 17. Soit $(o, x_1, \ldots, x_n)$ un repère cartésien. L'application

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto o + \sum_i \lambda_i x_i$$

est l'isomorphisme affine recherché. ∎

Le groupe affine est un exemple particulier de produit semi-direct. Notons

$$\tau : (E, +) \to \mathrm{GA}(\mathcal{E})$$

le morphisme qui à un vecteur $\vec{v}$ associe la translation $\tau_{\vec{v}} \in \mathrm{GA}(\mathcal{E})$. Notons

$$\lambda : \mathrm{GA}(\mathcal{E}) \to \mathrm{GL}(E)$$

l'application $f \mapsto \vec{f}$ qui à un isomorphisme affine associe son isomorphisme linéaire associé.

Théorème 9. *La suite*

$$1 \to (E, +) \xrightarrow{\tau} \mathrm{GA}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{GL}(E) \to 1$$

est exacte. Elle est de plus scindée : une section de λ est donnée par $\vec{f} \mapsto f_o$. Il en résulte que $\mathrm{GA}(\mathcal{E}) \simeq E \rtimes_{\varphi} \mathrm{GL}(E)$.

On peut expliciter le produit semi-direct : $\varphi : \mathrm{GL}(E) \to \mathrm{Aut}(E, +)$ est l'*inclusion*. Ici $\mathrm{Aut}(E)$ est le groupe des $\mathbb{Z}$-automorphismes de E (bijections de E dans E préservant l'addition seulement). L'application

$$E \times \mathrm{GL}(E) \to \mathrm{GA}(\mathcal{E}), \quad (\vec{v}, \vec{f}) \mapsto \tau_{\vec{v}} \circ f_o$$

est bijective. Avec le produit approprié sur $E \times \mathrm{GL}(E)$, elle devient un isomorphisme de groupes $E \rtimes_{\varphi} \mathrm{GL}(E) \simeq \mathrm{GA}(\mathcal{E})$. Vu sur $E \times \mathrm{GL}(E)$, le produit est donné par

$$(\vec{v}, \vec{f}) \cdot (\vec{v'}, \vec{f'}) = (\vec{v} + \vec{f}(\vec{v'}), \vec{f} \circ \vec{f'}).$$

On vérifie en effet que $f_o \circ \tau_{\vec{w}} = \tau_{\vec{f}(w)} \circ f_o$.

4.4. **Barycentres.** On commence par montrer, comme au collège, l'existence de barycentre d'un système de points pondérés.

Proposition 21 (Barycentre). *Soit $x_1, \ldots, x_k$ des points de $\mathcal{E}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des nombres réels.*

- *Si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0$ alors le vecteur $\lambda_1 \overrightarrow{Ox_1} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{Ox_k}$ est indépendant du point O de $\mathcal{E}$.*
- *Si $\lambda = \sum_j \lambda_j \neq 0$ alors il existe un unique point $x \in \mathcal{E}$ tel que*

$$\lambda \overrightarrow{Ox} = \lambda_1 \overrightarrow{Ox_1} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{Ox_k}.$$

De plus, l'égalité ci-dessus ne dépend pas du point O choisi.

Démonstration 18. On utilise la relation de Chasles

$$\overrightarrow{Oy} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'y}.$$

Ainsi pour la première affirmation,

$$\begin{aligned}\lambda_1\overrightarrow{Ox_1} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{Ox_k} &= \lambda_1(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'x_1}) + \cdots + \lambda_k(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'x_k}) \\ &= (\lambda_1 + \cdots + \lambda_k)\overrightarrow{OO'} + \lambda_1\overrightarrow{O'x_1} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{O'x_k} \\ &= \lambda_1\overrightarrow{O'x_1} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{O'x_k}.\end{aligned}$$

L'existence de x dans la seconde affirmation résulte des axiomes des espaces affines ; l'indépendance du choix de O de l'avant-dernière égalité ci-dessus. ■

C'est la définition du barycentre d'un système de points pondérés $(x_1, \lambda_1), \ldots, (x_k, \lambda_k)$, pour $\sum_j \lambda_j \neq 0$.

