Université Paul Sabatier Année 2003-2004

Cours UE01, Licence $1^{ère}$ *année*

Suites, feuille 1

Exercice 1 :(Valeur absolue)
1– Soient x et y deux réels tels que $x \leq y$. Montrez l'équivalence :

$$x \leq z \leq y \quad \Leftrightarrow \quad |x-z| + |z-y| = |x-y|$$

2– Montrez que, pour tout x réel et tout y réel, on a

$$\Big| |x| - |y| \Big| \leq |x-y|.$$

On pourra utiliser l'inégalité triangulaire $|a+b| \leq |a| + |b|$ pour tout a dans $\mathbb{R}$ et tout b dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : (Partie entière)
On définit, pour tout x réel, la partie entière de x par l'unique entier relatif noté $E(x)$ vérifiant $E(x) \leq x < E(x) + 1$.
1– Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'entier y vérifiant $y \leq x < y+1$ est unique.
2– Montrer que $E(x+n) = E(x) + n$ pour tout x réel et tout n entier relatif.
3– Montrer que $(a \leq b \Rightarrow E(a) \leq E(b))$ pour tout a réel et tout b réel.
4– Calculez $E(x) + E(-x)$.

Exercice 3 : (Partie entière)
1– Montrez, pour tout entier n non nul,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

(On pensera à utiliser la quantité conjuguée)
2– En déduire la partie entière de $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}})$.

Exercice 4 : (Bornes inférieures et supérieures)
1– Déterminez l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants des ensembles suivants

$$]-\infty, 2], \quad]-1, 0[\cup]0, 2[, \quad]-1, 0] \cup \{2\}.$$

2– Déterminez les bornes supérieure et inférieure des ces ensembles lorsqu'elles existent. Précisez si ces bornes sont des maxima ou des minima.

Exercice 5 : (Bornes inférieures et supérieures)
1– Montrez que l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R}^\star \,;\, x + \dfrac{1}{x} < 2\}$ est un intervalle et en déduire $\sup A$.
2– Montrez que l'ensemble $B = \{x \in \mathbb{R}^\star \,;\, x + \dfrac{1}{x} \leq 2\}$ n'est pas un intervalle. Déterminez $\sup B$.

Exercice 6 : (Bornes inférieures et supérieures)
Soient a et b deux réels positifs. Les parties suivantes sont-elles majorées ? minorées ? Si oui, admettent-elles un minimum, un maximum, une borne supérieure ou inférieure ?

$$A = \{a + bn \,;\, n \in \mathbb{N}\},\ B = \{a + (-1)^n \,;\, n \in \mathbb{N}\},$$

$$C = \{a + \frac{b}{n} \,;\, n \in \mathbb{N}^\star\},\ D = \{a + \frac{(-1)^n b}{n} \,;\, n \in \mathbb{N}^\star\}.$$

Exercice 7 : (Bornes inférieures et supérieures)
Soient A et B deux sous ensembles non vides de $\mathbb{R}$. On suppose A et B majorés. On définit les ensembles suivants : $A + B = \{a + b \,;\, a \in A, b \in B\}$ et $-A = \{-a \,;\, a \in A\}$.
1– Montrez que $-A$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$ et que $\inf(-A) = -\sup(A)$.
2– Montrez que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.