ALGÈBRE HOMOTOPIQUE ET COHOMOLOGIE

par

Denis-Charles Cisinski

Mémoire de synthèse
en vue de l'obtention de
l'**Habilitation à Diriger des Recherches**

soutenue le 2 décembre 2008 devant le jury composé de

Lawrence Breen, Professeur à l'Université Paris 13
Bernhard Keller, Professeur à l'Université Paris 7
William Messing, Professeur à l'Université du Minnesota
Geoffrey Powell, Chargé de recherche au CNRS, Université Paris 13
Carlos Simpson, Directeur de recherches au CNRS, Université de Nice (rapporteur)
Jörg Wildeshaus, Professeur à l'Université Paris 13

Rapporteur non présent lors de la soutenance :
Alexander Beilinson, Professeur à l'Université de Chicago

Université Paris 13
CNRS, UMR 7539
99, Av. Jean-Baptiste Clément
F–93430 Villetaneuse

Remerciements. — Ce mémoire rend compte d'un travail que j'ai mené essentiellement depuis mon arrivée au LAGA. J'y ai bénéficié d'un environnement d'une très grande richesse mathématique et humaine. J'ai eu la chance de partager cette atmosphère avec mon co-auteur, Frédéric Déglise, qui, par son amitié et nos longues discussions, a alimenté rêves et résultats. Les encouragements et le soutien constant de Jörg Wildeshaus ont pleinement contribué à l'aboutissement de nos efforts.

Je suis honoré de pouvoir remercier Alexander Beilinson et Carlos Simpson d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce mémoire d'habilitation.

Je remercie Lawrence Breen, Bernhard Keller, William Messing, Geoffrey Powell pour avoir accepté de faire partie du jury.

Table des matières

Introduction

Mes travaux portent sur l'algèbre homotopique, vue comme une extension naturelle de la théorie des catégories. Ce qui guide particuliérement mes recherches, c'est le formalisme de la cohomologie, c'est-à-dire l'aspect fonctoriel de la géométrie.

L'un des aspects de mes travaux de recherche trouve sa source dans l'étude d'une description de la théorie de l'homotopie des petites catégories (vues comme des modèles pour les types d'homotopie), conjecturée par Grothendieck, dans la *Poursuite des champs* : la classe des équivalences faibles de petites catégories est le plus petit localisateur fondamental. Cette description axiomatique de la théorie de l'homotopie des petites catégories, prouvée dans [**C8, C9**], fournit un outil très puissant pour exprimer et comprendre l'ubiquité de la théorie de l'homotopie des CW-complexes dans l'algèbre homotopique générale. Pour pouvoir l'exploiter pleinement, encore faut-il dégager un cadre adéquat : une extension de la théorie des catégories au cadre de l'algèbre homotopique. Une telle extension naturelle est fournie par la théorie des dérivateurs de Grothendieck. Et l'enjeu qui se dégage alors est la compréhension de la notion de (co)limite homotopique. Cette dernière se doit d'être une généralisation de la notion de (co)limite, mais elle contient dans sa nature même la notion de (co)homologie.

Une autre direction de mes travaux de recherche est la théorie de l'homotopie des schémas de Morel et Voevodsky. Plus précisément, je m'intéresse à la construction et à l'étude de catégories de coefficients dans lesquelles le formalisme des six opérations de Grothendieck (tel qu'il est développé dans la thèse de J. Ayoub) s'applique, et dans lesquelles les motifs mixtes de Voevodsky se réalisent. Je présenterai dans ce mémoire le premier travail abouti dans cette direction, mené en collaboration avec F. Déglise.

Ce mémoire est donc séparé en deux parties.

Dans la première, je présenterai mes travaux sur l'algèbre homotopique abstraite. Dans la première section, j'introduirai rapidement la notion de dérivateur, et expliquerai comment produire des exemples élémentaires à partir de catégories de modèles fermées de Quillen. Dans la deuxième section, je présenterai mes travaux sur les catégories dérivables. Ces dernières sont des généralisation de la notion de catégorie de modèles de Quillen. J'expliquerai comment cette notion fournit un cadre adéquat pour l'algèbre homotopique (c'est-à-dire, pour construire des dérivateurs). Je proposerai enfin une nouvelle définition de catégorie de modèles qui a l'avantage à la fois d'englober les catégories de modèles de Thomason, et les catégories de modèles de Quillen, et d'avoir d'excellente propriétés de souplesse et de fonctorialité qui font défaut à la notion classique. Dans la troisième section, j'expliquerai comment caractériser les foncteurs qui induisent des équivalences de catégories homotopique ou de dérivateurs. Cette caractérisation permet de comprendre pourquoi la K-théorie est invariante par équivalences dérivées. Dans la quatrième section, je reviendrai sur la notion de dérivateur. L'emphase sera mise sur la théorie des extensions de Kan homotopiques et sur la notion de localisation de Bousfield. J'expliquerai comment ces théories permettent de caractériser la théorie de l'homotopie des CW-complexes par une propriété universelle, illustrant par là la puissance de la caractérisation des équivalences faibles de catégories prédite par Grothendieck.

Dans la seconde partie, je présenterai un travail mené en collaboration avec Frédéric Déglise sur les réalisations monoïdales des catégories triangulées de motifs mixtes, i.e. sur les *cohomologies de Weil mixtes*. Je présenterai d'abord les résultats abstraits qui permettront ensuite de construire des catégories triangulées de motifs (éventuellement à coefficients dans un spectre en anneaux). J'expliquerai ensuite comment exploiter ces résultats qui, conjointement à la théorie de l'homotopie des schémas de Morel et Voevodsky, permettent d'étudier les cohomologies de Weil mixtes. Le résultat principal est un théorème de basculement : la catégorie triangulée des modules sur une cohomologie de Weil mixte, définie sur des schémas lisses sur un corps parfait, est canoniquement équivalente à la catégorie dérivée des complexes d'espaces vectoriels sur le corps de coefficients. Cela permet de voir les foncteurs de réalisations comme des foncteurs d'extension de scalaires. Une version partielle de ce résultat reste valable pour les cohomologies de Weil mixtes définies sur la catégorie des schémas lisses sur une base régulière (comme, par exemple, un anneau de valuation discrète). On verra comment en déduire, par fonctorialité, des théorèmes de finitude, de dualité, d'existence de classes de cycles, et de comparaison.

PARTIE I
ALGÈBRE HOMOTOPIQUE

1. Dérivateurs

Lorsqu'on localise une catégorie $\mathcal{M}$ par une classe d'équivalences faibles $\mathcal{W}$, et que l'on s'intéresse aux structures apparaissant sur la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}(\mathcal{M}) = \mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}$ (obtenue en inversant formellement les flèches de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{M}$), on est confronté à une difficulté : la catégorie $\mathbf{Ho}(\mathcal{M})$ n'admet pas en général de limites inductives ou projectives. De ce manque de structure canonique sur $\mathbf{Ho}(\mathcal{M})$ naît un grand nombre de difficultés. Par exemple, si $\mathcal{M}$ est la catégorie des complexes (éventuellement bornés) sur une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, et si $\mathcal{W}$ désigne la classe des quasi-isomorphismes, la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}(\mathcal{M})$ est par définition la catégorie dérivée de $\mathcal{A}$, notée habituellement $D^b(\mathcal{A})$. Il est bien connu, depuis la thèse de Verdier, que la catégorie $D^b(\mathcal{A})$ est munie d'une structure très riche : celle de catégorie triangulée. Cependant, la notion de catégorie triangulée souffre de grands défauts. Tout d'abord, l'ingrédient principal, la notion de cone d'un morphisme, n'est pas une construction définie par une propriété universelle. Ce manque de canonicité provoque l'émergeance de difficultés de calcul non triviales, et en outre, empêche de pouvoir considérer le foncteur

$$\mathcal{A} \longrightarrow D^b(\mathcal{A}) \ , \quad X \longmapsto X \text{ (vu comme un complexe concentré en degré zéro)}$$

pour ce que nous voudrions qu'il soit : le foncteur universel de $\mathcal{A}$ vers une catégorie triangulée qui envoie les suites exactes courtes sur des triangles distingués. D'autre part, lorsque la catégorie $\mathbf{Ho}(\mathcal{M})$ n'est pas triangulée, il est très difficile de dégager les structures qu'elle porte.

Pour pouvoir étudier la structure de $\mathbf{Ho}(\mathcal{M})$, il faut étudier les différents foncteurs qui relient $\mathbf{Ho}(\mathcal{M})$ à d'autres catégories. Le premier candidat est le foncteur de localisation

$$\mathcal{M} \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{M})\,.$$

Ce dernier contient bien entendu toute l'information qui nous intéresse, mais il va contre l'intuition que nous avons de l'objet $\mathbf{Ho}(\mathcal{M})$: une catégorie définie intrinsèquement. Le foncteur de localisation ci-dessus n'est qu'une présentation parmis d'autres de $\mathbf{Ho}(\mathcal{M})$. Par exemple, on peut avoir une autre catégorie $\mathcal{N}$ (munie d'une classe d'équivalences faibles) et une équivalence de catégories

$$\mathbf{Ho}(\mathcal{M}) \simeq \mathbf{Ho}(\mathcal{N})\,.$$

Le point de vue Grothendieck et de Heller est qu'au lieu de ne considérer que la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}(\mathcal{M})$ seule, on peut considérer toute une famille de catégories homotopiques, ainsi que toutes les fonctorialités qui les relient entre elles canoniquement. Plus explicitement, on va considérer toutes les catégories homotopiques $\mathbf{Ho}(\mathcal{M}^{X^{op}})$, où X est une petite catégorie, $\mathcal{M}^{X^{op}}$ la catégorie des préfaisceaux sur X à valeurs dans $\mathcal{M}$, et $\mathbf{Ho}(\mathcal{M}^{X^{op}})$ la localisation de $\mathcal{M}^{X^{op}}$ par les flèches qui sont dans $\mathcal{W}$ argument par argument. Cela définit un 2-foncteur

$$\mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M}) : X \longmapsto \mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M})(X) = \mathbf{Ho}(\mathcal{M}^{X^{op}})$$

de la 2-catégorie des petites catégories vers la 2-catégorie des catégories. Ce 2-foncteur envoie les foncteurs entre petites catégories $u : X \longrightarrow Y$ sur un foncteur

$$u^* : \mathbf{Ho}(\mathcal{M}^{Y^{op}}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{M}^{X^{op}})\,,$$

lequel est induit par le foncteur qui envoie un préfaisceau F sur Y sur le préfaisceau $u^*(F)$, obtenu à partir de F en composant avec u. On peut voir ce 2-foncteur $\mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M})$ comme une structure sur $\mathbf{Ho}(\mathcal{M})$: c'est le *prédérivateur* associé à $\mathcal{M}$ (relativement à la classe des équivalences faibles $\mathcal{W}$). La catégorie $\mathbf{Ho}(\mathcal{M})$ se retrouve à partir de $\mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M})$ en évaluant sur la catégorie finale (i.e. avec un seul objet, pas d'autres morphismes que l'identité).

Un *prédérivateur* est simplement un 2-foncteur

$$\mathbb{D} : \mathcal{C}at^{op} \longrightarrow \mathcal{CAT}$$

(où $\mathcal{C}at$ désigne la 2-catégorie des petites catégories, et $\mathcal{CAT}$ la 2-catégorie des catégories non nécessairement petites[(1)]).

Un *dérivateur* est un prédérivateur qui vérifie un certain nombre de propriétés supplémentaires, dont la plus importante est la suivante. Étant donné un foncteur $u : X \longrightarrow Y$, le foncteur

$$u^* = \mathbb{D}(u) : \mathbb{D}(Y) \longrightarrow \mathbb{D}(X)$$

admet un adjoint à gauche

$$u_! : \mathbb{D}(X) \longrightarrow \mathbb{D}(Y)$$

et un adjoint à droite

$$u_* : \mathbb{D}(X) \longrightarrow \mathbb{D}(Y)\,.$$

Les autres axiomes assurent des propriétés naturelles qui permettent en particulier de calculer les adjoints $u_!$ et u_* localement[(2)]. Lorsque $Y = e$ est la catégorie finale, le foncteur $u_!$ (resp. u_*) est le foncteur *colimite homotopique* (resp. (*limite homotopique*) indexé par X^{op}. La notion de dérivateur admet de nombreuses variantes. En particulier, on peut demander que $\mathbb{D}$ ne soit défini que sur une sous-2-catégorie de $\mathcal{C}at$, comme par exemple celle des catégories directes (finies), ou bien celle des ensembles ordonnés finis.