Exemple 20. Milieu d'un segment = barycentre de $(x, 1)$ et de $(y, 1)$. Que se passe-t-il si $(x, 1)$ et $(y, -1)$?

Exemple 21. Le segment $[x, y]$ est l'ensemble des barycentres de (x, λ) et de $(y, 1 - \lambda)$ pour $0 \leq \lambda \leq 1$.

Exemple 22. La droite xy est l'ensemble des barycentres de x et de y.

Dans le vectorialisé $\mathcal{E}_O$, l'égalité définissant le barycentre devient

$$\lambda x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k.$$

Proposition 22 (Caractérisation du barycentre)**.** *x est le barycentre du système $\{(x_i, \lambda_i),\ 1 \leq i \leq k\}$ ssi*

$$\lambda_1\overrightarrow{xx_1} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{xx_k} = \vec{0}.$$

En conséquence, c'est aussi le barycentre du système $\{(x_i, \lambda\lambda_i),\ 1 \leq i \leq k\}$ pour tout $\lambda \neq 0$.

On ne perd donc rien à supposer que $\sum_j \lambda_j = 1 \neq 0$.

Exemple 23. Isobarycentre.

Proposition 23 (Associativité du barycentre)**.** *Le barycentre d'un système de points pondérés est inchangé si l'on remplace un sous-système de points par leur barycentre affecté de la somme des poids de ses points.*

Démonstration 19. Soit $A = \{(x_i, \lambda_i)\}_{i\in I}$ et $B = \{(y_j, \mu_j)\}_{j\in J}$ deux systèmes de points pondérés deux à deux distincts. On suppose que

$$\sum_{i\in I}\lambda_i = \lambda \neq 0, \quad \sum_{j\in J}\mu_j = \mu \neq 0, \quad \lambda + \mu \neq 0.$$

Soit x_A le barycentre de A et x le barycentre de $A \cup B$. Pour montrer la proposition, il suffit de montrer que x est le barycentre de

$$\{(x_A, \lambda)\} \cup B.$$

D'après la caractérisation de la proposition 21 du barycentre x :

$$\underbrace{\sum_{i\in I}\lambda_i\overrightarrow{xx_i}}_{=\lambda\overrightarrow{xx_A}\ \text{(prop.22)}} + \sum_{j\in J}\mu_j\overrightarrow{xy_j} = \vec{0}.$$

Et donc
$$\lambda\overrightarrow{xx_A} + \sum_{j\in J} \mu_j \overrightarrow{xy_j} = \vec{0},$$
ce qui dit bien que x est le barycentre de $\{(x_A, \lambda)\} \cup B$. ■

Exemple 24. Comme application de la proposition, on peut montrer (exercice) que l'isobarycentre d'un triangle (= de ses sommets) est à l'intersection des médianes = centre de gravité d'un triangle. Exercice analogue pour un quadrilatère quelconque. Cas particulier du parallélogramme.

Proposition 24. *Soit $x_0, \ldots, x_k$ des points de $\mathcal{E}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) *Aucun des x_i n'est barycentre des autres points ;*
(2) *La famille $\overrightarrow{x_0x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_0x_k}$ est libre dans E ;*
(3) *Pour tout j, la famille des k vecteurs $\overrightarrow{x_jx_1}, \ldots, \overrightarrow{x_jx_k}$ est libre dans E.*

Démonstration 20. (1) implique (2) : évident [en écrivant la contraposée non (2) implique non (1)]. (2) implique (3) : soit $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{x_0x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_0x_k})$. Alors F est un sev de dimension k. Soit F_j le sev engendré par les k vecteurs $\overrightarrow{x_jx_1}, \ldots, \overrightarrow{x_jx_k}$. C'est aussi un sev de dimension k dont chaque générateur est dans F. Donc $F = F_j$. (3) implique (1) :

Définition de famille de points *affinement libre, affinement génératrice*. Notion de position générale de k points = coïncide avec famille affinement libre.

Une famille affinement libre dans $\mathcal{E}$ a au plus $\dim E + 1$ points. Une famille affinement libre est un repère de $\mathcal{E}$ ssi elle a $\dim E + 1$ points.

La proposition suivante est la généralisation de l'exemple 22. Elle est souvent utilement combinée avec la propriété d'associativité. (Cf. exemple du centre de gravité du triangle.)

Proposition 25. *Une partie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ non vide d'un espace affine est un sous-espace affine si et seulement tout barycentre d'une famille finie de points de $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{F}$.*

Démonstration 21. $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine ssi il existe $x_0 \in \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{F} = x_0 + F$ où F est un sev de E. C'est équivalent à dire que tout point de $\mathcal{F}$ s'écrit comme $x = x_0 + \sum_j \lambda_j v_j$ où les v_j forment une base de F. (On peut choisir les v_j de sorte que $\sum_j \lambda_j = 1$.) Cette dernière écriture dit qu'un point x arbitraire est le barycentre des x_j tels que $\overrightarrow{x_0x_j} = \vec{v_j}$. ■

On peut noter la conséquence suivante :

Proposition 26 (Coordonnées barycentriques)**.** *Dans un repère affine $(a, a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathcal{E}$, tout point $x \in \mathcal{E}$ s'écrit comme barycentre du système $(a_1, \lambda_1), \ldots, (a_n, \lambda_n)$ pour un* unique *$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.*

On peut déduire les coordonnées barycentriques d'un point de ses coordonnées cartésiennes. Soit $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$. Tout $x \in \mathcal{E}$ s'écrit de façon unique
$$x = x_0 + \lambda_1\overrightarrow{x_0x_1} + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{x_0x_n}.$$
On peut donc réécrire que
$$x = \lambda x_0 + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$$

avec $\lambda_0 = 1 - \sum_j \lambda_j$. Donc si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sont les coordonnées cartésiennes x dans le repère $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, alors $(1 - \sum_j \lambda_j, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sont ses coordonnées barycentriques.

Proposition 27. *Une application $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est affine si et seulement si elle conserve les barycentres.*

Démonstration 22. Soit $\vec{f}$ l'application linéaire associée. Nous avons

$$\begin{aligned} \lambda \vec{f}(\overrightarrow{OG}) = \vec{f}(\lambda \overrightarrow{OG}) &= \vec{f}(\lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{OA_n}) \\ &= \lambda_1 \overrightarrow{f(0)f(A_1)} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{f(0)f(A_n)} \\ &= \lambda \overrightarrow{f(O)G'}, \end{aligned}$$

où G' est le barycentre de $(f(A_i), \lambda_i)_{1 \le i \le n}$. Il résulte de

$$\vec{f}(\overrightarrow{OG}) = \overrightarrow{f(O)G'}$$

que $G' = f(G)$.

Cette proposition peut s'exprimer en formules :

$$f\left(\sum_j \lambda_j x_j\right) = \sum_j \lambda_j f(x_j), \quad \text{pour tous } x_j \in \mathcal{E}, \ \sum_j \lambda_j = 1.$$

En conséquence : une application affine est déterminée par l'image des points d'un repère affine. En particulier, il existe un unique isomorphisme affine envoyant les points d'un repère affine sur un repère affine.

Une autre conséquence : l'image d'un segment (resp. d'une droite) par une application affine est un segment (resp. une droite).

4.5. **Projections et symétries affines.**

Lemme 3. *Soit $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ tels que $F + G = E$. Alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ n'est pas vide.*

Démonstration 23. Soit $a, b \in \mathcal{F}, \mathcal{G}$ respectivement. Alors $\vec{ab} = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$. Donc

$$a + u = b - v$$

avec $a + u \in \mathcal{F}$ et $b - v \in \mathcal{G}$. Donc $a + u \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. ■

Ce lemme permet de définir les projections affines.

Proposition 28. *On garde les mêmes hypothèses que dans le lemme et on suppose de plus que $E = F \oplus G$ est une décomposition en somme directe de E. Alors pour tout $x \in \mathcal{E}$, l'intersection $\mathcal{F} \cap (x + G)$ est un unique point : c'est la projection de x sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G.*

On note

$$p_{\mathcal{F},G} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}, \ p(x) = \mathcal{F} \cap (x + G).$$

Démonstration 24. On sait que l'intersection est non vide par le lemme. C'est donc un sous-espace affine dont la dimension est donnée par $\dim(F \cap G) = 0$. ■

Proposition 29. *L'application $p = p_{\mathcal{F},G}$ est affine, vérifie $p^2 = p$ et $\vec{p} = p_{F,G}$ (la projection vectorielle sur F parallèlement à G).*

Démonstration 25. Exercice. ■

Réciproquement, la propriété $p^2 = p$ caractérise les projections parmi les applications affines : c'est la projection affine sur $p(\mathcal{E})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(\vec{p})$.

Définition d'une symétrie affine : $s(x) = x + 2\overrightarrow{xp(x)}$ pour une projection affine p, pour tout $x \in \mathcal{E}$. Propriété : $s^2 = \mathrm{id}$. Caractérise aussi les symétries affines parmi les applications affines.

4.6. **Quelques classiques.** Soit p, q, r trois points alignés tels que $p \neq q$. On a alors :

$$\overrightarrow{pq} = \lambda \overrightarrow{pr}$$

pour un unique $\lambda \in \mathbb{R}$. On note

$$R(p, q, r) = \lambda.$$

Lemme 4. *Soit f une application affine. Si p, q, r sont trois points deux à deux distincts alignés, alors $f(p), f(q), f(r)$ sont aussi deux à deux distincts et alignés. De plus,*

$$R(f(p), f(q), f(r)) = R(p, q, r).$$

Démonstration 26. Si $\overrightarrow{pq} = \lambda \overrightarrow{pr}$ alors

$$q = p + \lambda \overrightarrow{pr}$$

d'où

$$f(q) = f(p) + \lambda \overrightarrow{f(p)f(r)}.$$

■

Théorème 10 (Thalès)**.** *Soit H_1, H_2, H_3 trois hyperplans affines parallèles deux à deux distincts et D_1, D_2 deux droites dont aucune n'est pas parallèle aux H_j. Notons $p_i = H_i \cap D_1$ et $q_i = H_i \cap D_2$. Alors*

$$R(p_1, p_2, p_3) = R(q_1, q_2, q_3).$$

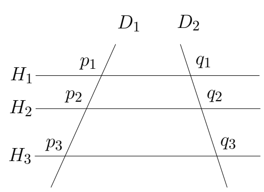

FIG. 6. Théorème de Thalès.

Démonstration 27. On applique le lemme précédent à la projection affine sur D_2 le long de $\overrightarrow{H_1}$. ■

Théorème 11 (Menelaüs)**.** *Soit (p_0, p_1, p_2) un repère affine d'un plan affine $\mathcal{E}$. Soit $q_0 \in (p_0p_1)$, $q_1 \in (p_1p_2)$ et $q_2 \in (p_2p_1)$. On suppose $q_0 \notin \{p_0, p_1\}$, $q_1 \notin \{p_1, p_2\}$ et $q_2 \notin \{p_2, p_0\}$. Alors les q_i sont alignés si et seulement si*

$$\prod_{i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} R(q_i, p_i, p_{i+1}) = +1.$$

Démonstration 28. Soit Δ le déterminant des coordonnées barycentriques des q_i par rapport au repère affine (p_0, p_1, p_2). On sait que $\Delta = 0$ si et seulement si les q_i sont alignés. En utilisant l'hypothèse, on écrit

$$q_i = \lambda_i p_i + \mu_i p_{i+1}, \quad \lambda_i + \mu_i = 1$$

de sorte que

$$R(q_i, p_i, p_{i+1}) = -\frac{\mu_i}{\lambda_i}.$$

Le déterminant Δ est donc

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \mu_0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & 0 & \mu_2 \end{vmatrix} = \lambda_0\lambda_1\lambda_2 + \mu_0\mu_1\mu_2.$$

Donc $\Delta = 0$ ssi

$$\frac{\mu_0\mu_1\mu_2}{\lambda_0\lambda_1\lambda_2} = -1.$$

Vu que $\frac{\mu_i}{\lambda_i} = -R(q_i, p_i, p_{i+1})$, le résultat s'ensuit. ■

5. ESPACES AFFINES EUCLIDIENS

Un espace affine euclidien est un espace affine dont la direction est un espace euclidien. L'exemple fondamental est $\mathbb{R}^n$ affine avec direction $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

L'application $(x, y) \mapsto ||\overrightarrow{xy}||$ est une distance sur $\mathcal{E}$.

Il existe toujours un repère orthonormal de $\mathcal{E}$: un repère affine $p_0, p_1, \ldots, p_n$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_n}$ forment une base orthonormale de E.

Proposition 30. *Tout espace affine euclidien (de dimension finie) est isométrique à $\mathbb{R}^n$.*

Une *isométrie affine* est une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ telle que

$$||\overrightarrow{f(p)f(q)}||_F = ||\overrightarrow{pq}||_E.$$

Exemples d'isométries : translations, symétries orthogonales, rotations.

Les isométries d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ dans lui-même forment un sous-groupe, noté $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$, du groupe affine $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$. De plus :

Proposition 31. *L'application*

$$\lambda| : \mathrm{Isom}(\mathcal{E}) \to \mathrm{O}(E)$$

est un morphisme de groupes surjectif dont le noyau est le sous-groupe des translations.

L'application $\lambda|$ comme la notation le suggère, n'est autre que la restriction de l'application 'partie linéaire', déjà introduite dans le cadre purement affine, aux isométries. De même, cette application admet une section $\vec{f} \to f_o$. C'est la restriction de la section correspondante $\mathrm{GL}(E) \to \mathrm{GA}(\mathcal{E})$. Vu le théorème 9, il en résulte la

Proposition 32. *L'application*

$$E \rtimes \mathrm{O}(E) \to \mathrm{Isom}(\mathcal{E}), \quad (\vec{v}, f) \mapsto \tau_{\vec{v}} \circ f_o$$

est un isomorphisme de groupes.

Rappelons que le produit (non commutatif) sur $E \times \mathrm{O}(E)$ est donné par

$$(\vec{v}, f) \cdot (\vec{v'}, f') = (\vec{v} + f(\vec{v'}), f \circ f').$$

Rappelons aussi la formule

$$f_o \circ \tau_{\vec{w}} = \tau_{\vec{f}(\vec{w})} \circ f_o.$$

On peut donc décomposer une isométrie comme produit d'une translation et d'une isométrie avec point(s) fixe(s). Cependant, cette décomposition dépend du choix de la section $f \mapsto f_o$. Peut-on obtenir une décomposition distinguée en un sens géométrique ?

Soit $\mathcal{S}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. On note comme d'habitude $S = \overrightarrow{\mathcal{S}}$ la direction. On va définir un morphisme $\mathrm{O}(S^{\perp}) \to \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ de la manière suivante. Soit $r \in \mathrm{O}(S^{\perp})$. On pose

$$\rho_r(x + \vec{v}) = x + r(\vec{v}), \quad x \in \mathcal{S},\ v \in S^{\perp}.$$

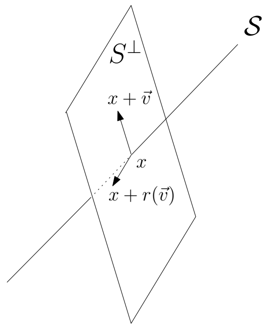

FIG. 7. Construction de ρ_r.

Noter que $\rho_r|_{\mathcal{S}} = \mathrm{id}_{\mathcal{S}}$. On remarque aussi la propriété suivante (exercice).

Proposition 33. *L'application ρ_r est une isométrie affine. De plus l'application*

$$\mathrm{O}(S^{\perp}) \to \mathrm{Isom}(\mathcal{E}), \quad r \mapsto \rho_r$$

est un morphisme injectif de groupes.

Un cas particulier important : $r = -\mathrm{Id}_{S^{\perp}}$. On reconnaît la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{S}$. On la note $s_{\mathcal{S}}$.

