Université Paul Sabatier **Année 2003-2004**

Cours UE01, Licence $1^{ère}$ *année*

Suites, feuille 3

Exercice 1. **1-** Soit $(x)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie par :

$$x_n = \frac{n+1}{n+5}, \forall\ n \geq 0$$

calculez sa limite ℓ et déterminez $N(\epsilon)$ tel que

$$n \geq N(\epsilon) \Rightarrow |x_n - \ell| \leq \epsilon.$$

2- Mêmes questions pour

$$x_n = \frac{n^2+1}{2n^2-1}, \forall\ n > 0 \quad \text{et} \quad x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+2}, \forall\ n \geq 0.$$

Exercice 2. Etudiez la convergence des suites suivantes:

$$x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}, \forall\ n > 0, \qquad y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \forall\ n > 0,$$

$$z_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}, \forall\ n \geq 0, \qquad u_n = \frac{n\sin(n!)}{n^2+1}, \forall\ n \geq 0,$$

$$v_n = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2, \forall\ n > 0, \qquad w_n = (-1)^n \frac{n-1}{n+1}, \forall\ n \geq 0.$$

Exercice 3. Soit (u_n) une suite telle que pour tout $n \geq 0$ on ait $|u_{n+1}| \leq k|u_n|$ avec $0 < k < 1$. Montrez par récurrence que $|u_n| \leq k^n|u_0|$ pour tout $n \geq 0$. Quelle est la limite de cette suite? Que peut-on dire si $k \geq 1$?

Exercice 4.
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée et $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite qui converge vers 0, que peut-on dire de la suite $(u_n\, v_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 5. Les affirmations suivantes sont-elles vraies? Si oui, faire une démonstration. Si non, donner un contre-exemple et proposer une version juste.

1. Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente, alors les sous-suites $(x_{2n})_{n\geq 0}$ et $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergent vers une même limite.
2. Si les sous-suites $(x_{2n})_{n\geq 0}$ et $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergent, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente.
3. Si les sous-suites $(x_{2n})_{n\geq 0}$, $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ et $(x_{3n})_{n\geq 0}$ convergent, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente.