DEUG premier semestre : algèbre linéaire

Serge Cohen

16 septembre 2004

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Cette partie du polycopié de DEUG premier semestre présente l'algèbre linéaire. Cette théorie n'a normalement pas été abordée en terminale et à ce titre elle peut paraître difficile à un étudiant de DEUG. Pour faciliter sa compréhension nous avons choisi de partir d'une notion qui est est en général bien assimilée au lycée : la résolution de systèmes linéaires. Ainsi le premier chapitre de ce cours rappellera la résolution des systèmes linéaires, puis on s'intéressera aux matrices pour résoudre ces systèmes. Cependant les matrices ne servent pas qu'à cela, et nous verrons dans les chapitres suivants sur les espaces vectoriels et les applications linéaires que ce sont en fait des outils très pratiques dans toute cette partie de l'algèbre.

Chapitre 2

Résolution de systèmes linéaires

2.1 Système de m équations à n inconnues

2.1.1 Rappels sur les systèmes $m = 2,\ n = 2$

On considère un système de deux équations linéaires à deux inconnues. Nous supposerons que les coefficients sont réels, nous les noterons $a,\ b,\ c,\ a',\ b',\ c'$. On cherche les réels $x,\ y$ qui vérifient simultanément les deux équations suivantes, encore appelées système.

$$(S)\begin{cases} ax & + & by & = c \\ a'x & + & b'y & = c'. \end{cases} \tag{2.1}$$

Plus que de résoudre le système, ce qui nous intéresse est de voir les différents types d'ensembles de solutions et d'essayer de ne pas oublier de cas particulier.

Il y a un premier cas courant où $ab' - a'b \neq 0$, on obtient alors une solution unique que l'on peut noter sous forme de couple

$$\left\{(x,y) = \left(\frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}, \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}\right)\right\}.$$

Retrouver ce résultat en guise de révision !

Mais si $ab' - a'b = 0$, l'ensemble des solutions peut être très différent. On peut distinguer trois types que nous illustrerons par des exemples. La suite du cours montrera que ce sont les seuls types.

– Pas de solutions.

$$(S_0)\begin{cases} x & = 0 \\ x & = 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

Ici $b = b' = 0$ et donc $ab' - a'b = 0$.

– Une infinité de solutions dépendant d'un paramètre.

$$(S_1)\begin{cases} x & +y & = 0 \\ 2x & +2y & = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Ici encore $ab' - a'b = 0$, en fait la deuxièmes équation du système est la première multipliée par deux. Il suffit de choisir $x = \lambda$ où λ est un réel quelconque et de prendre $y = -\lambda$. On appelle λ un paramètre et pour chaque valeur de λ on a une solution $(\lambda, -\lambda)$ de (S_1). En tout on a bien sûr une infinité de solutions.

– Une infinité de solutions dépendant de deux paramètres. Si dans le système (S), on prend tous les coefficients nuls $a = b = c = a' = b' = c' = 0$ on a bien sûr $ab' - a'b = 0$. On peut choisir deux paramètres λ et μ arbitrairement et $x = \lambda$ et $y = \mu$. Ici encore on a une infinité de solutions mais on a plus de choix pour les paramètres, c'est ce qui distingue ce cas du précédent.

Essayons de voir si ces remarques élémentaires s'étendent quand on a plus d'équations ou d'inconnues.

2.1.2 Définitions et notations

Le premier problème consiste à écrire le système avec des notations qui ne prennent pas trop de place. On notera les inconnues $(x_1, \ldots, x_n)$ sous forme d'une liste de n nombres que l'on appelle n-uplet. Et l'on présente le système

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 & +\ldots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +\ldots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & + \vdots & + \vdots & = \vdots \\ a_{m1}x_1 & +\ldots & +a_{mn}x_n & = b_m, \end{cases} \tag{2.4}$$

où l'on s'est donné $m \times n$ nombres réels a_{ij}. L'entier i indique la ligne auquel appartient le coefficient et varie entre 1 et m; j, qui varie entre 1 et n, indique la colonne où apparaît le coefficient. Ce sont des conventions, mais il faut les respecter. Une solution de (S) est la donnée de n nombres $(x_1, \ldots, x_n)$ qui vérifient simultanément les m équations du système (S). On montrera que, comme dans le cas des systèmes de deux équations à deux inconnues, l'ensemble des solutions de (S) peut prendre trois formes :

– pas de solution,
– une solution unique,
– une infinité de solutions que l'on peut décrire au moyen de p paramètres choisis arbitrairement.

2.1.3 Exemples

Illustrons l'affirmation du paragraphe précédent par des exemples.

Exemple 2.1.1 *Si $m = n = 2$ et que l'on considère le système (S_1) de (2.3), on est dans le troisième cas et $p = 1$.*

Exemple 2.1.2 *Si $m = n = 2$ et que l'on considère le système où $a = b = c = a' = b' = c' = 0$, on est dans le troisième cas et $p = 2$.*

Exemple 2.1.3 *On veut résoudre le système à quatre inconnues : (x_1, x_2, x_3, x_4)*

$$(S_1)\begin{cases} x_1 & +x_2 & = 1 & (L1) \\ x_2 & +x_3 & = 1 & (L2) \\ x_3 & +x_4 & = 1 & (L3) \\ x_1 & +x_4 & = 1 & (L4) \end{cases} \tag{2.5}$$

On va transformer le système (S_1) en un système équivalent *(S_2) au sens de la définition suivante.*

Définition 2.1.1 *On dit que deux système linéaires (S) et (S') ayant le même nombre d'inconnues sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.*

Attention il faut bien vérifier que l'on ne gagne ni ne perd de solution quand on transforme (S) en (S').

Dans notre exemple, on a quatre équations donc $m = 4$. On peut remplacer $(L4)$ par la somme de $(L4)$,$(L2)$ et retrancher $(L3)$ et $(L1)$. On obtient un système équivalent

$$(S_2)\begin{cases} x_1 & + & x_2 & & = 1 & (L1) \\ x_2 & + & x_3 & & = 1 & (L2) \\ x_3 & + & x_4 & & = 1 & (L3) \\ (x_1 + x_4) + (x_2 + x_3) & & -(x_3 + x_4) - (x_1 + x_2) & & = 1 + 1 - 1 - 1 & (L'4). \end{cases} \tag{2.6}$$

Après simplification nous avons

$$(S_2)\begin{cases} x_1 & +x_2 & = 1 & (L1) \\ x_2 & +x_3 & = 1 & (L2) \\ x_3 & +x_4 & = 1 & (L3) \\ 0 & & = 2 - 2 & (L'4) \end{cases} \tag{2.7}$$

Le système (S_2) a le même ensemble de solutions que

$$(S_3)\begin{cases} x_1 & +x_2 & = 1 & (L1) \\ x_2 & -x_4 & = 0 & (L2) - (L3) = (L'2) \\ x_3 & +x_4 & = 1 & (L3), \end{cases} \tag{2.8}$$

ou encore

$$(S_4)\begin{cases} x_1 & +x_4 & = 1 & (L1) - (L'2) \\ x_2 & -x_4 & = 0 & (L'2) \\ x_3 & +x_4 & = 1 & (L3). \end{cases} \tag{2.9}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions des systèmes (S_1) à (S_4) peut être décrit en fixant $x_4 = \lambda$ un paramètre arbitraire et que toutes les autres inconnues sont alors déterminées par ce choix. L'ensemble des solutions est infini

$E = \{(1-\lambda, \lambda, 1-\lambda, \lambda),$ pour tout λ réel$\}$. On trouve donc ici $p = 1$. On remarque qu'il n'y a pas une écriture unique de l'ensemble des solutions, on peut présenter les choses plus symétriquement $E = \{(\frac{1}{2} - \mu, \frac{1}{2} + \mu, \frac{1}{2} - \mu, \frac{1}{2} + \mu)$, pour tout μ réel$\}$.