Lemme 5. *Une application affine f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ admet un point fixe unique ssi $\mathrm{Fix}(\vec{f}) = \vec{0}$.*

Démonstration 29. Donnons nous un point o de $\mathcal{E}$. Alors on sait que $f(o + \vec{v}) = f(o) + \vec{f}(\vec{v})$. Donc

$$f(o + \vec{v}) = o + \vec{v} \iff (\vec{f} - \mathrm{Id})(v) = \overrightarrow{f(o)o}.$$

Par conséquent, si o et $o + \vec{v}$ sont deux points fixes distincts de f alors $\mathrm{Fix}(\vec{f}) \neq 0$. Si o est unique point fixe, alors $f(o + \vec{v}) = f(o) + \vec{f}(\vec{v}) = o + \vec{f}(\vec{v})$. Donc $\vec{f}(\vec{v}) \neq \vec{v}$ pour $\vec{v} \neq 0$. ■

Pour le lemme suivant : espace vectoriel quotient, espace affine quotient. Ou bien remplacer la démonstration par une récurrence sur la dimension k. Le cas $k = 0$ correspond au lemme ci-dessus.

Lemme 6. *Soit $g \in \mathrm{Isom}(E)$ et $k = \dim \mathrm{Fix}(\vec{g})$. Il existe un unique sous-espace affine $\mathcal{S}$ de dimension k tel que $g|_{\mathcal{S}}$ est une translation de $\mathcal{S}$.*

Autrement dit, il existe un sous-espace affine $\mathcal{S}$ de dimension maximale avec la propriété remarquable que $g(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ et $g|_{\mathcal{S}}$ est une translation de vecteur $\vec{v} \in S = \vec{\mathcal{S}}$.

Démonstration 30. On sait que la restriction de g sur un sea $\mathcal{S}$ est une translation ssi $\overrightarrow{g|_{\mathcal{S}}}$ est l'identité sur $\vec{\mathcal{S}} = S$. C'est équivalent à dire que $S \subseteq \mathrm{Fix}(\vec{g})$. Mais comme on demande que les dimensions coïncident, i.e. $\dim S = k = \dim \mathrm{Fix}(\vec{g})$, c'est équivalent à dire que $S = \mathrm{Fix}(\vec{g})$.

Si $\mathcal{S}$ convient, sa direction S est $\mathrm{Fix}(\vec{g})$. On dispose donc d'une application affine

$$g' = \bar{g} : \mathcal{E}/S \to \mathcal{E}/S, \quad x + S \mapsto \bar{g}(x + S) = g(x) + S.$$

Sa partie linéaire n'est autre que l'application linéaire définie par $\vec{g'}(\vec{v} + S) = \vec{g}(\vec{v}) + S$. Il suffit de montrer $\bar{g}$ a un unique point fixe. D'après le lemme, il suffit donc de montrer que $\mathrm{Fix}(\vec{g'}) = 0$. Or $\vec{g'}(\vec{v} + S) = \vec{v} + S$ ssi $\vec{g}(\vec{v}) - \vec{v} \in S$. Décomposons $E = S \oplus S^{\perp}$. Rappelons que $S^{\perp}$ est un sous-espace stable par g, et même que $g(S^{\perp}) = S^{\perp}$. Soit $\vec{v} = s + t,\ s \in S,\ t \in S^{\perp}$. Nous avons donc

$$\vec{g}(\vec{v}) - \vec{v} = \vec{g}(t) - t \in S \cap S^{\perp} = 0.$$

Il en résulte que $\vec{g}(t) = t$ c'est-à-dire que $t \in S$. Donc $t \in S \cap S^{\perp} = 0$. C'est le résultat voulu. ∎

La conséquence fondamentale est le

Théorème 12 (Décomposition canonique des isométries affines)**.** *Soit $g \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ et $k = \dim \mathrm{Fix}(\vec{g})$. Il existe un unique sous-espace affine $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}$ de dimension k, un vecteur $\vec{v} \in \vec{\mathcal{S}} = S$ et une isométrie vectorielle $r \in \mathrm{O}(S^{\perp})$ telle que*

$$g = \tau_{\vec{v}} \circ \rho_r.$$

Le triplet $(\mathcal{S}, \vec{v}, r)$ est unique et

$$\tau_{\vec{v}} \circ \rho_r = \rho_r \circ \tau_{\vec{v}}.$$

Remarques :

- g a des points fixes ssi $\vec{v} = \vec{0}$.
- $\vec{v} \in \mathrm{Fix}(r)$ (voir la démonstration).