On obtient beaucoup d'exemples de dérivateurs grâce au

Théorème 1.1 (**[C1]**). — *Pour toute catégorie de modèles fermée au sens de Quillen $\mathcal{M}$, si $\mathcal{M}$ admet des limites inductives et projectives, alors le prédérivateur $\mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M})$ est un dérivateur.*

---

(1) On peut par exemple recourir à la théorie des univers pour organiser tout cela, et éviter les éccueils ensemblistes d'usage.

(2) Voir [**Hel88, Mal01, C1**] pour des définitions explicites.

Le point délicat pour démontrer le théorème ci-dessus est l'existence d'adjoints pour le foncteur image inverse
$$u^* : \mathbf{Ho}(\mathcal{M}^{Y^{op}}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{M}^{X^{op}})\,.$$
Dans la pratique, cela ne présente pas de trop grandes difficultés. La stratégie naturelle à suivre est la suivante. Pour construire un adjoint à droite du foncteur u^* ci-dessus, on montre que les catégories de préfaisceaux $\mathcal{M}^{X^{op}}$ et $\mathcal{M}^{Y^{op}}$ sont chacune munies d'une structure de catégorie de modèles dont les équivalences faibles (resp. les cofibrations) sont les équivalences faibles argument par argument (resp. les cofibrations argument par argument). Il est alors immédiat que le couple de foncteur adjoints
$$u^* : \mathcal{M}^{Y^{op}} \rightleftarrows \mathcal{M}^{X^{op}} : u_*$$
est une adjonction de Quillen, et l'on peut donc appliquer le Théorème de Quillen, d'adjonction des foncteurs dérivés [**Qui67**, Section 4.5, Théorème 3].

Cette stratégie est tout-à-fait convenable dans la pratique (par exemple lorsque $\mathcal{M}$ est une catégorie de modèles combinatoire au sens de J. Smith [**Bek00**]), mais pour une catégorie de modèles fermée abstraite, on ne sait pas démontrer que les catégories de préfaisceaux de la forme $\mathcal{M}^{X^{op}}$ admettent des structures de catégories de modèles. La preuve du Théorème 1.1 requiert donc des outils plus élaborés(3).

C'est ce défaut de stabilité par passage aux catégories de préfaisceaux de la théorie des catégories de modèles de Quillen que j'ai voulu, par la suite, étudier de plus près.

2. Catégories dérivables et catégories de modèles

Dans des notes manuscrites, Thomason a dégagé une autre notion de catégorie de modèles, et a démontré que cette notion a une excellente propriété : pour toute catégorie de modèles de Thomason simpliciale $\mathcal{M}$, et pour toute petite catégorie X, la catégorie des préfaisceaux $\mathcal{M}^{X^{op}}$ est une catégorie modèles de Thomason ; voir [**Wei01**]. Le problème de la notion de catégorie de modèles de Thomason, c'est qu'une catégorie de modèles au sens de Quillen en est une au sens de Thomason si et seulement si elle est propre (et si les factorisations peuvent être obtenue fonctoriellement). Or il y a un grand nombre de catégorie de modèles fermées qui apparaissent naturellement et qui ne sont pas propres : par exemple, la catégorie de modèles sur la catégorie des espaces topologiques (ou des ensembles simpliciaux) qui classifie les types d'homotopie rationnels n'est pas propre à droite. Cela m'a amené à définir une notion de catégorie de modèles vérifiant les conditions suivantes.

1. Toute catégorie de modèles au sens de Quillen ou au sens de Thomason est une catégorie de modèles.

(3)Pour démontrer l'exitence des adjoints de u^*, dans le cas d'une catégorie de modèles fermée générale $\mathcal{M}$, on se préoccuppe d'abord du cas des catégories directes : si X est une catégorie directe, alors $\mathcal{M}^{X^{op}}$ admet une structure de catégorie de modèles (de type Reedy), et on peut appliquer la stratégie ci-dessus pour montrer que le couple de foncteurs adjoints (u^*, u_*) est une adjonction de Quillen. Pour le cas général, on démontre que l'on peut approximer fonctoriellement toute petite catégorie par une catéogire directe, et on utilise alors un théorème de cofinalité homotopique non trivial.

2. Pour toute catégorie de modèles $\mathcal{M}$, si A est un objet cofibrant de $\mathcal{M}$, et X un objet fibrant de $\mathcal{M}$, alors l'ensemble des morphismes de A vers X dans $\mathbf{Ho}(\mathcal{M})$ s'identifie canoniquement à l'ensemble des classes d'homotopie de morphismes de A vers X dans $\mathcal{M}$ (i.e. on demande la version abstraite du théorème de Whitehead).
3. Pour toute catégorie de modèles homotopiquement complète et cocomplète[(4)] $\mathcal{M}$, et pour toute petite catégorie X, la catégorie des préfaisceaux $\mathcal{M}^{X^{op}}$ est canoniquement munie d'une structure de catégorie de modèles, et ce de sorte que, pour tout foncteur $u : X \longrightarrow Y$, le couple de foncteur adjoint
$$u_! : \mathcal{M}^{X^{op}} \rightleftarrows \mathcal{M}^{Y^{op}} : u^*$$
soit une adjonction de Quillen (i.e. de sorte que le théorème de Quillen, d'adjonction des foncteurs dérivés[(5)], s'applique au couple $(u_!, u^*)$).

Pour y parvenir, j'ai commencé par réduire le plus possible l'axiomatique des catégories de modèles. Une autre approche, due à K. S. Brown [**Bro73**], est celle des catégories d'objets fibrants. J'ai généralisé cette notion en introduisant la notion de *catégorie dérivable* à gauche[(6)]. La théorie des catégories dérivables généralise naturellement la théorie des catégories de modèles de Quillen, des catégorie de modèles de Thomason, et des catégories d'objets (co)fibrants de K. S. Brown.

Définition 2.1 **(**[**C3**, 1.1]**).** — Une *catégorie dérivable à gauche* est une catégorie $\mathcal{M}$, munie d'une classe d'équivalences faibles, et d'une classe de fibrations, et qui vérifie les axiomes suivants.

D0 La catégorie $\mathcal{M}$ a un objet final, noté $\star$. On appelle objets *fibrants* les objets X de $\mathcal{M}$ tels que la flèche $X \longrightarrow \star$ soit une fibration. Tout objet isomorphe à un objet fibrant est fibrant, et l'objet final de $\mathcal{M}$ est fibrant.

D1 Tout isomorphisme est une équivalence faible. Si dans un triangle commutatif de $\mathcal{M}$, deux des trois flèches sont des équivalences faibles, il en est de même de la troisième.

D2 Tout isomorphisme entre objets fibrants est une fibration. Les fibrations sont stables par composition. Pour toute fibration de but fibrant $X \longrightarrow Y$, et pour tout morphisme $Y' \longrightarrow Y$, avec Y' fibrant, le produit fibré $X' = Y' \times_Y X$ est représentable dans $\mathcal{M}$, et la projection $X' \longrightarrow Y'$ est une fibration.

D3 Le changement de base d'une fibration triviale de but fibrant par un morphisme entre objet fibrant est une fibration triviale (où on entend par fibration triviale tout morphisme qui est à la fois une fibration et une équivalence faible).

---

(4)Les notions de catégorie de modèles (y compris celles de Quillen et de Thomason ne formalise que les propriétés permettant de construire des (co)limites homotopiques finies. Il faut donc une hypothèse supplémentaire pour assurer l'existence de petites (co)limites arbitraires.

(5)Le théorème de Quillen a un sens et s'applique dans un cadre beaucoup plus général que celui des catégories de modèles de Quillen ; cf. [**Mal07**].

(6)J'ai appris plus tard que cette notion avait en fait déjà été essentiellement introduite par Anderson [**And78, And79**] ; cependant les travaux d'Anderson ont été très peu développés pas la suite. La terminologie "catégorie dérivable" provient du fait que ce sont des structures qui donnent lieu à des dérivateurs de Grothendieck.

D4 Tout morphisme de but fibrant u dans $\mathcal{M}$ admet une factorisation de la forme $u = pi$, où i est une équivalence faible, et p une fibration[(7)].

Si on note $\mathcal{M}_f$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$ formée des objets fibrants, il est immédiat que $\mathcal{M}_f$ est canoniquement munie d'une structure de catégorie d'objets fibrants. Une autre manière de formaliser la définition ci-dessus est que l'inclusion de $\mathcal{M}_f$ dans $\mathcal{M}$ est une structure de dérivabilité à droite d'Anderson-Brown-Cisinski ; voir [**KM08**, Définition 10.2]. En particulier, on a une équivalence de catégories homotopiques (cf. [**C3**, Proposition 1.8], ou encore [**KM08**, Proposition 10.8]) :

$$\mathbf{Ho}(\mathcal{M}_f) \simeq \mathbf{Ho}(\mathcal{M}) \, .$$

On peut donc utiliser les résolutions fibrantes dans $\mathcal{M}$ pour construire des foncteurs dérivés à droite (cela résulte formellement des travaux de Kahn et Maltsiniotis [**KM08**]).

Les catégories dérivables à gauche admettent des colimites homotopiques finies ; plus précisément, si $\mathcal{M}$ est une catégorie dérivable à gauche, le prédérivateur associé $\mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M})$ est un dérivateur à gauche sur la 2-catégorie des catégories directes finies (ou encore des ensembles ordonnés finis) ; cf. [**C3**, Théorème 2.21]. En outre, pour toute catégorie directe finie X, la catégorie des préfaisceaux $\mathcal{M}^{X^{op}}$ admet des structures naturelles de catégories dérivables ; cf. [**C3**, Théorème 1.30 et Corollaire 1.31]. J'ai ensuite dégagé des axiomes supplémentaires pour que ces résultats puissent s'étendre au cas des petites catégories quelconques.

Définition 2.2 **(**[**C3**, 6.16]**)**. — Une *catégorie dérivable à gauche $\mathcal{M}$* est *homotopiquement complète*[(8)] si elle vérifie les propriétés suivantes.

D5 Pour toute petite famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets fibrants de $\mathcal{M}$, le produit $\prod_{i\in I} X_i$ est représentable dans $\mathcal{M}$. Pour toute petite famille de fibrations de but fibrant $(p_i : X_i \longrightarrow Y_i)_{i\in I}$ dans $\mathcal{M}$, le morphisme produit

$$p : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow \prod_{i\in I} Y_i$$

est une fibration. Et si, en outre, tous les morphismes p_i sont des équivalences faibles, alors il est de même de p.

D6 Pour toute tour de fibrations (resp. de fibrations triviales) entre objets fibrants

$$\cdots \longrightarrow X_{n+1} \longrightarrow X_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \quad , \qquad n \geqslant 0 \, ,$$

la limite $X = \varprojlim_n X_n$ est représentable dans $\mathcal{M}$, et la projection $X \longrightarrow X_0$ est une fibration (resp. une fibration triviale).

Théorème 2.3 **(Rădulescu-Banu [RB06**, Theorem 10.3.2]**)**

Pour toute catégorie dérivable à gauche et homotopiquement complète $\mathcal{M}$, le prédérivateur $\mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M})$ est un dérivateur à gauche sur $\mathcal{C}at$.

---

(7) En particulier, il existe des résolutions firantes : pour tout objet X de $\mathcal{M}$, en appliquant l'axiome D4 à la flèche $X \longrightarrow \star$, on voit qu'il existe une équivalence faible $X \longrightarrow Y$, avec Y fibrant.

(8) Les catégories dérivables à gauche homotopiquement complètes sont appelées 'Anderson-Brown-Cisinski fibration categories', ou encore 'ABC fibration categories' dans [**RB06**].

Une fois établie la théorie des catégories dérivables (à gauche), on dispose de tous les outils pour une théorie des catégories de modèles.

Définition 2.4 ([**C3**, 5.17]). — Une *catégorie de modèles* est une catégorie $\mathcal{M}$, munie d'une classe d'équivalences faibles $\mathcal{W}$, d'une classe de fibrations Fib, et d'une classe de cofibrations Cof telle que

M1 $(\mathcal{M}, \mathcal{W}, \mathsf{Fib})$ est une catégorie dérivable à gauche ;

M2 $(\mathcal{M}, \mathcal{W}, \mathsf{Cof})$ est une catégorie dérivable à droite[(9)] ;

M3 Pour tout triplet de morphismes composables de $\mathcal{M}$

$$X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{f'} X'' \xrightarrow{f''} X''' ,$$

si $f'f$ et $f''f'$ sont des équivalences faibles, alors f est une équivalence faible[(10)].

M4 Pour tout carré commutatif de $\mathcal{M}$ de la forme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "b"'] & Y \end{tikzcd}$$

si i est une cofibration entre objets cofibrants, p une fibration entre objets fibrants, et si i ou p est une équivalence faible, alors il existe un relèvement l, c'est-à-dire un morphisme $l : B \longrightarrow X$ tel que $li = a$ et $pl = b$.

Les axiomes M1 et M2 assurent l'existence de colimites finies et de limites homotopiques finies (i.e. que $\mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M})$ est dérivateur sur les catégories directes finies). L'axiome M4 implique quant à lui le Théorème de Whitehead dans $\mathcal{M}$, c'est-à-dire :

Proposition 2.5 ([**C3**, Proposition 5.11]). — *Soient A un objet cofibrant, et X un objet fibrant dans une catégorie de modèles $\mathcal{M}$. Alors l'ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathcal{M})}(A, X)$ *s'identifie canoniquement aux classes d'homotopie de morphismes de A vers X dans $\mathcal{M}$.*

Il résulte immédiatement du Théorème 2.3 (et de sa version duale) que le Théorème 1.1 se généralise au cas des catégories de modèles au sens de la Définition 2.4 :

Théorème 2.6. — *Si $\mathcal{M}$ est une catégorie de modèles homotopiquement complète et cocomplète, alors $\mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M})$ est un dérivateur sur $\mathcal{C}at$.*

---

(9) Cela signifie simplement que $(\mathcal{M}^{op}, \mathcal{W}, \mathsf{Cof})$ est une catégorie dérivable à gauche.

(10) Une catégorie dérivable (à gauche ou à droite) vérifie l'axiome M3 si et seulement si elle est fortement saturée (ce qui signifie qu'une flèche de $\mathcal{M}$ est une équivalence faible si et seulement si son image dans la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}(\mathcal{M})$ est un isomorphisme) ; cela résulte facilement de [**C3**, Lemme 2.17]. Sous les axiomes M1, M2, et M4, on peut en fait toujours se ramener au cas où M3 est vérifié sans pour autant changer la théorie homotopique définie par $\mathcal{M}$ (i.e. le dérivateur $\mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M})$) ; voir [**C3**, Proposition 5.16]. On peut donc sans danger ajouter l'axiome M3 sans perdre de généralité. Les catégories de modèles de Quillen qui ne sont pas fermées produisent des exemples de catégories qui ne vérifient que M1, M2 et M4.

Mais, contrairement au cas des catégories de modèles au sens de Quillen, on a aussi l'énoncé suivant.

Théorème 2.7 **([C3**, Théorème 6.22 et Corollaire 6.20]**).** — *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie de modèles homotopiquement complète et cocomplète.*

(a) *Pour toute petite catégorie X, la catégorie des préfaisceaux $\mathcal{M}^{X^{op}}$ est une catégorie de modèles homotopiquement complète et cocomplète dont les équivalences faibles sont les équivalences faibles argument par argument, et les cofibrations, les cofibrations par arguments. En outre, les fibrations sont toutes des fibrations argument par argument.*

(b) *Si en outre $\mathcal{M}$ admet des petites limites projectives*[11]*, alors pour tout foncteur entre petites catégories $u : X \longrightarrow Y$, le couple de foncteurs adjoint*

$$u^* : \mathcal{M}^{Y^{op}} \rightleftarrows \mathcal{M}^{X^{op}} : u_*$$

est une adjonction de Quillen[12].

On retrouve ainsi (et on généralise) la théorie de Thomason telle qu'elle est présentée dans [**Wei01**].

Corollaire 2.8 **(Thomason).** — *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie de modèles au sens de Thomason homotopiquement complète et cocomplète* [13]. *Alors pour toute petite catégorie X, la catégorie des préfaisceaux $\mathcal{M}^{X^{op}}$ est une catégorie de modèles de Thomason homotopiquement complète et cocomplète, dont les équivalences faibles sont les équivalences faibles argument par argument, et les cofibrations, les cofibrations par arguments. En outre, les fibrations sont toutes des fibrations argument par argument.*

3. Équivalences dérivées et K-théorie de Waldhausen

Le fait que la K-théorie soit invariante par par équivalences dérivées est déjà suggéré par le Théorème de résolution et le Théorème de dévissage prouvés par Quillen [**Qui73**]. Le Théorème d'approximation de Waldhausen [**Wal85**] va aussi dans cette voie. Cette propriété de la K-théorie est explicitement dégagé par Thomason et Trobaugh [**TT90**] dans le cadre de la K-théorie des catégories de Waldhausen compliciales. Par la suite, cette propriété a été étudiée par Dugger et Shipley [**DS04**] dans le cas d'une équivalence induite par une équivalence de Quillen entre catégories de modèles fermée au sens de Quillen. Toën et Vezzosi [**TV04**] ont étudié l'invariance de la K-théorie par équivalence de Dwyer-Kan, ainsi que Blumberg et Mandell [**BM07**]. Les résultats de [**C4**] généralisent tous les résultats cités ci-dessus. Nous allons en

(11) On peut éviter cette hypothèse, mais l'énoncé devient un peu plus fastidieux à écrire. Le couple de foncteur adjoint (u^*, u_*) est seulement partiellement défini ($u_*(F)$ n'est bien défini en général que sur les objets fibrants F de $\mathcal{M}^{X^{op}}$), et on a une "adjonction de Quillen partiellement définie" qui donne lieu à une adjonction des foncteurs dérivés (qui, elle, est bien définie partout).

(12) On démontre que, même si $\mathcal{M}$ n'admet pas de limites projectives, le foncteur u_* est toujours défini sur les objets fibrants, et qu'il respecte toujours les fibrations et les fibrations triviales.

(13) Nous renvoyons à [**C3**, 5.18] pour les axiomes d'une catégorie de modèles de Thomason. Les axiomes considérés dans *loc. cit.* sont exactement ceux de Thomason, à ceci près que les axiomes de factorisation ne requièrent aucune sorte de fonctorialité.

présenter l'ingrédient clé : une étude précise des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un foncteur exact entre catégories dérivables (à gauche ou à droite) induise une équivalence de catégories homotopique. Cela permet de démontrer l'invariance de la K-théorie de Waldhausen par équivalences dérivées avec un degré de généralité très grand.

Un foncteur entre catégories dérivables à droite

$$F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$$

est *exact à droite* s'il préserve les cofibrations, les cofibrations triviales, et l'objet initial, et si pour tout carré cocartésien de $\mathcal{M}$ de la forme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & A' \arrow[d, "i'"] \\ B \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$$

avec i une cofibration entre objets cofibrants et A' cofibrant, le carré

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r] \arrow[d, "F(i)"'] & F(A') \arrow[d, "F(i')"] \\ F(B) \arrow[r] & F(B') \end{tikzcd}$$

est cocartésien dans $\mathcal{M}'$. Tout foncteur exact à droite F admet un foncteur dérivé total à gauche

$$\mathbf{L}F : \mathbf{Ho}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{M}')\,.$$

Un tel foncteur a la *propriété d'approximation* s'il vérifie en outre les deux conditions ci-dessous.

AP1 Tout morphisme de $\mathcal{M}$ entre objets cofibrants dont l'image par F est une équivalence faible de $\mathcal{M}'$ est une équivalence faible de $\mathcal{M}$.

AP2 Si $p : F(X) \longrightarrow Y$ est un morphisme de $\mathcal{M}'$, avec X et Y cofibrants, il existe une équivalence faible de but cofibrant $v : Y \longrightarrow Y'$, un morphisme de but cofibrant $u : X \longrightarrow X'$, et une équivalence faible $p' : F(X') \longrightarrow Y'$ tels que le carré suivant commute dans $\mathcal{M}'$.

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "F(u)"'] & Y \arrow[d, "v"] \\ F(X') \arrow[r, "p'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

Un foncteur (exact à droite) a la *propriété d'approximation forte* s'il a la propriété d'approximation, et si en outre, dans la condition AP2, on peut imposer que $Y = Y'$ et que v soit l'identité de Y.

Théorème 3.1 (**[C3**, Théorème 3.12]). — *Soit $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ un foncteur exact à droite ayant la propriété d'approximation. Alors le morphisme de dérivateurs dérivé* *à gauche*

$$\mathbf{L}F : \mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M}')$$

est une équivalence de dérivateurs à droite (sur les catégories directes finies). En particulier, le foncteur dérivé total à gauche

$$\mathbf{L}F : \mathbf{Ho}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{M}')$$

est une équivalence de catégories homotopiques.

Une catégorie dérivable à droite $\mathcal{M}$ est *fortement saturée* si toute flèche de $\mathcal{M}$ qui est inversible dans $\mathbf{Ho}(\mathcal{M})$ est une équivalence faible. Cette hypothèse supplémentaire est assez anodine : si $\mathcal{M}$ est une catégorie dérivable à droite, on définie une nouvelle catégorie dérivable à droite $\overline{\mathcal{M}}$ comme suit : la catégorie sous-jacente à $\overline{\mathcal{M}}$ est simplement $\mathcal{M}$, les cofibrations de $\overline{\mathcal{M}}$ sont celles de $\mathcal{M}$, et les équivalences faibles de $\overline{\mathcal{M}}$ sont les morphismes de $\mathcal{M}$ qui sont inversibles dans $\mathbf{Ho}(\mathcal{M})$. Cela définit bien une catégorie dérivable à droite (voir [**C3**, Proposition 3.16]), et il est clair que $\overline{\mathcal{M}}$ est fortement saturée. Essentiellement par définition, on a aussi l'égalité

$$\mathbf{Ho}(\mathcal{M}) = \mathbf{Ho}(\overline{\mathcal{M}})\,.$$

De plus tout foncteur exact à droite

$$F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$$

induit un foncteur exact à droite

$$\overline{F} : \overline{\mathcal{M}} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}'\,.$$

Théorème 3.2 ([**C3**, Théorème 3.19]). — *Un foncteur exact à droite entre catégories dérivables à droites fortement saturées induit une équivalence de catégories homotopiques*

$$\mathbf{L}F : \mathbf{Ho}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Ho}(\mathcal{M}')$$

si et seulement s'il a la propriété d'approximation.

Cette caractérisation des équivalences de catégories homotopiques permet de démontrer l'invariance de la K-théorie par équivalences dérivées. Autrement dit, on a l'énoncé suivant.

Théorème 3.3 ([**C4**, Théorème 2.14]). — *Soit $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ un foncteur exact à droite entre catégories de Waldhausen dérivables*[14] *fortement saturées. Si le foncteur induit*

$$F = \mathbf{L}F : \mathbf{Ho}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{M}')$$

est une équivalence de catégories, alors le morphisme

$$K(F) : K(\mathcal{M}) \longrightarrow K(\mathcal{M}')$$

[14] Ce par quoi on entend des catégories dérivables à droite dont tous les objets sont cofibrants, et qui on un objet nul (i.e. à la fois initial et final).

est une équivalence faible. En particulier, le foncteur F induit alors des isomorphismes de groupes

$$K_i(\mathcal{M}) \simeq K_i(\mathcal{M}') \ , \quad i \geqslant 0 \, .$$

Suivant une stratégie déjà éprouvée par Thomason et Trobaugh pour le cas particulier des catégories de Waldhausen compliciales, la preuve de ce résultat consiste à montrer que la propriété d'approximation suffit pour induire un isomorphisme en K-théorie. On commence par le cas particulier d'un foncteur ayant la propriété d'approximation forte : c'est très précisément le Théorème d'approximation de Waldhausen [**Wal85**] (dont la preuve se trouve grandement simplifiée dès que l'on dispose de la notion de colimite homotopique, comme cela est fait dans [**C4**, Proposition 10]). Ensuite, on construit explicitement une factorisation du foncteur F de la forme

$$\mathcal{M} \xrightarrow{F'} \mathcal{M}'' \xrightarrow{F''} \mathcal{M}' \ , \quad F = F'' \circ F' \, ,$$

où $\mathcal{M}''$ est une catégorie de Waldhausen fortement saturée, et où F' et F'' sont des foncteurs exact à droite vérifiant les conditions suivantes.

(1) Le foncteur F'' a la propriété d'approximation forte.

(2) Il existe un foncteur $S : \mathcal{M}'' \longrightarrow \mathcal{M}$ tel que $SF' = 1_{\mathcal{M}}$, et un foncteur exact à droite $G : \mathcal{M}'' \longrightarrow \mathcal{M}''$, ainsi que des équivalences faibles

$$X'' \longrightarrow G(X'') \longleftarrow F'(S(X''))$$

naturelles en X''.

La condition (2) implique immédiatement que le foncteur F'' induit une équivalence de catégories homotopique et une équivalence en K-théorie. On est bien ramené ainsi par la propriété (1) au cas du Théorème d'approximation de Waldhausen.

Une fois le Théorème 3.3 dégagé, on peut en étudier des raffinements : relation avec la localisation de Dwyer-Kan, extension de la fonctorialité aux foncteurs homotopiquement exacts. C'est ce qui est fait dans [**C4**], où l'on retrouve et étend les résultats de [**TV04, BM07**]. Cela peut se résumer via l'énoncé suivant :

Théorème 3.4 ([**C4**, Théorème 3.20]). — *Un foncteur exact à droite entre catégories de Waldhausen dérivables $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ induit une équivalence de catégories $\mathbf{Ho}(\mathcal{M}) \simeq \mathbf{Ho}(\mathcal{M}')$ si et seulement s'il induit une équivalence de catégories simpliciales entre les localisées de Dwyer-Kan correspondantes.*

4. La topologie algébrique comme objet universel

La notion de dérivateur permet de caractériser certaines catégories homotopiques par des propriétés universelles.

Par exemple, si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, on peut lui associer un dérivateur $\mathbb{D}^b(A)$, obtenu comme le dérivateur (défini sur les catégories directes finies) associé à la catégorie dérivable des complexes bornés sur $\mathcal{A}$ (dont les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes). On peut voir $\mathcal{A}$ comme un dérivateur (en définissant $\mathcal{A}(X)$

comme la catégorie des préfaisceaux sur X à valeurs dans $\mathcal{A}$), et on dispose d'un morphisme de dérivateurs canonique

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}^b(\mathcal{A})\,.$$

Il résulte formellement des travaux de B. Keller [**Kel91**] que ce morphisme est le morphisme de dérivateurs universel vers un dérivateur triangulé qui envoie les suites exactes courtes de $\mathcal{A}$ sur des triangles distingués. Cet exemple montre que le dérivateur associé à une catégorie abélienne vérifie la propriété universelle qui fait défaut à sa catégorie dérivée.

On peut décrire la théorie de l'homotopie des CW-complexes de manière analogue : encore faut-il dégager la propriété universelle adéquate. On procède par analogie avec la théorie des catégories : la théorie de l'homotopie des CW-complexes est aux dérivateurs ce que la catégorie des ensembles est à la théorie des catégories. On peut en effet décrire la catégorie des ensembles comme la catégorie engendrée par limites inductives sur le point. Autrement dit, étant donnée une catégorie $\mathcal{C}$ admettant des limites inductives, se donner un objet X de $\mathcal{C}$ équivaut à se donner un foncteur

$$F : \mathcal{E}ns \longrightarrow \mathcal{C}$$

qui commute aux limites inductives et qui envoie l'ensemble à un élément e sur l'objet X : le foncteur F est (à isomorphisme canonique près) le foncteur qui envoie un ensemble E sur $\amalg_E X$). De manière encore plus précise, on a donc une équivalence de catégories

$$\mathcal{H}om_!(\mathcal{E}ns, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}\ , \quad F \longmapsto F(e)\,,$$

de la catégorie des foncteurs $F : \mathcal{E}ns \longrightarrow \mathcal{C}$ qui commutent aux limites inductives, vers la catégorie $\mathcal{C}$, définie en évaluant sur l'ensemble à un élément e. Cette équivalence s'explique par le fait élémentaire que tout ensemble est une limite inductive (en fait, une somme) de copies de l'ensemble à un élément.

Le fait que la théorie de l'homotopie des CW-complexes puisse jouer un rôle analogue à la catégorie des ensembles est suggéré par le fait que tout CW-complexe est localement contractile. En effet, si X est un espace topologique localement contractile, on peut lui associer l'ensemble de ses ouverts contractiles $O_c(X)$, ordonné par l'inclusion. On dispose d'un foncteur

$$O_c(X) \longrightarrow \mathcal{T}op\ , \quad U \longmapsto U\,,$$

et d'un morphisme

$$\underset{U \in O_c(X)}{\operatorname{hocolim}}\, U \longrightarrow X$$

qui s'avère être une équivalence d'homotopie faible. Les éléments de $O_c(X)$ ayant le type d'homotopie du point, on voit de cette manière que X est la colimite homotopique du foncteur constant de valeur e indexée par l'ensemble ordonné $O_c(X)$. On déduit de cela deux informations (qui sont en fait une reformulation l'une de l'autre) : le type d'homotopie d'un CW-complexe peut être obtenu par recollement (i.e. colimite homotopique) d'espaces constractiles, et tout CW-complexe a le type d'homotopie du classifiant d'une petite catégorie (et même d'un ensemble ordonné). Cela conforte l'idée que la théorie de l'homotopie des CW-complexes puisse définir un analogue homotopique de la théorie des ensembles, et cela suggère naturellement que la théorie de l'homotopie des CW-complexes peut être décrite à partir de la théorie de l'homotopie des petites catégories.

La catégorie des petites catégories est une catégorie de modèles pour les types d'homotopie de CW-complexes (on dispose même de la structure de catégorie de modèles fermée définie par Thomason [**Tho80, C5**]). Cela définit un dérivateur $\mathbb{Hot} = \mathbb{Ho}(\mathcal{C}at)$. D'autre part, le foncteur qui associe à une petite catégorie C son espace classifiant BC induit une équivalence de dérivateurs

$$\mathbb{Hot} \simeq \mathbb{Ho}(\mathcal{T}op)$$

(où $\mathcal{T}op$ désigne la catégorie de modèles des espaces topologiques, avec pour équivalences faibles, les équivalences d'homotopie faibles).

Pour deux dérivateurs donnés $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$, on note $\mathcal{H}om(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$ la catégorie des morphismes de dérivateurs (i.e. des pseudo-morphismes de 2-foncteurs). On note $\mathcal{H}om_!(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}om(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$ formée des morphismes $\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$ qui commutent aux colimites homotopiques (i.e. qui commutent aux foncteurs de type $u_!$ pour un foncteur $u : X \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{C}at$). On a alors le

Théorème 4.1 **([C2])**. — *Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur (défini sur $\mathcal{C}at$). Le foncteur*

$$\mathcal{H}om_!(\mathbb{Hot}, \mathbb{D}) \longrightarrow \mathbb{D}(e) \ , \quad F \longmapsto F(e) \, ,$$

défini en associant à un morphisme de dérivateurs commutant aux colimites homotopiques, $F : \mathbb{Hot} \longrightarrow \mathbb{D}$, l'objet $F(e)$ (où e désigne la catégorie finale), est une équivalence de catégories.

En particulier, les auto-équivalences de $\mathbb{Hot}$ sont les objets finaux de la catégorie $\mathcal{H}om_!(\mathbb{Hot}, \mathbb{Hot})$, ce qui implique que toute auto-équivalence de $\mathbb{Hot}$ est canoniquement isomorphe à l'identité.

Dans le cas où $\mathbb{D} = \mathbb{Ho}(\mathcal{M})$ pour une catégorie de modèles $\mathcal{M}$, la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}(\mathcal{M})$ n'est autre que $\mathbb{D}(e)$, et on a donc une équivalence de catégories

$$\mathcal{H}om_!(\mathbb{Hot}, \mathbb{Ho}(\mathcal{M})) \simeq \mathbf{Ho}(\mathcal{M}) \, .$$

Ce théorème est une conséquence de la description axiomatique de la classe des équivalences faibles de $\mathcal{C}at$ conjecturée par Grothendieck dans la *Poursuite des Champs*, et démontrée dans [**C8, C9**] : la classe des équivalences faibles de $\mathcal{C}at$ est le plus petit localisateur fondamental. Cela signifie que c'est la plus petite classe de flèches $\mathcal{W}$ vérifiant :

LF1 La classe $\mathcal{W}$ contient les identité ; si dans un triangle commutatif, deux morphismes sur les trois sont dans $\mathcal{W}$, il est de même du troisième ; si $i : A \longrightarrow B$ et $r : B \longrightarrow A$ sont deux foncteurs tels que $ri = 1_A$ et $ir \in \mathcal{W}$, alors $i \in \mathcal{W}$.

LF2 Si A est une petite catégorie avec un objet final, alors elle est asphérique (i.e. me foncteur $A \longrightarrow e$ est dans $\mathcal{W}$).

LF3 Étant donné un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & B \arrow[dl, "q"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

si u est dans $\mathcal{W}$ localement au-dessus de C, alors u est dans C (cela signifie que si, pour tout objet c de C, le foncteur

$$u/c : A/c \longrightarrow B/c$$

est dans $\mathcal{W}$, il en est de même de u).

Le point essentiel pour démontrer le Théorème 4.1 est la construction d'un foncteur

$$\mathbb{D}(e) \longrightarrow \mathcal{H}om_!(\mathbb{H}\mathrm{ot}, \mathbb{D})$$

qui soit un bon candidat pour être un quasi-inverse du foncteur d'évaluation en e. L'idée de la construction est la suivante. Étant donné un objet F de $\mathbb{D}(e)$, on construit un foncteur

$$F_! : \mathcal{C}at \longrightarrow \mathbb{D}(e)$$

en associant à une petite catégorie C la colimite homotopique du diagramme constant de valeur F indexé par C. autrement dit, on pose

$$F_!(C) = p_! p^*(F) \,,$$

où $p : C \longrightarrow e$ désigne le foncteur de C vers la catégorie finale. Cette construction se généralise comme suit. Pour chaque petite catégorie X, on a un foncteur

$$F_! : \mathcal{C}at^{X^{op}} \longrightarrow \mathbb{D}(X)$$

défini par la formule

$$F_!(C) = p_! q^*(F) \,,$$

où, $p : \int C \longrightarrow X$ est la fibration de Grothendieck associée à C, et $q : \int C \longrightarrow e$ l'unique foncteur possible. Toute la difficulté de cette construction consiste à démontrer que le foncteur $F_! : \mathcal{C}at \longrightarrow \mathbb{D}(e)$ envoie les équivalences faibles sur des isomorphismes. Pour cela, on démontre ensuite, par des argument de fonctorialité, que la classe des morphismes de $\mathcal{C}at$ qui sont envoyés sur des isomorphismes par $F_!$ forme un localisateur fondamental, et comme la classe des équivalences faibles est le plus petit des localisateurs fondamentaux, on obtient bien la compatibilité du foncteur $F_!$ aux équivalences faibles de $\mathcal{C}at$. On arrive de la sorte à un morphisme de prédérivateurs

$$F_! : \mathbb{H}\mathrm{ot} \longrightarrow \mathbb{D} \,,$$

et il reste à vérifier que ce dernier commute aux colimites homotopiques, ce qu'on démontre en utilisant la description des colimites homotopiques dans $\mathcal{C}at$ en termes de constructions de Grothendieck ; voir [**Tho79, Mal05**]. On a ainsi construit un foncteur $F \longmapsto F_!$ qui est un quasi-inverse du foncteur d'évaluation en e.

Le Théorème 4.1 se généralise naturellement. Le fait que la catégorie des ensembles soit la catégorie admettant des limites inductives engendrée par le point est un cas particulier du fait que, pour toute petite catégorie A, la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur A est la catégorie admettant des limites inductives engendrée par A. Autrement dit, le plongement de Yoneda $A \longrightarrow \widehat{A}$ est le foncteur universel de A vers une catégorie admettant des limites inductives. L'analogue en termes de dérivateurs se formule comme suit (on désigne par $\mathbb{H}\mathrm{ot}_A$ le dérivateur défini par $\mathbb{H}\mathrm{ot}_A(X) = \mathbb{H}\mathrm{ot}(A \times X)$, ou encore, de manière équivalente, le dérivateur associé à la catégorie de modèles $\mathcal{C}at^{A^{op}}$ en considérant les équivalences faibles argument par argument).

Théorème 4.2 **([C2]).** — *Le plongement de Yoneda* $A \longrightarrow \mathbb{H}\mathrm{ot}_A$ *est le morphisme de prédérivateur universel de* A *vers un dérivateur. Autrement dit, pour tout dérivateur* $\mathbb{D}$*, le foncteur de composition avec le plongement de Yoneda*

$$\mathcal{H}om_!(\mathbb{H}\mathrm{ot}_A, \mathbb{D}) \longrightarrow \mathbb{D}(A^{op})$$

est une équivalence de catégories.