Remarque 2.1.1 *On peut éviter les petits points "..." dans l'écriture des systèmes en utilisant le symbole $\sum_{j=}$ qui veut dire que l'on ajoute tous les termes à droite de $\sum_{j=}$, en faisant varier j de la valeur écrite en bas, à celle écrite en haut. Le système général (S) devient*

$$(S) \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j & = b_1 \quad (1) \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j & = b_m \quad (m), \end{cases} \tag{2.10}$$

ou encore pour $i = 1$ à m $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$

2.1.4 Systèmes homogènes

Définition 2.1.2 *Les m réels b_i pour un système (S) sont appelés second membre du système. Un système linéaire est dit homogène si tous ses seconds membres sont nuls. On appelle système homogène associé à (S) le système (S_h) obtenu en remplaçant les b_j par 0. Si (S) est donné par $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ pour $i = 1$ à m, le système homogène associé (S_h) est donné par $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$ pour $i = 1$ à m.*

En fait les systèmes homogènes sont plus simples que les systèmes avec second membre pour deux raisons. Ils possèdent toujours la solution $x_j = 0$ pour $j = 1$ à n, et quand on a deux solutions d'un système homogène on peut en construire une infinité d'autres en faisant des combinaisons linéaires. Précisons cette notion dans la définition suivante.

Définition 2.1.3 *On appelle combinaison linéaire de p n-uplets*

$$(A_{11}, \ldots, A_{n1}), (A_{12}, \ldots, A_{n2}), \ldots, (A_{1p}, \ldots, A_{np})$$

tout n-uplet de la forme

$$(\lambda_1 A_{11} + \cdots + \lambda_p A_{1p}, \ldots, \lambda_1 A_{n1} + \cdots + \lambda_p A_{np})$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont p réels arbitraires.

Exemple 2.1.4 *$(\lambda x_1 + \mu x'_1, \ldots, \lambda x_n + \mu x'_n)$ est une combinaison linéaire des deux n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$, $(x'_1, \ldots, x'_n)$.*

Exemple 2.1.5 *Le couple (ou 2-uplet) (x, y) est une combinaison linéaire de $(1, 0)$ et $(0, 1)$*

$$(x, y) = (1 \times x + 0 \times y, 0 \times x + 1 \times y)$$

pour x, y réels.

Proposition 2.1.1 *Le n-uplet $(0,\dots,0)$ est toujours solution d'un système homogène. Si $(x_1,\dots,x_n)$ et $(x'_1,\dots,x'_n)$ sont deux solutions d'un système homogène, alors toute combinaison linéaire de ces deux solutions est aussi une solution du système homogène.*

*P*reuve
Comme pour $i=1$ à m, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\times 0=0$, $(0,\dots,0)$ est une solution d'un système homogène.
Si $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0$ alors pour λ réel $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda x_j)=0$, de même pour μ et le n-uplet $(x'_1,\dots,x'_n)$ donc $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda x_j+\mu x'_j)=0$ pour $i=1$ à m. La deuxième partie de la proposition est donc établie.

Proposition 2.1.2 *Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une solution particulière du système (S). Pour que $(x'_1,\dots,x'_n)$ soit une solution de (S) il faut et il suffit que $(x_1-x'_1,\dots,x_n-x'_n)$ soit une solution du système homogène associé.*

*P*reuve
Si pour $i=1$ à m $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i$, alors $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j=b_i$, est équivalent à $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j-x'_j)=0$ pour $i=1$ à m. Cela conclut la preuve.

Remarque 2.1.2 *On peut exprimer cette proposition en disant que la solution générale d'un système est égale à la somme d'une solution particulière de ce système, et de la solution générale du système homogène associé.*

2.2 Méthode du pivot de Gauss

2.2.1 Transformations élémentaires

Dans un premier temps nous allons simplifier l'écriture d'un système (S) en oubliant les inconnues x_i, les signes $+$ et $=$. Nous obtenons ainsi un tableau de coefficients et une colonne pour lesquels les transformations en un système équivalent s'écrivent plus vite. Nous appellerons dans le chapitre suivant ces tableaux des matrices.
Un système avec m lignes et n colonnes ou inconnues s'écrit.

$$(S)\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Donnons la liste des transformations élémentaires qui modifient un système (S) en un système équivalent.

1. On notera $L_i \leftrightarrow L_j$ la transformation qui échange la ligne i et la ligne j.
2. On notera $L_i \rightarrow \lambda L_i$ la transformation qui multiplie la $i$ème ligne par le réel $\lambda \neq 0$.
3. On notera $L_i \rightarrow L_i + L_j$ la transformation qui remplace la ligne i par la ligne i plus la ligne j.

Remarque 2.2.1 *Une transformation s'applique non seulement aux tableaux des coefficients mais aussi au second membre.*

Exemple 2.2.1 *Si on applique* $L_1 \leftrightarrow L_2$ *au système*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

*P*reuve que le système transformé est équivalent au système initial

Pour 1. l'ordre dans lequel on écrit les équations ne modifie pas l'ensemble des solutions.

Pour 2. si $(x_1, \ldots, x_n)$ vérifie $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, alors pour tout λ,

$$\lambda(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j) = \lambda b_i,$$

et en distribuant on remarque que $(x_1, \ldots, x_n)$ est solution de

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda a_{ij}x_j = \lambda b_i.$$

Cela revient à dire que toute solution de (S) est aussi solution du système où l'on a appliqué la transformation $L_i \to \lambda L_i$. Attention il faut voir que toute solution du système transformé est aussi solution du système initial pour s'assurer que les systèmes sont équivalents. Cela est immédiat car pour retrouver le système initial, il suffit d'appliquer la transformation $L_i \to (1/\lambda)L_i$, ce qui explique le fait que l'on suppose $\lambda \neq 0$.

Pour 3. si $(x_1, \ldots, x_n)$ vérifie $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i$, et $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k = b_j$, alors le n-uplet vérifie aussi $\sum_{k=1}^{n}(a_{ik} + a_{jk})x_k = b_i + b_j$. Donc une solution de (S) est aussi solution du système transformé par $L_i \to L_i + L_j$. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est solution du système transformé il vérifie $\sum_{k=1}^{n}(a_{ik} + a_{jk})x_k = b_i + b_j$ et $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k = b_j$. Donc par différence $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i$, qui est la ligne i du système initial.

Remarque 2.2.2 *Par composition des transformations élémentaires on obtient d'autres transformations qui ne modifient pas l'ensemble des solutions. Par exemple si l'on compose 2. et 3. on obtient une nouvelle transformation que nous noterons 4. et que l'on peut noter* $L_i \to L_i + \lambda L_j$ *avec* $\lambda \neq 0$.

2.2.2 Algorithme

Le but des transformations est de faire apparaître des 0 de manière à avoir un système le plus simple possible. Nous allons présenter l'algorithme de Gauss qui est une façon systématique de faire ces transformations. En revanche il n'est pas complètement évident, qu'à la fin de l'algorithme, le système soit plus simple à résoudre. Dans le prochain paragraphe, nous donnerons un exemple pour nous en convaincre.

Soit un système

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Nous supposerons d'abord que $a_{11} \neq 0$ (on décrit d'abord l'algorithme quand il n'y a pas de problème d'annulation, puis nous expliquerons que faire dans les autres cas). On veut que mis à part a_{11} il ne reste plus que des 0 dans la première colonne. Pour cela on utilise successivement les transformations : $L_2 \to L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1$, $L_3 \to L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1, \dots$, $L_m \to L_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}} L_1$. Le système

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

devient

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & a'_{32} & \dots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_m \end{pmatrix}.$$

Dans un deuxième temps on recommence avec la deuxième colonne. Supposons $a'_{22} \neq 0$, on ne touche pas à la première colonne en faisant les transformations $L_3 \to L_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} L_2$, $\dots, L_m \to L_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}} L_2$. On obtient ainsi la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{m3} & \dots & a''_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ \vdots \\ b''_m \end{pmatrix}.$$

Les réels a_{11}, a'_{22}, $a''_{33}, \dots$ s'appellent les pivots successifs. On itère le procédé dans les bons cas, jusqu'au dernier pivot, qui est atteint quand on est soit sur la dernière ligne, soit sur la dernière colonne.

Traitons maintenant le cas où un des pivots est nul, supposons pour simplifier que le premier pivot a_{11} est nul.

1. S'il existe un coefficient a_{i1} non nul au-dessous du pivot dans même la colonne on utilise $L_1 \leftrightarrow L_i$ et l'on poursuit la méthode avec ce nouveau pivot.
2. Si tous les coefficients au-dessous du pivot dans même la colonne sont nuls, on ne touche ni à la première ligne ni à la première colonne qui n'est composée que de 0 et on passe à la deuxième colonne en prenant comme pivot a_{12} si celui-ci n'est pas nul.

2.2.3 Applications

Appliquons cette méthode à la résolution de systèmes.

Exemple 2.2.2 *Le système*

$$\begin{cases} 2x & + & y & & -z & = 1 \\ x & & - & y & +z & = 2 \\ 4x & + & 3y & & +z & = 3 \end{cases}$$

est maintenant présenté

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dans l'algorithme, que nous avons présenté, on ne permute pas les colonnes (ce qui revient à échanger les inconnues (x, y, z)) pour éviter des confusions. Mais on peut utiliser une transformation élémentaire sur les lignes en plus de l'algorithme de Gauss pour avoir un pivot plus agréable.Dans cet exemple $L_1 \leftrightarrow L_2$ permet d'obtenir un pivot égal à 1 ce qui simplifie les divisions. On obtient après transformation

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La première étape avec un pivot $a_{11} = 1$ donne $L_2 \to L_2 - 2L_1,\ L_3 \to L_3 - 4L_1$ et le système devient

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Le deuxième pivot est $a_{22} = 3$ et la transformation $L_3 \to L_3 - \frac{7}{3}L_2$ donne

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

A cette étape, l'algorithme du pivot de Gauss proprement dit est terminé, mais pour résoudre le système, il est plus simple de multiplier toutes les lignes pour

avoir des termes sur la diagonale égaux à 1. *Faisons* $L_2 \to L_2/3, L_3 \to L_3/4$ *ce qui donne*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

qui correspond au système

$$\begin{cases} x & -y & +z & = 2 \\ & y & -z & = -1 \\ & & z & = 1/2 \end{cases}$$

qui admet une solution unique $(1, -1/2, 1/2)$.

Exemple 2.2.3 *Soit*

$$\begin{cases} 2x & + & y & -z & = 1 \\ 3x & + & 3y & -z & = 2 \\ 2x & + & 4y & & = 3 \end{cases}$$

que l'on traduit en

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Le premier pivot est 2 *et on applique* $L_2 \to L_2 - \frac{3}{2}L_1, L_3 \to L_3 - L_1$ *pour obtenir*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Le deuxième pivot est $3/2$ *et on applique* $L_3 \to L_3 - 2L_2$ *pour obtenir*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que le troisième pivot est nul, l'algorithme de Gauss est terminé et l'ensemble des solutions est vide à cause de la troisième ligne donne un équation sans solution.

Exemple 2.2.4 *Soit le système*

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & -2x_3 & +x_4 & +x_5 & = 1 \\ x_1 & +3x_2 & -x_3 & +3x_4 & +2x_5 & = 3 \\ x_1 & +3x_2 & -x_3 & +4x_4 & +4x_5 & = 4 \end{cases}$$

que l'on traduit en

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Le premier pivot est 1 *et on applique* $L_2 \to L_2 - L_1, L_3 \to L_3 - L_1$ *pour obtenir*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Le deuxième pivot est nul et la deuxième colonne au-dessous du pivot est nul. On doit donc chercher le pivot dans la troisième colonne et c'est un 1*, on applique* $L_3 \to L_3 - L_2$ *pour obtenir*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

L'algorithme de Gauss est terminé, on constate que les pivots non nuls sont dans les colonnes $1,\ 3,\ 4$*. On va utiliser des combinaisons de lignes comme dans la méthode du pivot de Gauss pour qu'il ne reste dans ces colonnes qu'un coefficient non nul égal à* 1*. Une fois ces opérations effectuées on exprimera les inconnues* $x_1,\ x_3,\ x_4$ *qui correspondent aux colonnes des pivots grâce aux autres inconnues* $x_2,\ x_5$*. Supprimons d'abord le coefficient* -2 *en première ligne de la troisième colonne par la transformation* $L_1 \to L_1 + 2L_2$*, on obtient*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Il nous faut ensuite annuler les coefficients 5 *et* 2 *de la quatrième colonne au moyen des transformations* $L_1 \to L_1 - 5L_3,\ L_2 \to L_2 - 2L_3$*, pour obtenir*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Le tableau est maintenant sous sa forme finale que l'on appellera réduite dans la suite du cours et le système est

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & +3x_2 & & & -7x_5 & = & 0 \\ & & x_3 & & -3x_5 & = & 0 \\ & & & x_4 & +2x_5 & = & 1. \end{array}\right.$$

On pose $x_2 = \lambda, x_5 = \mu$ *deux paramètres arbitraires et on exprime les inconnues* $x_1 = -3\mu + 7\lambda, x_3 = 3\lambda,\ x_4 = 1 - 2\lambda$ *en utilisant ceux-ci. On constate sur cet exemple que le nombre de paramètres indépendants dont nous avons eu besoin est* $p = 2$*.*

Chapitre 3

Calcul matriciel

Les matrices sont des tableaux de nombres. Cette notion est en particulier très utilisée en dehors des mathématiques en informatique. Le début du cours introduit des notions d'opérations sur ces tableaux qui généralisent de manière très naturelle le calcul usuel sur les nombres tout au moins en ce qui concerne l'addition, et la multiplication par un réel. Les choses sont beaucoup moins simples pour ce qui est de la multiplication des matrices entre elles. Nous établirons un lien avec les manipulations élémentaires sur les systèmes linéaires pour motiver cette opération.

3.1 Opérations sur les matrices

3.1.1 Ensemble des matrices

Commençons par fixer les notations pour ces tableaux que nous appelons matrices.

Définition 3.1.1 *On note $\mathcal{M}(m,n,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels, avec m lignes et n colonnes. Si $A \in \mathcal{M}(m,n,\mathbb{R})$,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

est aussi notée $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n}$. On peut omettre les indices si toutes les matrices utilisées ont le même nombre de lignes et de colonnes.

Pendant ce semestre nous n'utiliserons que des matrices à coefficients réels. Nous noterons donc leur ensemble $\mathcal{M}(m,n)$ mais il existe aussi des matrices à coefficients complexes.

Exemple 3.1.1

$$(i-j)_{1\leq i\leq 2,\ 1\leq j\leq 3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(0)_{1\leq i\leq 3,\ 1\leq j\leq 2,} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice nulle qui ne contient que des coefficients nuls et qui admet une généralisation dans $\mathcal{M}(m,n)$ *pour tout* $m,\ n$.

$$(0)_{1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n} = (a_{ij})$$

où tous les coefficients a_{ij} *sont nuls.*

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice identité de $\mathcal{M}(3,3,\mathbb{R})$. *Cette matrice admet une généralisation pour tout entier* n

$$I_n = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n},$$

où $a_{ij} = 0$ *si* $i \neq j$ *et* $a_{ii} = 1$ *pour* $i = 1$ *à* n. *La matrice* I_n *possède des* 1 *sur la diagonale et des* 0 *en dehors de la diagonale.*

Cas particuliers :
- $m = 1$, on dit que $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.
- $n = 1$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ est appelée matrice colonne.

On s'intéressera aussi aux matrices carrées pour lesquelles $m = n$.

3.1.2 Opérations

Addition

La somme de deux matrices A et B de $\mathcal{M}(m,n)$ est la matrice définie par la formule suivante :

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) \overset{def}{=} (a_{ij} + b_{ij}),$$

on ajoute les coefficients qui ont la même position :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 9 & 11 & 13 \end{pmatrix}.$$

On remarque que (0) la matrice nulle joue le même rôle que 0 dans $\mathbb{R}$:

$$A + (0) = (0) + A = A. \tag{3.1}$$

(0) est appelé élément neutre. D'autre part pour $A,\ B,\ C \in \mathcal{M}(m,n)$

$$(A + B) + C = A + (B + C); \tag{3.2}$$

si $A = (a_{ij})$ et $-A = (-a_{ij})$

$$A + (-A) = (0); \tag{3.3}$$

De plus

$$A + B = B + A. \tag{3.4}$$

Définition 3.1.2 *L'ensemble $(\mathcal{M}(m,n), +)$ muni de l'addition $+$ est un groupe commutatif parce qu'il vérifie les propriétés (3.1) (3.2) (3.3) (3.4).*

Multiplication par un réel

Le produit d'une matrice A de $\mathcal{M}(m,n)$ par $\lambda \in \mathbb{R}$ est la matrice notée λM définie par :

$$\lambda(a_{ij}) \stackrel{def}{=} (\lambda a_{ij}).$$

On vérifie facilement les propriétés suivantes :

$$1A = A \tag{3.5}$$

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A \tag{3.6}$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \tag{3.7}$$

et

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B. \tag{3.8}$$

En résumé le calcul sur $(\mathcal{M}(m,n), +, .)$ possède les mêmes règles de développement, factorisation que celui sur $(\mathbb{R}, +, .)$.

Produit de deux matrices

Définition 3.1.3 *Le produit d'une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n}$ de $\mathcal{M}(m,n)$ par une matrice $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$ de $\mathcal{M}(n,p)$ est une matrice de $\mathcal{M}(m,p)$ définie par*

$$C = AB = (c_{ij})_{1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq p}$$

où

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}. \tag{3.9}$$

Remarque 3.1.1 *On ne peut pas multiplier une matrice de $\mathcal{M}(3,4)$ avec une matrice de $\mathcal{M}(5,6)$! Il faut que les dimensions concordent.*

Une méthode pratique de présentation des calculs :

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & b_{1j} & \dots \\ \dots & \dots & b_{2j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & b_{nj} & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & c_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Exemple 3.1.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1+6+15 & 2+8+18 \\ 4+15+30 & 8+20+36 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}$$

Exemple 3.1.2 *Si* $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n}$, *et* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, *alors*

$$AX \quad = \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

donc l'équation $AX = B$ *pour des matrices est une manière compacte d'écrire un système linéaire général avec* m *équations,* n *inconnues et un second membre*

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 & +\ldots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +\ldots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & + & + \vdots & = \vdots \\ a_{m1}x_1 & +\ldots & +a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases} \tag{3.10}$$

Proposition 3.1.1 *Le produit de matrices est associatif. Plus précisément si* $A \in \mathcal{M}(m,n)$, $B \in \mathcal{M}(n,p)$, $C \in \mathcal{M}(p,q)$ *alors on a*

$$(AB)C = A(BC) \tag{3.11}$$

qui est une matrice de $\mathcal{M}(m,q)$.

*P*reuve

Le seul problème réside dans la manipulation des indices. Appelons $D = (d_{ih})$ la matrice AB; le coefficient de la i ème ligne et de la h ème colonne est donné par

$$d_{ih} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kh},$$

donc le coefficient i, j de $(AB)C = E$ est donné par

$$\sum_{h=1}^{p} d_{ih}c_{hj} = \sum_{h=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kh} \right) c_{hj} \tag{3.12}$$

$$= \sum_{h=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kh}c_{hj} \tag{3.13}$$

$$= e_{ij}. \tag{3.14}$$

Calculons maintenant le coefficient k, j de $D' = BC = (d'_{kj})$

$$d'_{kj} = \sum_{h=1}^{p} b_{kh}c_{hj},$$

le coefficient i, j de $E' = A(BC) = (e'_{ij})$ est obtenu en faisant :

$$e'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}d'_{kj} \tag{3.15}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{h=1}^{p} b_{kh}c_{hj} \right) \tag{3.16}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{p} a_{ik}b_{kh}c_{hj} \tag{3.17}$$

d'où l'égalité que l'on appelle associativité.

Proposition 3.1.2 *Le produit des matrices est distributif par rapport à l'addition. Plus précisément, si A et B sont des matrices de $\mathcal{M}(m,n)$ et C, D de $\mathcal{M}(n,p)$ alors*

$$A(C+D) = AC + AD \tag{3.18}$$

et

$$(A+B)C = AC + BC \tag{3.19}$$

*P*reuve Voir exercices.

3.1.3 Matrices carrées

Si on multiplie deux matrices de $\mathcal{M}(m,m)$, on trouve un élément de $\mathcal{M}(m,m)$, on dit que l'opération est interne. D'où plusieurs questions qui proviennent de la comparaison avec $(\mathbb{R}, \times)$.

Existence d'un élément neutre ?

(C'est l'équivalent de $x \times 1 = 1 \times x = x$.) Ici, on a la matrice $I_m \in \mathcal{M}(m,m)$ qui n'a que des 0 sauf sur la diagonale où elle possède des 1.

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que

$$I_m A = A I_m = A \tag{3.20}$$

pour toute matrice $A \in \mathcal{M}(m,m)$ en utilisant les règles de la multiplication des matrices. On appelle I_m la matrice identité. On écrit I_m I quand la taille de la matrice est connue.

Exercice 3.1.1 *Faire la vérification de* (3.20). *C'est un bon entraînement au calcul de produits de matrices.*

Est-ce que l'ordre dans le produit est important ?

En d'autres termes est-ce que $(\mathcal{M}(m,m), \times)$ est commutatif ?

Exemple 3.1.2 *Si $m \geq 2$ Vérifiez que*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

et que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

Cet exemple suffit à montrer la proposition suivante.

Proposition 3.1.3 *Le produit de matrices pour $m \geq 2$ n'est pas une opération commutative (ou abélienne).*

Remarque 3.1.2 *$(\mathcal{M}(1,1), \times)$ a les mêmes propriétés que $(\mathbb{R}, \times)$, en particulier il est commutatif.*

Application : formule du binôme (optionnel).

On dispose de la notion de puissance d'une matrice carrée

$$A^k \stackrel{def}{=} \underbrace{A \times \ldots \times A}_{k \text{ fois}}. \tag{3.23}$$

On rappelle également que :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

La formule suivante dite du binôme de Newton est l'analogue de la formule de même nom connue pour les réels.

Proposition 3.1.4 *$\forall m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}(m,m)$ et $B \in \mathcal{M}(m,m)$, si $AB = BA$ alors*

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}. \tag{3.24}$$

Preuve L'hypothèse $AB = BA$ permet d'utiliser les mêmes règles de calcul sur $\mathcal{M}(m,m)$ que dans $\mathbb{R}$. Ainsi peut-on prouver cette formule comme on prouvait la formule du binôme de Newton pour les réels, par exemple par récurrence ou en utilisant un peu de dénombrement.

Inversibilité d'une matrice

Définition 3.1.4 *On dit qu'une matrice carré est inversible, s'il existe une matrice carrée notée A^{-1} appelée inverse de A telle que*

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

(où I est la matrice identité). L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}(n,n,\mathbb{R})$ est noté $GL(n,\mathbb{R})$.

Remarque 3.1.3 *On ne peut pas inverser de matrices de $\mathcal{M}(m,n)$ si $m \neq n$.*

Remarque 3.1.4 *Toute matrice n'est pas inversible : la matrice nulle (0) n'a pas d'inverse car $\forall A \in \mathcal{M}(m,m,\mathbb{R})$*

$$A(0) = (0) \neq I.$$

C'est le même phénomène que le fait que 0 *n'a pas d'inverse dans* $(\mathbb{R}, \times)$. *Ce qui est nouveau par rapport à l'ensemble des nombres réels c'est qu'il y a des matrices non nulles qui n'ont pas d'inverse. Par exemple* $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *n'a pas d'inverse. En effet*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $N^2 = (0)$. *Si on suppose qu'il existe un inverse* A *de* N *(raisonnement par l'absurde),* A *vérifie* $AN = I$ *et donc*

$$\begin{aligned} (AN)N &= I \times N \\ &= N \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} (AN)N &= AN^2 \\ &= A(0) \\ &= (0) \end{aligned}$$

ce qui conduit à la contradiction $N = (0)$ *et l'on en déduit que* N *n'a pas d'inverse.*

Remarque 3.1.5 *Si* $A \in GL(n, \mathbb{R})$, *l'inverse* A^{-1} *est unique. En effet si* B, C *sont deux inverses de* A *alors*

$$B = B(AC) = (BA)C = C.$$

Remarque 3.1.6 *Si* A, $B \in GL(n, \mathbb{R})$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. *Faire attention au changement dans l'ordre du produit. En effet*

$$\begin{array}{llll} B^{-1}A^{-1}AB & = B^{-1}IB & = B^{-1}B & = I \\ ABB^{-1}A^{-1} & = AIA^{-1} & = A^{-1}A & = I. \end{array}$$

On peut résumer ce que l'on sait sur $GL(n, \mathbb{R})$ dans le théorème suivant.

Théorème 3.1.1 *Pour* $n \geq 2$, $GL(n, \mathbb{R})$, *est un groupe non commutatif.*

Si $n = 1$ $GL(1, \mathbb{R})$ est un groupe mais il est commutatif. En fait c'est un groupe très ressemblant au groupe des réels privés de 0 muni de la multiplication usuelle.

3.2 Matrices et systèmes linéaires

3.2.1 Transformation de systèmes et matrices

On a remarqué que l'on peut écrire un système sous la forme matricielle

$$AX = B.$$

Définition 3.2.1 *On rappelle que deux système linéaires (S) et (S') ayant le même nombre d'inconnues sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.*

On va voir que pour un système présenté sous forme matricielle, la multiplication de A et de B par une matrice G inversible transforme un système (S) en un système équivalent.

Proposition 3.2.1 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}(m,n)$ et G une matrice de $GL(m,\mathbb{R})$. Les systèmes (S) $AX = B$ et (S') $(GA)X = GB$ sont équivalents.*

*P*reuve

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est une solution de (S) alors $AX = B$ donc $(GA)X = GB$. On ne perd pas de solution.

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est une solution de (S') alors $(GA)X = GB$. Comme G est inversible,

$$\begin{aligned} G^{-1}(GA)X &= G^{-1}(GB) \\ &= (G^{-1}G)B \\ &= B \end{aligned}$$

donc $AX = B$. On ne gagne pas de solutions.

En fait la résolution d'un système linéaire revient à une propriété d'inversibilité.

Remarque 3.2.1 *Un cas est particulièrement intéressant : A inversible. On prend alors $G = A^{-1}$, et l'on voit que le système $AX = B$ est équivalent au système $X = A^{-1}B$ qui possède une unique solution, obtenue en faisant le produit matriciel $A^{-1}B$. Un système linéaire qui possède une solution unique est appelé système de Cramer.*

Dans le premier chapitre, pour résoudre des systèmes linéaires, on a utilisé dans la méthode du pivot de Gauss, des transformations élémentaires. Nous allons interpréter ces transformations comme des produits de matrices.

Rappelons tout d'abord la liste de ces transformations élémentaires :

1. On notera $L_i \leftrightarrow L_j$ la transformation qui échange la ligne i et la ligne j.
2. On notera $L_i \rightarrow \lambda L_i$ la transformation qui multiplie la $i$ème ligne par le réel $\lambda \neq 0$.
3. On notera $L_i \rightarrow L_i + L_j$ la transformation qui remplace la ligne i par la ligne i plus la ligne j.

L'intérêt de ces transformations est qu'elles transforment un système linéaire en un système équivalent. La méthode du pivot de Gauss consiste à les utiliser de manière systématique pour obtenir l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Exemple 3.2.1 *Supposons que l'on ait un système linéaire* $AX = B$ *où la matrice* A *s'écrive* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(3,4)$. *Considérons la transformation* τ *qui échange la ligne* 1 *et la ligne* 2. *Si l'on applique la transformation* τ *à la matrice identité* $I_3 \in \mathcal{M}(3,3)$ *on obtient* $\tau(I_3)$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \tau(I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

et la transformée de A *que nous notons*

$$\tau(A) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

peut être obtenue comme le produit de la matrice $\tau(I_3)A$. *Vérifier que*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

En fait cet exemple est général et s'étend à toutes les transformations élémentaires.