Exemple 25. Pour $g = \sigma_{\mathcal{F}}$, symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{F} = x_0 + F$: l'ensemble des points fixes de g est $\mathcal{F}$ et $\vec{v} = \vec{0}$.

Exemple 26. Une rotation dans un plan suivi d'une translation est encore une rotation. Quel est le nouveau centre et l'angle ?

L'intérêt de la décomposition vient du fait que la translation et l'isométrie *commutent* (exercice : le vérifier). Une décomposition arbitraire en une composition de translation et d'isométrie vectorielle n'a pas en général cette propriété.

Par exemple, l'application affine f définie par

$$\begin{cases} x' &= -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{13}{5} \\ y' &= \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5} \end{cases}$$

se décompose bien sous la forme $f = \tau_{\vec{v}} \circ \rho$ avec $\vec{v} = (-\frac{13}{5}, \frac{6}{5})$ et ρ définie sur $\mathbb{R}^2$ par la matrice $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ qui est bien une isométrie vectorielle. Mais ce n'est pas la décomposition canonique car $\rho \circ \tau_{\vec{v}} \neq \tau_{\vec{v}} \circ \rho$. Exercice : trouver sa décomposition canonique.

Démonstration 31. *Unicité* : $g = \tau_{\vec{v}} \circ \rho_r$ avec $\vec{v} \in S$ et $r \in \mathrm{O}(S^{\perp})$ implique

$$g(\mathcal{S}) = \tau_{\vec{v}} \circ \rho_r(\mathcal{S}) = \tau_{\vec{v}}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}.$$

Vu que $\rho_r|_{\mathcal{S}} = \mathrm{id}_{\mathcal{S}}$, on voit que

$$g|_{\mathcal{S}} = (\tau_{\vec{v}} \circ \rho_r)|_{\mathcal{S}} = \tau_{\vec{v}} \circ \rho_r|_{\mathcal{S}} = \tau_{\vec{v}}|_{\mathcal{S}}.$$

En particulier $\vec{v}$ est unique. Il résulte aussi du lemme précédent que $\mathcal{S}$ est unique. Donc finalement

$$r = \vec{g}|_{S^{\perp}}$$

est aussi uniquement déterminé.

Existence : on choisit $\mathcal{S}$ grâce au lemme précédent : c'est le sea de dimension k sur lequel g agit comme une translation de vecteur $\vec{v} \in S$. Donc $\tau_{\vec{v}} = g|_{\mathcal{S}}$. On a

$$\mathrm{Fix}(\vec{g}) = S = \overrightarrow{\mathcal{S}} \quad \text{et} \quad r = \vec{g}|_{S^{\perp}}.$$

Soit maintenant $x \in \mathcal{S}$ et $\vec{w} \in S^{\perp}$:

$$g(x + \vec{w}) = g(x) + \vec{g}(\vec{w}) = \tau_{\vec{v}}(x) + r(\vec{w}) = \rho_r(\tau_{\vec{v}}(x) + \vec{w}) = \rho_r(\tau_{\vec{v}}(x + \vec{w})).$$

Donc $g = \rho_r \circ \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{v}} \circ \rho_r$. ■

Explication et argument alternatif du théorème 12 : on sait qu'une isométrie affine quelconque n'admet pas toujours un point fixe (cf. translation par exemple). On peut au besoin, à l'aide de l'isométrie de la proposition 30, identifier l'espace affine à l'espace affine euclidien standard $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, une isométrie affine g est identifée à une matrice orthogonale M plus une translation de vecteur $\vec{w}$. Alors la composée de g avec la translation de vecteur $-\vec{w}$ aura des points fixes. Cherchons toutes les translation dont la composition suivant g garantit l'existence de points fixes : on veut que $M + \vec{u}$ ait un point fixe dans $\mathbb{R}^n$, donc on demande

$$Mx + \vec{w} + \vec{u} = x.$$

Cela équivaut à

$$(M - I)(x) = -(\vec{w} + \vec{u}), \quad \text{soit : } \ \vec{w} + \vec{u} \in \mathrm{Im}(M - I).$$