Ce théorème admet admet des variations. On peut par exemple caracatériser la théorie homotopique des spectres par une propriété universelle. Si Sp désigne la catégorie de modèles stable des S^1-spectres (symétriques ou non) d'ensembles simpliciaux, et si on note

$$\mathbb{S}\mathbb{H}\mathrm{ot}_A = \mathbb{H}\mathrm{o}(Sp^{A^{op}})\,,$$

on peut démontrer que le foncteur de suspension infinie

$$\Sigma^\infty : \mathbb{H}\mathrm{ot}_A \longrightarrow \mathbb{S}\mathbb{H}\mathrm{ot}_A$$

est le morphisme de dérivateurs commutant aux colimites homotopiques universel de $\mathbb{H}\mathrm{ot}_A$ vers un dérivateur triangulé (cela se démontre à partir de la construction, par Heller [**Hel97b**], d'un dérivateur triangulé universel associé à $\mathbb{H}\mathrm{ot}_A$, et de l'identification de ce dérivateur triangulé universel à $\mathbb{S}\mathbb{H}\mathrm{ot}_A$; cf. [**Tab07**]). On en déduit immédiatement, par le Théorème 4.2, le

Corollaire 4.3. — *Pour tout dérivateur triangulé* $\mathbb{D}$*, on a une équivalence de catégories canonique*

$$\mathcal{H}om_!(\mathbb{S}\mathbb{H}\mathrm{ot}_A, \mathbb{D}) \simeq \mathbb{D}(A^{op})$$

La théorie des dérivateurs permet par ailleurs de comprendre de manière conceptuelle la notion de *localisation de Bousfield.*

Définition 4.4 **([C11]).** — Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur (défini sur $\mathcal{C}at$, pour fixer les idées), et soit S une classe de flèches de la catégories $\mathbb{D}(e)$. Une *localisation de Bousfield à gauche* de $\mathbb{D}$ par S est un morphisme de dérivateurs

$$\gamma : \mathbb{D} \longrightarrow L_S\mathbb{D}$$

qui commute aux colimites homotopiques, et tel que le foncteur induit

$$\gamma(e) : \mathbb{D}(e) \longrightarrow L_S\mathbb{D}(e)$$

envoie les éléments de S sur des isomorphismes de $L_S\mathbb{D}(e)$, et qui est universel pour cela ; i.e. tel que pour tout dérivateur $\mathbb{D}'$, le foncteur de composition avec γ induise une équivalence de catégories

$$\mathcal{H}om_!(L_S\mathbb{D}, \mathbb{D}') \simeq \mathcal{H}om_{!,S}(\mathbb{D}, \mathbb{D}')\,,$$

où $\mathcal{H}om_{!,S}(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$ désigne la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}om(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$ formée des morphismes de dérivateurs qui commutent aux colimites homotopiques et envoient les éléments de S sur des isomorphismes.

Théorème 4.5 (**[C11, Tab07]**). — *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie de modèles cellulaire au sens de Hirschhorn* [**Hir03**] *(ou encore une catégorie de modèles combinatoire au sens de J. Smith* [**Bek00**]*), et soit S un petit ensemble de flèches de $\mathcal{M}$. On désigne par $L_S\mathcal{M}$ la localisation de Bousfield à gauche de $\mathcal{M}$ par S. Le foncteur de Quillen à gauche canonique*

$$\mathcal{M} \longrightarrow L_S\mathcal{M}$$

induit un morphisme de dérivateurs

$$\mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{H}\mathrm{o}(L_S\mathcal{M})$$

qui est une localisation de Bousfield à gauche du dérivateur $\mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M})$ par S (où, par abus, on note encore S l'image de S dans $\mathbf{Ho}(\mathcal{M}) = \mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M})(e)$). En particulier, on a une équivalence de dérivateurs canonique

$$L_S\mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M}) \simeq \mathbb{H}\mathrm{o}(L_S\mathcal{M})\,.$$

Ces énoncés permettent d'interpréter les résultats de Dugger [**Dug01b, Dug01a**] : les dérivateurs équivalents à des dérivateurs de la forme $\mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{M})$ pour une catégorie de modèles combinatoire $\mathcal{M}$ sont les localisations de Bousfield à gauche de dérivateurs de la forme $\mathbb{H}\mathrm{ot}_C$ pour une petite catégorie C. Les théorèmes 4.2 et 4.2 sont aussi des outils fondamentaux dans le travail de Tabuada [**Tab07**], pour comprendre la propriété universelle de la K-théorie parmis les invariants des catégories différentielles graduées. Ils permettent aussi de formuler et de démontrer une théorie de Galois topologique supérieure [**C12**].

En guise de conclusion pour cette première partie, et pour faire le lien avec la suite de ce texte, je propose une démonstration amusante du Théorème de de Rham.

Considérons la catégorie $\mathcal{D}\!\mathit{iff}$ des variétés différentielles réelles, munie de la topologie de Grothendieck définie par les recouvrements ouverts. Soit $\mathcal{D}$ le topos des faisceaux simpliciaux sur $\mathcal{D}\!\mathit{iff}$. La catégorie $\mathcal{D}$ est munie de la structure de catégorie de modèles fermée de Joyal ; voir [**Jar87, Jar96, C6**]. Soit S l'ensemble des projections de la forme

$$X \times \mathbb{R} \longrightarrow X\,,$$

X étant un variété différentielle. On obtient alors un dérivateur

$$L_S\mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{D}) \simeq \mathbb{H}\mathrm{o}(L_S\mathcal{D})\,.$$

D'autre part, le couple $(\mathcal{D}\!\mathit{iff}, \mathbb{R})$ est un site avec intervalle au sens de Morel et Voevodsky [**MV99**], et $L_S\mathcal{D}$ n'est autre que la catégorie de modèles correspondante ; voir le Théorème 2.21 de *loc. cit.*. Notons

$$\mathbb{H}\mathrm{ot}^{\mathit{diff}} = L_S\mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{D})\,.$$

Une variante de [**Rio07**, Théorème 5.12] (ou bien encore la théorie des topos test développée dans [**C7**]) nous dit que

$$\mathbb{H}\mathrm{ot} \simeq \mathbb{H}\mathrm{ot}^{\mathit{diff}}$$

(et le Théorème 4.1 nous assure qu'il n'est pas vraiment indispensable d'expliciter cette équivalence : elle correspond nécessairement à l'objet final de $\mathbb{H}\mathrm{ot}^{\mathit{diff}}$).

Soit $\mathbb{D}(\mathcal{Ab})$ le dérivateur associé à la catégorie de modèles des complexes de groupe abéliens (dont les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes). La cohomologie de de Rham des faisceaux simpliciaux, définie par la formule

$$\mathbf{R}\Gamma(\mathscr{X}, \Omega^*_{dR}) = \mathrm{holim}_n \mathbf{R}\Gamma(\mathscr{X}_n, \Omega^*_{dR})$$

(où Ω^*_{dR} désigne le faisceau du complexe des formes différentielles sur le site $\mathcal{Diff}$), définit un morphisme de dérivateurs qui commute aux colimites homotopiques

$$\mathbb{H}\mathrm{o}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathcal{Ab})^{op} .$$

Le lemme de Poincaré et le Théorème 4.5 impliquent alors que la cohomologie de de Rham définit un morphisme de dérivateurs qui commute aux colimites homotopiques

$$DR : \mathbb{H}\mathrm{o}\mathfrak{t}^{diff} \longrightarrow \mathbb{D}(\mathcal{Ab})^{op} .$$

La cohomologie singulière à coefficients dans (l'anneau discret) $\mathbb{R}$ définit quant à elle un morphisme de dérivateurs qui commute aux colimites homotopiques

$$Sing_{\mathbb{R}} : \mathbb{H}\mathrm{o}\mathfrak{t}^{diff} \longrightarrow \mathbb{D}(\mathcal{Ab})^{op} .$$

Or on a immédiatement l'égalité $DR(pt) = Sing_{\mathbb{R}}(pt)$, et par conséquent, en vertu du Théorème 4.1, Les morphismes DR et $Sing_{\mathbb{R}}$ sont canoniquement isomorphes dans $\mathcal{Hom}_!(\mathbb{H}\mathrm{o}\mathfrak{t}^{diff}, \mathbb{D}(\mathcal{Ab})^{op})$. Cette preuve montre en outre que cet isomorphisme de comparaison est l'unique morphisme qui induit l'identité lorsqu'on l'évalue sur le point. Le même argument vaut bien entendu en remplaçant la catégorie des variétés différentielles par la catégorie des variétés analytiques complexes, et en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

PARTIE II
RÉALISATIONS DES MOTIFS MIXTES

5. Cohomologies de Weil mixtes

La notion de cohomologie de Weil a été introduite par Grothendieck : ce sont les cohomologies définies pour les variétés algébriques projectives et lisses sur un corps donné k qui vérifient assez de bonnes propriétés[15] pour pouvoir comprendre les fonctions L (comme la fonction zêta associée aux varétés sur un corps fini via l'endomorphisme de Frobenius). La cohomologie ℓ-adique ($\ell \neq car(k)$) en est un exemple, mais on en trouve beaucoup d'autres : la cohomologie de Betti et la cohomologie de de Rham sont d'autres exemples (pour $car(k) = 0$), et la cohomologie cristalline en est un autre (pour $car(k) > 0$). Les cohomologies de Weil correspondent exactement aux foncteurs monoïdaux symétriques exacts de la catégorie des motifs purs

[15] Ces propriétés sont essentiellement : existence d'une classe de cycles, formule de Künneth, dualité de Poincaré.

de Grothendieck vers la catégorie des espaces vectoriels sur un corps de caractéristique nulle. Une partie des Conjectures Standards de Grothendieck se reformule en disant que la catégorie des motifs purs est une catégorie tannakienne. Cette dernière propriété assurerait que les cohomologies de Weil seraient des foncteurs fibres d'une catégorie tannakienne, et donc seraient toutes isomorphes (à extension des scalaires près). Ce problème de l'existence systématique d'isomorphismes de comparaison entre les cohomologie de Weil est l'un des point de départ de la théorie des motifs.

Nous renvoyons le lecteur par exemple à l'ouvrage d'Y. André [**And04**] pour un exposé de synthèse sur cette théorie.

La catégorie des motifs purs définie par Grothendieck se plonge conjecturalement dans la catégorie abélienne des motifs mixtes. Cette dernière reste totalement à définir, mais nous disposons d'un bon candidat pour être la catégorie dérivée (bornée) de la catégorie abélienne des motifs mixtes : c'est la catégorie triangulée $DM_{gm}(k)$ construite et étudiée par Voevodsky [**VSF00**]. Une notion naturelle de cohomologie de Weil mixte serait la notion de foncteur monoïdal symétrique exact de la catégorie des motifs mixtes vers la la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps de caractéristique nulle. Une variante dérivée serait donc la notion de foncteur monoïdal triangulé de la catégorie $DM_{gm}(k)$ vers la catégorie dérivée (éventuellement bornée) de la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps de caractéristique nulle. C'est en suivant cette intuition que nous avons introduit dans [**CD2**] la notion de cohomologie de Weil mixte, avec le parti pris de décrire cette notion dans le cadre de la théorie de l'homotopie des schémas de Morel et Voevodsky.

Soit S un schémas régulier, noethérien, et de dimension de Krull finie[16], et soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. On considère un préfaisceau de $\mathbb{K}$-algèbres différentielles graduées commutatives (au sens gradué) sur la catégorie des S-schémas affines lisses, noté E.

On note $H^n(X,E) = H^n(E(X))$ pour tout entier n et tout S-schéma affine lisse X. Étant donné un S-schéma affine et lisse X et un sous-schéma fermé Z de X, on note pour tout entier n :

$$H^n_Z(X,E) = H^{n-1}\big(\mathrm{Cone}(E(X) \longrightarrow E(X-Z))\big)\,.$$

Définition 5.1. — On dit que E est une *cohomologie de Weil mixte* si les axiomes suivants sont vérifiés.

Dimension. — $\dim_{\mathbb{K}} H^n(S,E) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Homotopie. — $\dim_{\mathbb{K}} H^n(\mathbb{A}^1_S,E) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Stabilité. — $\dim_{\mathbb{K}} H^n(\mathbb{G}_m,E) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0,1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

[16] Les cas qui vont nous intéresser particulièrement sont celui d'un corps et celui d'un anneau de valuation discrète complet d'inégale caractéristique.

Excision étale. — Pour tout carré cartésien de S-schémas

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "i"'] & X \end{tikzcd}$$

avec i immersion fermée, X, Y, $X-Z$ et $Y-T$ affines et lisses, le morphisme f étant étale et tel que $f^{-1}(X-Z) = Y-T$ et g soit un isomorphisme, l'application canonique

$$H^i_T(Y,E) \longrightarrow H^i_Z(X,E)$$

est bijective.

Formule Künneth. — Pour tous S-schémas affines et lisses X et Y, et pour tout entier n, l'application induite par le cup produit

$$\bigoplus_{p+q=n} H^p(X,E) \otimes_{\mathbb{K}} H^q(Y,E) \longrightarrow H^n(X \times_S Y, E)$$

est bijective.