Proposition 3.2.2 *Soit un système linéaire présenté sous la forme* $AX = B$ *avec* $A \in \mathcal{M}(m,n)$ *et* τ *une transformation élémentaire. Si* τ *transforme* A *en une matrice* $\tau(A)$ *et la matrice identité* I_m *de* $GL(m,\mathbb{R})$ *en* $\tau(I_m)$ *alors*

$$\tau(A) = \tau(I_m)A.$$

La preuve de cette proposition sera faite en exercice.

3.2.2 Rang, calcul d'inverse par le pivot de Gauss(optionnel)

La méthode du pivot de Gauss vise à transformer un système en un système plus simple au moyen de transformations élémentaires. Encore faut-il savoir ce qu'on appelle un système simple et quand il faut arrêter les transformations. Vu sous forme matricielle le système $AX = B$ *est un système simple si la matrice* A *est réduite au sens de la définition suivante. Nous noterons* $\min(m,n)$ *le minimum de* m *et de* n.

Définition 3.2.2 *Une matrice $R \in \mathcal{M}(m,n)$ est dite réduite de rang r ($0 \leq r \leq \min(m,n)$) si elle est obtenue à partir de la matrice identité $I_r \in GL(r,\mathbb{R})$, d'une part en ajoutant $m-r$ lignes de zéros en bas de la matrice, d'autre part en ajoutant entre les colonnes j et $j+1$ (pour j allant de 0 à n) un nombre quelconque de colonnes de la forme*

$$\begin{pmatrix} X \\ X \\ X \\ \vdots \\ X \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où les X représentent des réels quelconques, non forcément égaux et où la dernière ligne où se trouve un X est la $j$ème, il y a donc $m-j$ 0 sous les X dans la colonne précédente.

La forme des matrices réduites est un peu lourde, donnons un exemple pour mieux comprendre la construction.

Exemple 3.2.2 *Une matrice de $\mathcal{M}(5,10)$ réduite de rang 3 peut être de la forme*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & X & X & X & 0 & X & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On est parti de

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a ajouté $5-3$ lignes de zéros en bas de la matrice et on a complété par $10-3$ colonnes. Sur l'exemple les deux premières colonnes ont été mises en premier d'où $j=0$ et elles ne contiennent que des 0. En revanche les colonnes 4, 5, 6 correspondent à $j=1$ et possèdent en première ligne un X. De même la colonne 8 correspond à $j=2$ et possède des X au deux premières lignes. Enfin la colonne 10 correspond à $j=3$.

Remarque 3.2.2 *Une matrice réduite de rang 0 est la matrice nulle.*

Théorème 3.2.1 *Soit une matrice A de $\mathcal{M}(m,n)$. Il existe une matrice inversible G de $GL(m,\mathbb{R})$ telle que GA soit une matrice réduite. Toutes les matrices GA obtenues de cette manière ont même rang.*

Idée de preuve

On construit la matrice G comme un produit de matrices $\tau(I_m)$ associées aux transformations élémentaires que l'on applique quand on résout le système $AX = B$ par l'algorithme du pivot de Gauss.

Nous avons défini le rang d'une réduite de Gauss, grâce au théorème 3.2.1 on peut définir le rang d'une matrice quelconque.

Définition 3.2.3 *Nous dirons qu'une matrice $A \in \mathcal{M}(m,n)$ est de rang r si une matrice réduite associée dans le théorème 3.2.1 est de rang r.*

En particulier $0 \leq r \leq \min(m,n)$.

On va envisager le cas particulier des matrices carrées pour lesquelles la situation est plus simple.

Théorème 3.2.2 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}(m,m)$ il y a équivalence entre les propriétés suivantes :*

1. *A est inversible.*
2. *Le rang de A est m.*
3. *Pour toute matrice colonne B, le système $AX = B$ a une solution unique.*

Remarque 3.2.3 *Le rang de $A \in \mathcal{M}(m,m)$ est m si une matrice réduite associée à A n'a pas de lignes nulles.*

Remarque 3.2.4 *la seule matrice réduite de $\mathcal{M}(m,m)$ de rang m est l'identité.*

Preuve

Montrons que 1. $\Rightarrow$ 3.

On a vu que si A est inversible la solution unique du système est donnée par $X = A^{-1}B$.

Montrons que 3. $\Rightarrow$ 2.

En fait on démontre la contraposée c'est à dire que si 2. est faux alors 3. est faux.

Si le rang de A est strictement inférieur à m, la dernière ligne de A n'est composée que de 0, on suppose que G est une matrice inversible du théorème 3.2.1 telle que $GA = R$. On considère

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

et essayons de résoudre le système $AX = G^{-1}B$, celui ci est équivalent au sens de la définition 2.1.1 à

$$GAX = GG^{-1}B$$

ce qui revient à

$$RX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Or la dernière ligne de la matrice R est composée de 0 et

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui ne peut être égal à B, donc $AX = G^{-1}B$ n'a pas de solution.

Montrons que 2. $\Rightarrow$ 1. Comme nous l'avons constaté dans la remarque 3.2.4, la seule matrice réduite de $\mathcal{M}(m,m)$ de rang m est l'identité. On a donc $GA = I$ d'où $A = G^{-1}$ et la matrice A est inversible.

Chapitre 4

Espaces vectoriels

4.1 Structure vectorielle

En étudiant les matrices nous avons remarqué des propriétés appelées algébriques, de l'addition et de la multiplication par un réel. Ces propriétés sont très répandues. Cela présente l'intérêt de pouvoir étendre en analyse (voir cours sur les suites), géométrie, physique des résultats que l'on connaît pour les matrices.

4.1.1 Vecteurs et géométrie

En physique pour représenter les forces ou les vitesses et en géométrie, on définit des vecteurs que l'on prendra ici tous avec une origine commune 0. On connaît alors deux opérations sur les vecteurs.

Addition : règle du parallélogramme.

La règle du parallélogramme permet de définir la somme

$$\vec{OM} + \vec{ON} = \vec{OP}$$

On vérifie que

- $$\vec{OM} + \vec{ON} = \vec{ON} + \vec{OM}$$

  (Commutativité.)
- $$(\vec{OM} + \vec{ON}) + \vec{OP} = \vec{ON} + (\vec{OM} + \vec{OP}).$$

  (Associativité.)
- L'élément neutre correspond au vecteur où l'extrémité est confondue avec l'origine O, on note ce vecteur $\vec{O}$.
- Il existe un symétrique, appelé vecteur opposé qui est tel que

$$\vec{OM'} + \vec{OM} = \vec{O} = \vec{OM} + \vec{OM'}$$

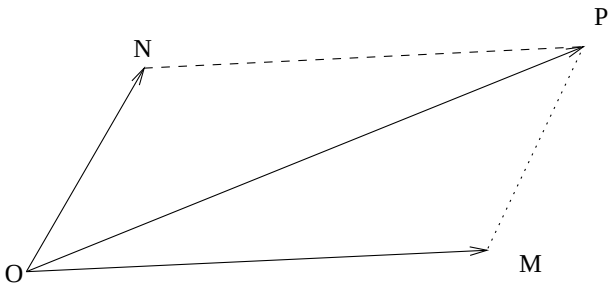

FIG. 4.1 – Règle du parallélogramme.

