

Suites, feuille 2

Exercice 1. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = n$.

1. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Calculer S_n en fonction de n .
2. On pose $v_n = u_{2n+1}$. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite arithmétique.
3. On pose $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$. Calculer S'_n en fonction de n .

Exercice 2.

1. Soit $q \in \mathbb{R}$. Etudier, suivant les valeurs de q , la monotonie de la suite $u_n = q^n$.
2. On considère la suite $x_n = \sum_{k=0}^n q^k$. Montrer que $x_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Exercice 3.

1. Soit $M_n = 0,718718718 \dots 718$ où 718 apparaît n fois. Exprimez M_n sous la forme $\frac{p}{q}$ avec p, q dans $\mathbb{N}^*$.
2. Même question pour $M = 0,718718718 \dots$

Exercice 4. Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 6}$.

1. Montrer que pour tout entier n , $v_n > 0$. (Ainsi, v_{n+1} est bien défini.)
2. Montrer que cette suite est majorée par 3 et strictement croissante.

Exercice 5. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = -2n + 3$.

1. Montrer que $(u_n)_n$ est une suite arithmétique.
2. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Calculer S_n en fonction de n .
3. On pose $v_n = e^{u_n}$. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique.
(On rappelle que $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$).
4. On pose $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$. Calculer S'_n en fonction de n .

Exercice 6. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 7. Etudier le sens de variation des suites définies ci-dessous

1. $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_n = n(n-1)$.
2. $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par $v_0 = 0.5$ et $v_{n+1} = \sqrt{v_n}$.
3. $(w_n)_{n \geq 0}$ définie par $w_0 = 5$ et $w_{n+1} = \ln(w_n) + 2$.