Il résulte d'une variante du Théorème de Brown-Gersten, prouvée par Morel et Voevodsky [**MV99**], que l'axiome d'excision étale implique une propriété de descente pour la topologie Nisnevich[17] : pour tout S-schéma affine lisse X, le morphisme canonique

$$H^i(X,E) \longrightarrow H^i_{Nis}(X, E_{Nis})$$

est un isomorphisme (où E_{Nis} désigne le complexe de faisceaux Nisnevich associé au préfaisceau E, et $H^i_{Nis}(X,C)$ le i-ème groupe d'hypercohomologie de X à coefficient dans un complexe de faisceaux Nisnevich C). On définit

$$H^i(X,E) = H^i_{Nis}(X, E_{Nis})$$

pour tout S-schéma lisse X et tout entier i (ce qui a un sens, car, tout S-schéma lisse étant localement affine lisse pour la topologie de Nisnevich, le foncteur de restriction de la catégorie des faisceaux Nisnevich sur le site des S-schémas lisses vers la catégorie des faisceaux Nisnevich sur le site des S-schémas affines lisses est une équivalence de catégories).

6. Propriétés de finitude et théorèmes de comparaison

Étant donné un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V, et un entier p, on note

$$V(p) = \begin{cases} V \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(H^1(\mathbb{G}_m, E)^{\otimes p}, \mathbb{K}) & \text{si } p \geqslant 0, \\ V \otimes_{\mathbb{K}} H^1(\mathbb{G}_m, E)^{\otimes p} & \text{si } p \leqslant 0. \end{cases}$$

Tout choix d'un générateur de $H^1(\mathbb{G}_m, E)$ définit un isomorphisme fonctoriel de la forme $V \simeq V(p)$.

[17] Les recouvrements pour la topologie Nisnevich sont les recouvrements par des morphismes étales et totalement décomposés.

Une fois ceci posé, on peut formuler de manière élémentaire les propriétés fondamentales des cohomologies de Weil mixtes.

***Théorème 6.1* (Cisinski-Déglise [CD2]).** — *Soit E une cohomologie de Weil mixte. Les groupes de cohomologie $H^n(X,E)$ ont les propriétés suivantes.*

Finitude. — Pour tout S-schéma projectif et lisse X, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\bigoplus_n H^n(X,E)$ est de dimension finie. Si, en outre, S est le spectre d'un corps parfait, cette propriété est vraie pour tout S-schéma lisse X.

Classe de cycles. — Il existe un unique morphisme fonctoriel et compatible au cup produit

$$H^q(X,\mathbb{Q}(p)) \longrightarrow H^q(X,E)(p)$$

pour tout S-schéma lisse X (où $H^q(X,\mathbb{Q}(p))$ désigne la cohomologie motivique de X au sens de Beilinson[(18)]).

Cohomologie à support compact. — Il existe des groupes de cohomologies à support compact $H^q_c(X,E)(p)$, définis pour tout S-schéma lisse, satisfaisant les fonctorialités habituelles de la cohomologie à support compact[(19)], et des morphismes naturels (relativement aux morphismes projectifs)

$$H^q_c(X,E)(p) \longrightarrow H^q(X,E)(p)$$

qui s'avèrent être des isomorphismes dès que X est projectif sur S.

Dualité de Poincaré. — Pour tout schéma X, lisse et de dimension relative d sur S, il existe des accouplements canoniques de la forme

$$H^q_c(X,E)(p) \otimes_{\mathbb{K}} H^{2d-q}(X,E)(d-p) \longrightarrow \mathbb{K}\,.$$

En outre, ces accouplements sont parfaits dès que X est projectif sur S. Si, en outre, S est le spectre d'un corps parfait, les groupes de cohomologie à support compact $H^q_c(X,E)(p)$ sont tous de dimension finie, et les accouplements ci-dessus sont parfaits pour tout S-schéma lisse X.

On dispose aussi d'un critère de comparaison :

***Théorème 6.2* (Cisinski-Déglise [CD2]).** — *Soit E une cohomologie de Weil mixte, et E' un préfaisceau de $\mathbb{K}$-algèbres différentielles graduées commutatives sur la catégorie des S-schémas affines lisses vérifiant les axiomes de Dimension, d'Homotopie, de Stabilité, d'Excision étale, et la forme faible suivante de la formule de*

(18) On a par définition $H^q(X,\mathbb{Q}(p)) = K_{2p-q}(X)^{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, où $K_q(X)^{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ désigne le facteur direct de $K_q(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ sur lequel les opérateurs d'Adams ψ^k agissent via la multiplication par k^p pour tout entier k. Dans le cas où S est un schéma de type fini sur un corps, les groupes de cohomologie motivique de Beilinson coïncident avec les groupes de cohomologie motivique définis par Voevodsky dans [**VSF00**]. C'est pour avoir cette description de la cohomologie motivique via la K-théorie que nous travaillons avec un schéma de base régulier. On pourrait étendre ces résultats pour un schéma de base quelconque en remplaçant la K-théorie par la K-théorie invariante par homotopie.

(19) De manière contravariante pour les morphismes projectifs, et de manière covariante pour les morphismes lisses (modulo un décalage par la dimension relative).

Künneth[20] *: pour tout S-schéma affine et lisse X, et pour tout entier n, l'application induite par le cup produit*

$$\bigoplus_{p+q=n} H^p(X,E)\otimes_{\mathbb{K}} H^q(Y,E) \longrightarrow H^n(X\times_S Y,E)$$

est bijective pour $Y=\mathbb{A}^1_S$ ou $Y=\mathbb{G}_m$ (par exemple, E' peut être une cohomologie de Weil mixte).

On suppose donné un morphisme de préfaisceaux de $\mathbb{K}$-algèbres différentielles graduées $E\longrightarrow E'$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(a) *Le morphisme induit $H^2(\mathbb{P}^1_S,E)\longrightarrow H^2(\mathbb{P}^1_S,E')$ est non trivial*[21].

(b) *Pour tout S-schéma projectif lisse X, le morphisme induit*

$$H^i(X,E)\longrightarrow H^i(X,E')$$

est un isomorphisme.

Si en outre S est le spectre d'un corps parfait, alors les deux conditions ci-dessus équivalent à la condition

(b′) *Le préfaisceau E' est une cohomologie de Weil mixte, et pour tout S-schéma lisse X, le morphisme induit*

$$H^i(X,E)\longrightarrow H^i(X,E')$$

est un isomorphisme.

Exemple 6.3. — Si K est un corps de caractéristique zéro, le complexe de de Rham algébrique définit une cohomologie de Weil mixte sur la catégorie des K-schémas affines lisses, notée ici E_{dR}. La seule propriété non triviale à vérifier est celle d'Excision étale. Elle résulte du Théorème de Serre (d'annulation de la cohomologie à coefficients dans un faisceau cohérent pour les schémas affines), qui permet de vérifier que la cohomologie de de Rham vérifie la descente étale.

Exemple 6.4. — On retrouve ainsi le Théorème de comparaison de Grothendieck [**Gro66**] (resp. de Kiehl [**Kie67**]). Soit K un corps valué complet archimédien (resp. non archimédien). Étant donnée une K-variété analytique lisse (resp. une K-variété analytique rigide lisse) X, on note $\Omega^{an}_{dR}(X)$ le complexe de de Rham des formes analytiques sur X. Cela définit via le foncteur d'analytification un préfaisceau de K-algèbres différentielles graduées commutatives sur la catégorie des K-schémas affines lisses de type fini, noté E^{an}_{dR}. On vérifie directement les axiomes de Dimension, d'Homotopie, de Stabilité, et d'Excision étale, ainsi que la forme faible de la formule de Künneth (ici encore, le point délicat est l'excision, laquelle résulte du Théorème

[20] Si E' satisfait les axiomes de Dimension, d'Homotopie et de Stabilité, la formule de Künneth pour $Y=\mathbb{A}^1$ correspond simplement à dire que E est invariante par homotopie, et la formule de Künneth pour $Y=\mathbb{G}_m$ est équivalente à la propriété de pureté relativement à la section nulle $S\longrightarrow\mathbb{A}^1_S$.

[21] On montre qu'on a un isomorphisme canonique $H^2(\mathbb{P}^1_S,F)=H^1(\mathbb{G}_m,F)=\mathbb{Q}(-1)$ pour $F=E,E'$. La condition (a) équivaut donc à dire que l'application induite $H^1(\mathbb{G}_m,E)\longrightarrow H^2(\mathbb{G}_m,E')$ est bijective.

B de Cartan (resp. de l'analogue du Théorème B de Cartan en géométrie analytique rigide)). On dispose d'un morphisme évident de préfaisceaux de K-algèbres différentielles graduées

$$E_{dR} \longrightarrow E_{dR}^{an} .$$

En appliquant le Théorème 6.2, on obtient que ce morphisme est un quasi-isomorphisme (localement pour la topologie de Nisnevich). Autrement dit, on retrouve le fait que la cohomologie de de Rham algébrique est canoniquement isomorphe à la cohomologie de de Rham analytique (resp. à la cohomologie de de Rham analytique rigide).

Exemple 6.5. — Si k est un corps, et $\overline{k}$ une clôture séparable de k, on peut montrer que la cohomologie étale ℓ-adique $H^i(X \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ ($\ell \neq car(k)$) est représentable par une cohomologie de Weil mixte ; cf. [**CD2**].

Exemple 6.6. — Soit V un anneau de valuation discrète, complet, de corps des fonctions de caractéristique zéro K, et de corps résiduel parfait k. On peut représenter la cohomologie rigide de Berthelot par une cohomologie de Weil mixte E_{rig} à coefficients dans K, définie sur les k-schémas lisses ; cf. [**CD2**]. La cohomologie rigide est isomorphe à la cohomologie de Monsky-Washnitzer [**MW68**] pour les k-schémas affines lisses, et à la cohomologie cristalline pour les schémas projectifs. Le théorème 6.1 appliqué à E_{rig} redonne le théorème de finitude pour la cohomologie rigide, prouvé par G. Christol and Z. Mekhbout [**CM00**] pour les schémas affine (pour la cohomologie de Monsky-Washnitzer) et par Berthelot [**Ber97b**]. On retrouve aussi une preuve de la dualité de Poincaré en cohomologie rigide, prouvée par Berthelot [**Ber97a**], et la construction d'une classe de cycles, redonnant la construction de Pétrequin [**Pét03**].

Exemple 6.7. — Sous les mêmes hypothèse qu'en 6.6, on définit deux cohomologies de Weil mixtes sur V. La cohomologie de de Rham $\underline{E}_{dR}$, et la cohomologie rigide $\underline{E}_{rig}$, par les formules

$$\underline{E}_{dR}(X) = E_{dR}(X_\eta) \quad \text{et} \quad \underline{E}_{rig}(X) = E_{rig}(X_s) ,$$

où, pour un V-schéma lisse X, on désigne respectivement par X_η et X_s la fibre générique et la fibre spéciale de X. En utilisant le fait que la cohomologie rigide et la cohomologie de Monsky-Washnitzer coïncident pour les V-schémas lisses, on construit un morphisme de spécialisation

$$sp : \underline{E}_{dR} \longrightarrow \underline{E}_{rig} .$$

Le théorème 6.2 redonne immédiatement le théorème de comparaison de Bloch-Ogus [**BO83**] : pour tout V-schéma projectif et lisse X, le morphisme de spécialisation induit un isomorphisme

$$H^i_{dR}(X_\eta) \simeq H^i_{rig}(X_s/K)$$

7. Basculement

La démonstration des Théorèmes 6.1 et 6.2 utilise la théorie de l'homotopie stable des schémas, et consiste à associer à toute cohomologie de Weil mixte E la catégorie triangulée des "motifs mixtes à coefficients dans E". C'est cette dernière catégorie qu'il s'agira d'étudier.

Notons $Comp(S)$ la catégorie des complexes de faisceaux Nisnevich de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels sur le site des schémas lisses sur S. Cette catégorie admet une structure de catégorie de modèles fermée "projective", dont les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes, et les fibrations, les morphismes de complexes $u : C \longrightarrow D$ tels que pour tout S-schéma affine lisse X, l'application $C(X) \longrightarrow D(X)$ soit surjective, et tels que le complexe $\ker u$ vérifie la propriété d'excision étale ; voir **[CD1]**.

On note comme de coutume $\mathbb{Q}(X)$, le faisceau Nisnevich associé au préfaisceau

$$Y \longmapsto \mathbb{Q}[\mathrm{Hom}_S(Y, X)] .$$

Les complexes de la forme $\mathbb{Q}(X)$ (concentrés en degrés zéro) sont, essentiellement par définition, tous cofibrants pour X affine et lisse sur S.

On définit ensuite $L_{\mathbb{A}^1} Comp(S)$ comme la localisation de Bousfield à gauche de $Comp(S)$ par les morphismes de la forme $C \longrightarrow 0$, où C parcourt la classe des complexes associés aux projections $X \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow X$, X affine lisse sur S,

$$C = \{\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Q}(X \times \mathbb{A}^1) \longrightarrow \mathbb{Q}(X) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots\} .$$

Les fibrations de $L_{\mathbb{A}^1} Comp(S)$ sont les morphismes $C \longrightarrow D$ qui sont fibrants dans $Comp(S)$, et tels que $\ker u$ soit invariant par homotopie. On vérifie que $L_{\mathbb{A}^1} Comp(S)$ est une catégorie de modèles monoïdale symétrique stable. Sa catégorie homotopique

$$D^{\mathit{eff}}_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q}) = \mathbf{Ho}(L_{\mathbb{A}^1} Comp(S))$$

est donc une catégorie triangulée monoïdale symétrique. On a, pour tous S-schémas lisses sur S, un isomorphisme canonique

$$\mathbb{Q}(X) \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(Y) \simeq \mathbb{Q}(X \times_S Y) .$$

L'*objet de Tate* $\mathbb{Q}(1)$ est défini par

$$\mathbb{Q}(1) = \ker\big(\mathbb{Q}(\mathbb{G}_m) \longrightarrow \mathbb{Q}\big)[-1] .$$

C'est une désuspension d'un facteur direct de $\mathbb{Q}(\mathbb{G}_m)$, et donc, il est cofibrant.

On veut d'autre part que l'objet de Tate soit quasi-inversible, i.e. que le produit tensoriel par $\mathbb{Q}(1)$ soit une équivalence de catégories. Pour cela, on modifie encore $L_{\mathbb{A}^1} Comp(S)$, et on introduit la catégorie de modèles fermée stable des *spectres de Tate* (i.e. des $\mathbb{Q}(1)$-spectres symétriques), notée $Sp_{Tate}(S, \mathbb{Q})$; voir **[CD1]** pour une étude de ce type de constructions dans le cadre des catégories de complexes. On note

$$D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q}) = \mathbf{Ho}(Sp_{Tate}(S, \mathbb{Q})) .$$

C'est encore une catégorie triangulée monoïdale symétrique, et on dispose d'un foncteur de "$\mathbb{Q}(1)$-suspension infinie" :

$$\mathbf{L}\Sigma^\infty : D^{\mathit{eff}}_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q}) \longrightarrow D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q}) .$$

En outre, par construction, le produit tensoriel par $\Sigma^\infty \mathbb{Q}(1)$ est une auto-équivalence de $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q})$.

Soit E une théorie cohomologique *stable* (i.e. un préfaisceau de $\mathbb{K}$-algèbres différentielles graduées commutatives vérifiant les axiomes de Dimension, d'Homotopie, de Stabilité, d'Excision étale, et la forme faible de la formule de Künneth comme dans l'énoncé du Théorème 6.2). On lui associe un spectre de Tate $\mathscr{E}$ en posant

$$\mathscr{E}_n = \mathcal{H}om(L^{\otimes n}, E)\,,$$

où L désigne le faisceau constant associé au complexe des morphismes de complexes de $\mathbb{Q}(1)$ vers E et $\mathcal{H}om$ le Hom interne de la catégorie des complexes de faisceaux Nisnevich, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agissant par permutation des facteurs sur $L^{\otimes n}$. On a

$$H^i(L) = \begin{cases} H^1(\mathbb{G}_m, E) & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les morphismes

$$\mathbb{Q}(1) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathscr{E}_n \longrightarrow \mathscr{E}_{n+1}$$

proviennent du morphisme canonique $L \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathbb{Q}(1), E)$ par un jeu formel d'adjonctions ; cf. [**CD2**, 2.1.5]. On vérifie en outre que $\mathscr{E}$ est un spectres d'anneaux commutatifs, (i.e. un monoïde commutatif dans la catégorie des spectres de Tates). On peut donc considérer la catégorie $Sp_{\mathit{Tate}}(S, \mathscr{E})$ des $\mathscr{E}$-modules. Elle est munie d'une structure de catégorie de modèles fermée monoïdale symétrique stable dont les équivalence faibles (resp. les fibrations) sont les morphismes de $\mathscr{E}$-modules qui sont des équivalence faibles (resp. les fibrations) dans $Sp_{\mathit{Tate}}(S, \mathbb{Q})$. La catégorie homotopique

$$D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathscr{E}) = \mathbf{Ho}(Sp_{\mathit{Tate}}(S, \mathscr{E}))$$

est donc une catégorie triangulée monoïdale symétrique, et on dispose d'un foncteur de changement de base (qui est monoïdal symétrique)

$$D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q}) \longrightarrow D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathscr{E})\ , \quad M \longmapsto \mathscr{E} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbb{Q}} M\,.$$

Les hypothèses faites sur E se traduisent de la manière suivante. Le spectre $\mathscr{E}$ est un Ω-spectre, ce qui signifie que pour tout S-schéma lisse X et tout couple d'entiers (p, q), $p \geqslant 0$, on a

$$\mathrm{Hom}_{D_{\mathbb{A}^1}(S,\mathbb{Q})}(\Sigma^\infty(\mathbb{Q}(X))(-p), \mathscr{E}) \simeq H^q(X, \mathscr{E}_p) = H^q(X, E)(p)\,.$$

Le spectre $\mathscr{E}$ est par construction périodique dans le sens où il existe un isomorphisme $\mathscr{E}(1) \simeq \mathscr{E}$ dans $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathscr{E})$ (pour chaque choix d'un générateur de $H^1(\mathbb{G}_m, E)$).

On dispose d'un morphisme

$$c : \mathbb{Q}(\mathbb{P}^1_S) \longrightarrow \mathscr{E}(1)[2]$$

dans $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q})$: on utilise la décomposition

$$\mathbb{Q}(\mathbb{P}^1_S) = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(1)[2]$$

dans $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q})$, et on définit c comme le composé de la projection de $\mathbb{Q}(\mathbb{P}^1_S)$ sur $\mathbb{Q}(1)[2]$ et du morphisme obtenu en tensorisant l'unité $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathscr{E}$ par $\mathbb{Q}(1)[2]$. Ce morphisme c correspond à une classe de cohomologie non triviale dans $H^2(\mathbb{P}^1_S, E)(1)$, laquelle, via les identifications canoniques

$$H^2(\mathbb{P}^1_S, E)(1) \simeq H^1(\mathbb{G}_m, E)(1) \simeq \mathbb{Q}$$

correspond à l'unité de $\mathbb{Q}$. On vérifie alors, en utilisant la formule de Künneth faible (et le fait que l'on évite les phénomènes de torsion), qu'il existe un unique morphisme naturel de groupes abéliens

$$c_1 : Pic(X) \longrightarrow H^2(X, E)(1)$$

qui envoie la classe du dual du fibré en droite tautologique sur $\mathbb{P}^1_S$ sur c. Le morphisme c_1 définit la première classe de Chern des fibrés en droite. C'est le point de départ pour démontrer la formule du fibré projectif, d'où on tire ensuite une théorie des classes de Chern générales, une construction canonique des classes de cycles, une bonne théorie des morphismes de Gysin, et la dualité de Poincaré pour les S-schémas lisses et projectifs dans $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathscr{E})$.

Rappelons que dans une catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{C}$, un objet X est dit *rigide* s'il existe pour tous objets A et Y de $\mathcal{C}$, une bijection fonctorielle

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes X, Y)\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X^\vee \otimes Y)\,,$$

où $X^\vee = \mathcal{H}om(X, \mathbb{1})$ désigne le dual de X. Par exemple, la dualité de Poincaré nous dit que pour tout S-schéma projectif et lisse X, de dimension relative d, $\mathscr{E} \otimes_{\mathbb{Q}} \Sigma^\infty \mathbb{Q}(X)$ est rigide dans $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathscr{E})$, et que

$$\big(\mathscr{E} \otimes_{\mathbb{Q}} \Sigma^\infty \mathbb{Q}(X)\big)^\vee = \big(\mathscr{E} \otimes_{\mathbb{Q}} \Sigma^\infty \mathbb{Q}(X)\big)(-d)[-2d]\,.$$

On désigne par $D^\vee_{\mathbb{A}^1}(S, \mathscr{E})$ la sous catégorie localisante de $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathscr{E})$ engendrée par les objets rigides (i.e. la plus petite sous-catégorie triangulée, stable par sommes, engendrée par les objets rigides). Comme l'unité de $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathscr{E})$ est compacte, tous les objets rigides de $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathscr{E})$ sont compacts, et, par suite, la catégorie $D^\vee_{\mathbb{A}^1}(S, \mathscr{E})$ est engendrée par une petite famille d'objets compacts.

En notant $D(\mathbb{K})$ la catégorie dérivée non bornée de la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, on dispose enfin d'un foncteur de *réalisation homologique*

$$\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{E}, -) : D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathscr{E}) \longrightarrow D(\mathbb{K})\,.$$

Dire que E est une cohomologie de Weil mixte reviens à demander que E soit une cohomologie stable qui vérifie la formule de Künneth, ce qui se traduit de la manière suivante, via le fait élémentaire que tout foncteur monoïdal symétrique respecte les objets rigides.

Théorème de basculement 7.1 **(Cisinski-Déglise [CD2])**
Si E est une cohomologie de Weil mixte, le foncteur de réalisation homologique induit une équivalence de catégories triangulées monoïdales symétriques

$$D^\vee_{\mathbb{A}^1}(S, \mathscr{E}) \simeq D(\mathbb{K})\,.$$

Le Théorème de basculement implique très formellement les Théorèmes 6.1 et 6.2. Par exemple, la propriété de finitude du Théorème 6.1 provient du fait que les objets compacts de $D(\mathbb{K})$ sont exactement les complexes de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels C tels que $\bigoplus_n H^n(C)$ soit de dimension finie. Les formules de dualité en cohomologie proviennent directement de la dualité de Poincaré abstraite, démontrée grâce à la théorie de l'homotopie des schémas dans $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathscr{E})$. Pour le Théorème de comparaison 6.2, étant donné une cohomologie de Weil mixte E, une cohomologie stable E', et un morphisme $E \longrightarrow E'$, on vérifie que, si le morphisme

$$H^2(\mathbb{P}^1_S, E) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^1_S, E')$$

n'est pas trivial, on peut construire un foncteur triangulé et monoïdal symétrique

$$D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathscr{E}) \longrightarrow D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathscr{E}'),$$

lequel induit par restriction un foncteur ayant les mêmes propriétés

$$D(\mathbb{K}) \simeq D^{\vee}_{\mathbb{A}^1}(S, \mathscr{E}) \longrightarrow D^{\vee}_{\mathbb{A}^1}(S, \mathscr{E}').$$

Pour voir si ce dernier est pleinement fidèle, vu que ce foncteur respecte les objets compacts, on est ramené, via le Théorème de basculement, à vérifier que le morphisme d'anneaux gradués

$$\mathbb{K} = H^*(S, E) \longrightarrow H^*(S, E') = \mathbb{K}$$

est bijectif, ce qui est assez clair.

Lorsque S est le spectre d'un corps parfait, la théorie des altérations de de Jong [**dJ96**] permet de prouver que les objets compacts de $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q})$ sont exactement les objets rigides ; voir [**Rio05**]. On en déduit que

$$D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathscr{E}) = D^{\vee}_{\mathbb{A}^1}(S, \mathscr{E}),$$

ce qui implique les assertions des Théorèmes 6.1 et 6.2 dans le cas où S est le spectre d'un corps parfait.

8. Réalisations motiviques

La catégorie $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q})$ est essentiellement la catégorie triangulée des motifs, ce que F. Morel a explicité dans [**Mor06**] de la manière suivante.