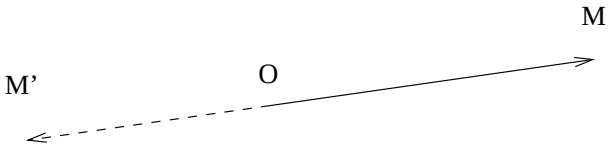

FIG. 4.2 – Vecteur opposé.

Géométriquement on prend M' symétrique de M par rapport à O.
L'ensemble des vecteurs du plan muni de l'addition est un groupe commutatif.

Multiplication par un réel

- pour $\lambda > 0$, si $O\vec{M}' = \lambda O\vec{M}$, M' est obtenu en faisant une homothétie de centre O et de rapport λ

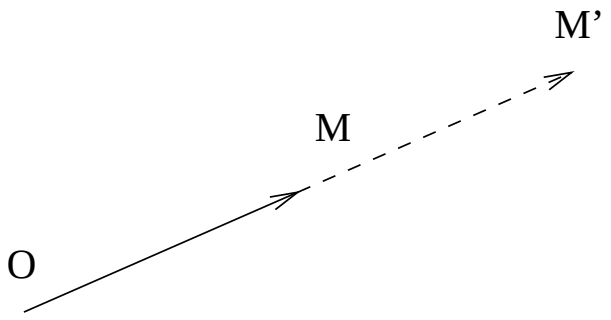

FIG. 4.3 – Multiplication par 2.

- pour $\lambda < 0$, on fait une symétrie par rapport à l'origine O pour obtenir $-O\vec{M} = (-1)O\vec{M}$, puis on fait une une homothéthie de centre O et de rapport $|\lambda|$ pour obtenir $\lambda O\vec{M}$.

Remarque 4.1.1 *On vérifie les propriétés pour tout* λ, μ *dans* $\mathbb{R}$ *:*
(b1) $1.O\vec{M} = O\vec{M}$,

(b2) $\lambda(\mu\vec{OM}) = (\lambda\mu)\vec{OM}$,

(b3) $\lambda(\vec{OM} + \vec{ON}) = \lambda\vec{OM} + \lambda\vec{ON}$,

(b4) $(\lambda + \mu)\vec{OM} = \lambda\vec{OM} + \mu\vec{OM}$.

Ces propriétés sont communes avec celles observées pour $(\mathcal{M}(m,n), +, .)$ *où* . *est la multiplication par un réel.*

4.1.2 Définition algébrique

Définition 4.1.1 *On dit qu'un ensemble* E *muni d'une addition, et d'une multiplication par un réel, est un espace vectoriel si et seulement si :*

a) $(E, +)$ *est un groupe commutatif, c'est à dire pour tout* $u,\ v,\ w \in E$ *et* $\lambda,\ \mu$ *dans* $\mathbb{R}$ *:*

- **(a1)** $(u + v) + w = u + (v + w)$,
- **(a2)** *il existe un élément neutre* 0_E *qui vérifie* $0_E + u = u + 0_E = u$;
- **(a3)** *tout* u *admet un élément symétrique noté* $(-u) \in E$ *tel que* $u + (-u) = (-u) + u = 0_E$;
- **(a4)** $u + v = v + u$;

et les propriétés

b)
- **(b1)** $1.u = u$
- **(b2)** $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$
- **(b3)** $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- **(b4)** $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

On peut se poser la question de savoir pourquoi les mathématiciens ont retenu ces propriétés et pas d'autres. Une réponse est que l'expérience montre que ce sont les plus utiles...

4.1.3 Exemples

$\mathcal{M}(m,n)$

Nous avons vérifié dans la partie 3.1 que $(\mathcal{M}(m,n), +, .)$ est un espace vectoriel. En particulier si $n = 1$, l'ensemble $\mathcal{M}(m,1)$ des matrices colonnes $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$ munies de l'addition

$$u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_m + v_m \end{pmatrix}$$

et de la multiplication

$$\lambda.u = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_m \end{pmatrix}$$

est un espace vectoriel, on parle aussi dans ce cas de vecteurs colonnes.

Si $m = 1$ on retrouve $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets $x = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ ou des matrices lignes. On verra que $\mathbb{R}^n$ est le modèle de beaucoup d'espaces vectoriels.

Polynômes de degré inférieur à 3.

On dispose d'une addition et d'une multiplication naturelle sur les polynômes. Un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 s'écrit

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

pour $a,\ b,\ c,\ ,d$ des réels quelconques éventuellement nuls. Notons

$$Q(x) = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d'$$

un deuxième polynôme de degré inférieur à 3. On définit l'addition des polynômes par

$$(P+Q)(x) = (a+a')x^3 + (b+b')x^2 + (c+c')x + (d+d'), \tag{4.1}$$

qui est l'opération classique. De même, la multiplication par un réel est définie par

$$(\lambda P)(x) = (\lambda a)x^3 + (\lambda b)x^2 + (\lambda c)x + (\lambda d). \tag{4.2}$$

L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 muni de ces opérations est un espace vectoriel. Si l'on se reporte à la définition d'espace vectoriel, on constate que l'on a huit propriétés à montrer. Nous ne ferons pas ces vérification ici, à cause de leur caractère fastidieux mais nous allons montrer l'associativité de l'addition pour comprendre pourquoi elles sont vraies. Cela permettra de voir aussi comment rédiger ces vérifications. Soit

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

$$Q(x) = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d'$$

et

$$R(x) = a''x^3 + b''x^2 + c''x + d''$$

trois polynômes de degrés 3 quelconques. Pour établir **(a1)** nous devons montrer

$$(P+Q)+R = P+(Q+R).$$

Bien que vous utilisiez cette propriété sur les polynômes depuis longtemps, astreignons-nous à la vérifier comme un juriste applique une règle de droit,

en n'utilisant que les propriétés des réels et les définitions des opérations sur les polynômes que nous venons de rappeler. D'abord

$$(P+Q)(x) = (a+a')x^3 + (b+b')x^2 + (c+c')x + (d+d')$$

et si on applique à nouveau la règle (4.1) on obtient

$$((P+Q)+R)(x) = ((a+a')+a'')x^3+((b+b')+b'')x^2+((c+c')+c'')x+((d+d')+d'').$$

On utilise alors l'associativité pour les nombres réels $(a+a')+a'' = a+(a'+a'')$. Comme cette règle s'applique aussi bien pour les b les c ou les d on obtient

$$((P+Q)+R)(x) = (a+(a'+a''))x^3+(b+(b'+b''))x^2+(c+(c'+c''))x+(d+(d'+d'')).$$

Maintenant on constate que

$$(Q+R)(x) = (a'+a'')x^3 + (b'+b'')x^2 + (c'+c'')x + (d'+d'')$$

et que

$$(P+(Q+R))(x) = (a+(a'+a''))x^3+(b+(b'+b''))x^2+(c+(c'+c''))x+(d+(d'+d'')).$$

Cela montre la propriété **(a1)**.

Attention dans les exercices où ces vérifications sont demandées, on est obligé d'être aussi pointilleux pour obtenir les points de l'exercice !