Cela revient donc à choisir $\vec{u}$ de telle sorte que $\vec{w}+\vec{u} \in \mathrm{Im}(M-I)$. Cela ne détermine pas encore $\vec{u}$ de façon unique. Cependant si l'on requiert que la translation et l'isométrie commutent, i.e.,

$$Mx + \vec{w} + \vec{u} = M(x + \vec{u}) + \vec{w}, \quad \forall x,$$

alors

$$M\vec{u} = \vec{u}.$$

Là on utilise un lemme (vu ou à revoir en exercice) qui dit que

$$E = \mathrm{Ker}(M - I) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(M - I).$$

Il s'ensuit que les deux conditions ensemble

$$\begin{cases} \vec{w} + \vec{u} \in \mathrm{Im}(M - I) \\ \vec{u} \in \mathrm{Ker}(M - I) \end{cases}$$

détermine $\vec{u}$ de manière unique. ■

Ce théorème réduit donc formellement la classification des isométries affines à celles des isométries vectorielles. Les applications sont la classification géométriques des isométries affines en dimensions 2 et 3 en fonction de la dimension de $\mathrm{Fix}(\vec{g})$.

Vocabulaire : isométrie affine directe (resp. indirecte) = isométrie affine dont la partie linéaire est directe (resp. indirecte) = isométrie affine dont la partie linéaire a un déterminant $+1$ (resp. -1). Les isométries affines directes forment un sous-groupe distingué $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ du groupe $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$. Exercice : pourquoi ?

Autre terminologie : positif = direct ; négatif = indirect. Déplacement = isométrie affine directe ; antidéplacement = isométrie affine indirecte.

Théorème 13. *Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien. Toute isométrie $g \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ s'identifie à un des trois types suivants :*

$\dim \mathrm{Fix}(\vec{g})$	0	1	2
$\mathcal{S}$	singleton	droite	plan
$\vec{g}$	$\det \vec{g} = 1$	$\det \vec{g} = -1$	id
g	ρ_r	$s_{\mathcal{D}} \circ \tau_{\vec{v}}$	$\tau_{\vec{v}}$
type	rotation	symétrie glissée	translation

La démonstration est un exercice basé sur la classification idoine des isométries vectorielles.

Remarque : en termes de points fixes de l'isométrie affine :

1. les translations et les symétries glissées sont les seules isométries affine du plan n'admettant aucun point fixe.
2. les rotations ont un unique point fixe ("centre de la rotation").
3. la symétrie (réflexion) admet une droite fixe affine.
4. l'identité admet le plan comme ensemble de points fixes.

Théorème 14. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3. Toute isométrie $g \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ s'identifie à l'un des quatre types suivants :*

dim $\mathrm{Fix}(\vec{g})$	0	1	2	3
$\mathcal{S}$	$\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{E}$
$\vec{g}$	$\det g = -1$	$\det g = +1$	$\det g = -1$	$g = \mathrm{id}$
g	$g = s_{\mathcal{P}} \circ \rho_r$ $r \in \mathrm{O}(P)$ $\mathcal{D} \perp \mathcal{P}$	$g = \tau_{\vec{v}} \circ \rho_r$ $r \in \mathrm{O}(D^\perp)$ $\vec{v} \in D$	$g = \tau_{\vec{v}} \circ s_{\mathcal{P}}$ $\vec{v} \in P$	$\tau_{\vec{v}}$
type	symétrie rotation	vissage	symétrie glissée	translation

$\mathcal{D}$ désigne une droite, $\mathcal{P}$ un plan et $r \in \mathrm{O}(D^\perp)$ est une isométrie distincte de l'identité.

La démonstration est basée sur le théorème précédent (dimension 2) et la classification des isométries vectorielles en dimension 3.

Remarque : en termes de points fixes de l'isométrie affine g,

1. Les symétries glissées et les vissages (dont les translations sont un cas particulier) sont les seules isométries affines sans point fixe.
2. Les symétries rotations ont un unique point fixe.
3. Les rotations sont les vissages qui admettent une droite fixe.

4. Les symétries par rapport à un plan (retournements) admettent ce plan comme plan fixe.
5. L'identité admet $\mathcal{E}$ comme ensemble de points fixes.

Dessins.
Groupe d'isométries d'une figure. Exemples.