L'isomorphisme d'échange des facteurs

$$\tau : \mathbb{Q}(1)[1] \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(1)[1] \longrightarrow \mathbb{Q}(1)[1] \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(1)[1]$$

satisfait l'équation $\tau^2 = 1$. Il induit un endomorphisme

$$\varepsilon : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

dans $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q})$, lequel satisfait aussi l'équation $\varepsilon^2 = 1$. On en déduit deux projecteurs

$$e_+ = \frac{1-\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad e_+ = \frac{1-\varepsilon}{2}.$$

Comme la catégorie $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q})$ est pseudo-abélienne (elle admet des sommes infinies), on peut définir

$$\mathbb{Q}_+ = \operatorname{Im} e_+ \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}_- = \operatorname{Im} e_-.$$

On définit ensuite $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q}_+)$ (resp. $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q})$) comme la sous-catégorie pleine de $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q})$ formée des objets M tels que $M \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_- = 0$ (resp. tels que $M \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_+ = 0$), et on voit que l'on obtient une équivalence de catégories

$$D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q}_+) \times D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q}_-) \simeq D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q}) \,.$$

D'après un résultat annoncé par F. Morel [**Mor06**], $\mathbb{Q}_+$ représente la cohomologie motivique au sens de Beilinson : pour tout S-schéma lisse S, et tout couple d'entiers (p, q), on a un isomorphisme naturel :

$$\operatorname{Hom}_{D_{\mathbb{A}^1}(S,\mathbb{Q})}(\Sigma^\infty \mathbb{Q}(X), \mathbb{Q}_+(p)[q]) \simeq H^q(X, \mathbb{Q}(p)) \,.$$

Autrement dit, la décomposition de la K-théorie algébrique à coefficients rationnels par les opérations d'Adams s'écrit comme un isomorphisme canonique

$$BGL_{\mathbb{Q}} \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Q}_+(n)[2n]$$

dans $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q})$.

Si E est une cohomologie de Weil mixte (ou seulement stable), l'existence d'une théorie des classes de Chern à valeurs dans les groupes $H^*(X, E)$ implique que $\mathscr{E} = \mathscr{E}_+$. On en déduit que tout $\mathscr{E}$-module est dans $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q}_+)$ et que pour tout objet M de $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q}_-)$, on a $\mathscr{E} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbb{Q}} M = 0$. Autrement dit, la catégorie $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathscr{E})$ ne dépend que de $D_{\mathbb{A}^1}(S, \mathbb{Q}_+)$.

D'autre part, on déduit du fait que $\mathbb{Q}_+$ représente la cohomologie motivique que pour tout corps parfait k, on a une équivalence de catégorie triangulées monoïdales symétriques

$$D_{\mathbb{A}^1}(k, \mathbb{Q}_+) \simeq DM(k, \mathbb{Q}) \,,$$

où $DM(k, \mathbb{Q})$ désigne la catégorie triangulée des motifs mixtes de Voevodsky (dont la sous-catégorie des objets compacts est la catégorie $DM_{gm}(k) \otimes \mathbb{Q}$ construite dans [**VSF00**]).

Si E est une cohomologie de Weil mixte définie sur la catégorie des schémas affines lisses sur un corps parfait k, on a donc un foncteur de réalisation homologique

$$R_{\mathscr{E}} : DM(k, \mathbb{Q}) \longrightarrow D(\mathbb{K})$$

obtenu comme la composition du foncteur

$$DM(k, \mathbb{Q}) \longrightarrow D_{\mathbb{A}^1}(k, \mathscr{E}) \qquad M \longmapsto \mathscr{E} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbb{Q}} M$$

et de l'équivalence de catégories

$$D_{\mathbb{A}^1}(k, \mathscr{E}) \simeq D(\mathbb{K})$$

obtenue par le Théorème 7.1. Le foncteur $R_{\mathscr{E}}$ étant monoïdal symétrique, il respecte les objets rigides. Comme tous les objets compacts de $DM(k, \mathbb{Q})$ sont rigides, si $DM_{gm}(k, \mathbb{Q})$ désigne la version rationnelle de la catégorie triangulée des motifs mixtes définie par Voevodsky, et si $D^b(\mathbb{K})$ désigne la catégorie dérivée bornée de la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, on obtient l'énoncé suivant.

Théorème 8.1 **(Cisinski-Déglise [CD2]).** — *Toute cohomologie de Weil mixte, définie sur les schémas lisses sur un corps parfait k, définit un foncteur monoïdal symétrique*

$$R : DM_{gm}(k, \mathbb{Q}) \longrightarrow D^b(\mathbb{K})$$

tel que, pour tout k-schéma lisse X, on ait un isomorphisme canonique

$$R(M_{gm}(X))^{\vee} \simeq \mathbf{R}\Gamma(X_{Nis}, E_{Nis})\,.$$

Références

Travaux présentés pour l'habilitation

[C1] D.-C. Cisinski , « Images directes cohomologiques dans les catégories de modèles », *Annales Mathématiques Blaise Pascal* **10** (2003), p. 195–244.

[C2] ———, « Propriétés universelles et extensions de Kan dérivées », à paraître dans *Theory and Applications of Categories.*

[C3] ———, « Catégories dérivables », preprint, 2008.

[C4] ———, « Invariance de la K-théorie par équivalences dérivées », preprint, 2008.

[CD1] D.-C. Cisinski & F. Déglise – « Local and stable homological algebra in Grothendieck abelian categories », arXiv :0712.3296, à paraître dans *Homology, Homotopy and Applications.*

[CD2] ———, « Mixed Weil cohomologies », arXiv :0712.3291.

Ces textes sont sur la page `http://www.math.univ-paris13.fr/~cisinski/`

Autres travaux

[C5] D.-C. Cisinski – « Les morphismes de Dwyer ne sont pas stables par rétractes », *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques* **XL-3** (1999), p. 227–231.

[C6] ———, « Théories homotopiques dans les topos », *J. Pure Appl. Algebra* **174** (2002), p. 43–82.

[C7] ———, « Faisceaux localement asphériques », preprint, 2003.

[C8] ———, « Le localisateur fondamental minimal », *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques* **XLV-2** (2004), p. 109–140.

[C9] ———, *Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie*, Astérisque, vol. 308, Soc. Math. France, 2006.

[C10] ———, « Batanin higher groupoids and homotopy types », Contemporary Mathematics, vol. 431, Amer. Math. Soc., 2007, p. 171–186.

[C11] ———, « Localisation de Bousfield des dérivateurs », lettre à G. Tabuada, Paris, 3 Mars 2007.

[C12] ———, « Locally constant functors », arXiv :0803.4342v2, 2008.

[CD3] D.-C. Cisinski & F. Déglise – « Motivic proper descent », en préparation.

[CD4] ———, « Triangulated categories of mixed motives », en préparation.

[CN] D.-C. Cisinski & A. Neeman – « Additivity for derivator K-theory », *Adv. Math.* **217** (2008), no. 4, p. 1381–1475.

Références générales

[And78] D. W. ANDERSON – « Fibrations and geometric realizations », *Bull. Amer. Math. Soc.* **84** (1978), no. 5, p. 765–788.

[And79] ———, « Axiomatic homotopy theory », in *Algebraic Topology, Waterloo, 1978*, Lecture Notes in Math., vol. 741, 1979, p. 520–547.

[And04] Y. ANDRÉ – *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et synthèses, vol. 17, Soc. Math. France, 2004.

[Bek00] T. BEKE – « Sheafifiable homotopy model categories », *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **129** (2000), p. 447–475.

[Ber97a] P. BERTHELOT – « Dualité de Poincaré et formule de Künneth en cohomologie rigide », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **325** (1997), no. 5, p. 493–498.

[Ber97b] ———, « Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide », *Invent. Math.* **128** (1997), p. 329–377.

[BM07] A. J. BLUMBERG & M. A. MANDELL – « Algebraic K-theory and abstract homotopy theory », arXiv :0708.0206, 2007.

[BO83] P. BERTHELOT & A. OGUS – « F-isocristals and de Rham cohomology I », *Invent. Math.* **72** (1983), p. 159–199.

[Bro73] K. S. BROWN – « Abstract homotopy and generalized sheaf cohomology », *Trans. Amer. Math. Soc.* **186** (1973), p. 419–458.

[CM00] G. CHRISTOL & Z. MEBKHOUT – « Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques III », *Annals of Math.* **151** (2000), p. 385–457.

[dJ96] A. J. DE JONG – « Smoothness, semi-stability and alterations », *Publ. Math. IHES* **83** (1996), p. 51–93.

[DS04] D. DUGGER & B. SHIPLEY – « K-theory and derived equivalences », *Duke Math. J.* **124** (2004), no. 3, p. 587–617.

[Dug01a] D. DUGGER – « Combinatorial model categories have presentations », *Adv. Math.* **164** (2001), no. 1, p. 177–201.

[Dug01b] ———, « Universal homotopy theories », *Adv. Math.* **164** (2001), no. 1, p. 144–176.

[Gro66] A. GROTHENDIECK – « On the de Rham cohomology of schemes », *Publ. Math. IHES* **29** (1966), p. 93–103.

[Hel88] A. HELLER – « Homotopy theories », *Mem. Amer. Math. Soc.* **71** (1988), no. 383.

[Hel97a] ———, « Homological algebra and (semi)stable homotopy », *J. Pure. Appl. Algebra* **115** (1997), p. 131–139.

[Hel97b] ———, « Stable homotopy theories and stabilization », *J. Pure. Appl. Algebra* **115** (1997), p. 113–130.

[Hir03] P. S. HIRSCHHORN – *Model categories and their localizations*, Math. surveys and monographs, vol. 99, Amer. Math. Soc., 2003.

[Jar87] J. F. JARDINE – « Simplicial presheaves », *J. Pure Appl. Algebra* **47** (1987), p. 35–87.

[Jar96] ———, « Boolean localization in practice », *Doc. Math.* **1** (1996), no. 13, p. 245–275.

[Kel91] B. KELLER – « Derived categories and universal problems », *Communications in Algebra* **19** (1991), p. 699–747.

[Kie67] R. KIEHL – « Die de Rham Kohomologie algebraischer Mannigfaltigkeiten über einem bewerteten Körper », *Publ. Math. IHES* **33** (1967), p. 5–20.

[KM08] B. Kahn & G. Maltsiniotis – « Structures de dérivabilité », *Adv. Math.* **218** (2008), no. 4, p. 1286–1318.

[Mal01] G. Maltsiniotis – « Introduction à la théorie des dérivateurs (d'après Grothendieck) », prépublication, 2001.

[Mal05] ———, *La théorie de l'homotopie de Grothendieck*, Astérisque, vol. 301, Soc. Math. France, 2005.

[Mal07] ———, « Le théorème de Quillen, d'adjonction des foncteurs dérivés, revisité », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **344** (2007), no. 9, p. 549–552.

[Mor06] F. Morel – « Rational stable splitting of the grassmanians, and rational motivic sphere spectrum », statement of results, first draft, 2006.

[MV99] F. Morel & V. Voevodsky – « $\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes », *Publ. Math. IHES* **90** (1999), p. 45–143.

[MW68] P. Monsky & G. Washnitzer – « Formal cohomology : I », *Annals of Math.* **88** (1968), p. 181–217.

[Pét03] D. Pétrequin – « Classes de Chern et classes de cycles en cohomologie rigide », *Bull. Soc. Math. France* **131** (2003), no. 1, p. 59–121.

[Qui67] D. Quillen – *Homotopical Algebra*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 43, Springer-Verlag, 1967.

[Qui73] ———, « Higher algebraic K-theory », in *Higher K-theories I*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 341, Springer-Verlag, 1973, p. 85–147.

[RB06] A. Rădulescu-Banu – « Cofibrations in homotopy theory », preprint arXiv :math/0610009, 2006.

[Rio05] J. Riou – « Dualité de Spanier-Whitehead en géométrie algébrique », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **340** (2005), no. 6, p. 431–436.

[Rio07] ———, « Catégorie homotopique stable d'un site suspendu avec intervalle », *Bulletin de la Soc. Math. France*, **135** (2007), no. 4, p. 495–547.

[Tab07] G. Tabuada – « Higher K-theory via universal invariants », arXiv :0706.2420, à paraître dans *Duke Math. J.*, 2007.

[Tho79] R. Thomason – « Homotopy colimits in the category of small categories », *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **85** (1979), p. 91–109.

[Tho80] ———, « $\mathcal{C}at$ as a closed model category », *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques* **XXI-3** (1980), p. 305–324.

[TT90] R. Thomason & T. Trobaugh – « Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories », in *The Grothendieck Festschrift III*, Birkhäuser, 1990, p. 247–435.

[TV04] B. Toën & G. Vezzosi – « A remark on K-theory and S-categories », *Topology* **43** (2004), no. 4, p. 765–791.

[VSF00] V. Voevodsky, A. Suslin & E. M. Friedlander – *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Annals of Mathematics Studies, vol. 143, Princeton University Press, 2000.

[Wal85] F. Waldhausen – « Algebraic K-theory of spaces », in *Algebraic and geometric topology (New Brunswick, N.J., 1983)*, vol. 1126, Springer-Verlag, 1985, p. 318–419.

[Wei01] C. Weibel – « Homotopy ends and Thomason model categories », *Selecta Math.* **7** (2001), p. 533–564.

Denis-Charles Cisinski • *E-mail :* cisinski@math.univ-paris13.fr
Url : http://www.math.univ-paris13.fr/~cisinski/