Pourtant si on reprend la vérification de **(a1)**, une explication rapide dirait "que l'associativité sur $\mathbb{R}$ entraîne celle de l'addition pour les polynômes". En revanche dans la suite du cours, on établira que des ensembles sont des espaces vectoriels en utilisant des procédés plus rapides. Pour l'instant, nous nous contenterons d'admettre que les autres vérifications "marchent" comme l'associativité. L'ensemble des polynôme de degré inférieur ou égal à 3 noté $\mathbb{R}_3[x]$ est un espace vectoriel, l'indice 3 correspond au degré maximal des polynômes de l'espace vectoriel et le symbole $\mathbb{R}$ rappelle que les coefficients sont réels. Notons que l'élément neutre de cet espace vectoriel est le polynôme nul qui est obtenu en faisant $a = b = c = d = 0$ dans la présentation générale des polynômes de degré inférieur ou égal à 3

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

ce polynôme est souvent noté $0(x)$ et en reprenant la définition (4.1) on constate aisément que pour tout polynôme Q

$$(0+Q)(x) = (Q+0)(x) = Q(x).$$

Les polynômes de degré exactement égal à 3 : ce n'est pas un espace vectoriel

Il est clair que nous avons choisi arbitrairement le degré 3 dans l'exemple précédent . Les polynômes de degré inférieur ou égal à 4, 5, ou plus généralement

un entier fixé n sont aussi des espaces vectoriels. Toutes ces remarques donnent l'impression que tous les espaces formés à partir des polynômes sont des espaces vectoriels. Cela est faux, montrons-le par un contre-exemple. Considérons l'ensemble des polynômes de degré exactement égal à 3 muni de la même addition et de la même multiplication que précédemment. On vérifiera sans problème les propriétés **(a1)**, **(a4)**, **(b1)**, **(b2)**, **(b3)** et **(b4)**. Pourtant cet ensemble n'est pas un espace vectoriel car la somme de deux polynômes de degré 3 peut-être de degré inférieur à 3. On dit dans ce cas que l'addition n'est pas une opération interne.

Ensemble des fonctions réelles

L'ensemble des fonctions dont le domaine de définition est un intervalle I (ce n'est pas une condition essentielle mais cela permet de fixer les idées) à valeurs réelles est un espace vectoriel muni de l'addition et de la multiplication des fonctions. On notera cet espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Rappelons d'abord que deux fonctions f et g sont égales si et seulement si

$$f(x) = g(x)$$

pour tout $x \in I$. Pour toutes les fonctions f, g, on définit la somme de deux fonctions $f + g$ et la multiplication de f par un réel λ en posant pour tout x réel

$$(f+g)(x) \stackrel{def}{=} f(x) + g(x); \quad (\lambda f)(x) \stackrel{def}{=} \lambda f(x). \tag{4.3}$$

Comme dans l'exemple $\mathbb{R}_3[x]$ nous devons vérifier huits propriétés, nous montrerons ici (**b3**) en laissant le soin au lecteur de vérifier les autres propriétés. Soit un réel λ, f, g deux fonctions nous devons montrer

$$\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g.$$

Comme c'est une égalité entre fonctions, donnons-nous $x \in I$ réel et calculons

$$[\lambda(f+g)](x) = \lambda \times (f+g)(x)$$

on a utilisé (4.3) la définition de la multiplication d'une fonction par λ;

$$= \lambda \times (f(x) + g(x)),$$

on a utilisé (4.3) la définition de l'addition de deux fonctions,

$$= \lambda \times f(x) + \lambda \times g(x)$$

c'est la propriété de développement d'un produit pour des réels,

$$= (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x)$$

on a utilisé (4.3) la définition de la multiplication d'une fonction par λ;

$$= (\lambda f + \lambda g)(x)$$

on a utilisé (4.3) la définition de l'addition de deux fonctions. Comme l'identité est vraie pour tout $x \in I$ on a établi l'égalité des fonctions

$$\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g.$$

L'élément neutre pour l'addition dans le groupe $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ muni de l'addition est la fonction nulle définie par

$$0(x) = 0 \tag{4.4}$$

pour tout réel $x \in I$.

4.1.4 Propriétés élémentaires vraies pour tous les espaces vectoriels

Sur tous les espaces vectoriels on dispose de règles de calcul que l'on connaît bien dans $\mathbb{R}$. Avant cela,notons une convention d'écriture.

Définition 4.1.2 *Si u et v sont deux éléments de l'espace vectoriel E, on note*

$$u - v \stackrel{def}{=} u + (-v)$$

où $(-v)$ est le symétrique de v.

Proposition 4.1.1 *Pour tout λ réel et u élément de l'espace vectoriel E*

$$\lambda.0_E = 0_E \tag{4.5}$$
$$\lambda.(-u) = (-\lambda).u = -(\lambda.u) \tag{4.6}$$
$$0.u = 0_E \tag{4.7}$$
$$\{\lambda.u = 0_E\} \Leftrightarrow \{\lambda = 0 \text{ } ou \text{ } u = 0_E\} \tag{4.8}$$

*P*reuve
Montrons d'abord pour λ réel et v, w éléments de l'espace vectoriel E

$$\lambda(v-w) = \lambda v - \lambda w, \tag{4.9}$$

où le signe $-$ veut dire que l'on additionne le symétrique de λw. En effet

$$\begin{aligned} \lambda(v-w) + \lambda w &= \lambda[(v-w)+w] \quad (\mathbf{b3}) \\ &= \lambda v \quad (\mathbf{a\ 3}) \text{ et } (\mathbf{a\ 1}) \end{aligned}$$

donc

$$\lambda(v-w) + \lambda w - \lambda w = \lambda v - \lambda w$$

et

$$\lambda(v-w) = \lambda v - \lambda w \quad (\mathbf{a\ 3}) \text{ et } (\mathbf{a\ 1}).$$

Si on prend $v = w$ dans (4.9) on obtient

$$\lambda.0_E = \lambda v - \lambda v = 0_E \quad (\mathbf{a\ 3})$$

et (4.5) est démontré.

Si on prend $v = 0_E$ dans (4.9) on a $\lambda(-w) = -(\lambda w)$ ($-$ veut dire élément symétrique dans le groupe $(E, +)$). Mais on peut aussi montrer

$$(\lambda - \mu)v = \lambda v - \mu v \tag{4.10}$$

(Le premier signe $-$ correspond à la soustraction des réels, le second à l'élément symétrique dans le groupe $(E, +)$.) Or

$$(\lambda - \mu)v + \mu v = [(\lambda - \mu) + \mu]v = \lambda v,$$

d'après (**b 4**) puis l'addition dans $\mathbb{R}$, donc

$$(\lambda - \mu)v = \lambda v - \mu v,$$

on a ajouté $-\mu v$ des deux cotés de la dernière égalité et utilisé (**a1**), (**a3**).

Si on prend $\lambda = 0$ dans (4.10), on obtient

$$(-\mu)v = -(\mu v).$$

On a montré (4.6).

Si on prend $\lambda = \mu$ dans (4.10), on obtient

$$0.v = 0_E$$

qui est (4.7).

On a donc montré (4.5), (4.6), (4.7), il reste à voir l'implication $\Rightarrow$ de (4.8).

Supposons $\lambda v = 0_E$ si $\lambda = 0$ il n'y a pas de problème, sinon λ a un inverse dans $\mathbb{R}$ et

$$(1/\lambda)(\lambda v) = ((1/\lambda)\lambda)v = 1v = v$$

mais par ailleurs

$$(1/\lambda)(\lambda v) = (1/\lambda)(0_E) = 0_E$$

ce qui conclut la preuve.

Conclusion : on dispose des même règles de calcul dans $(E, +, .)$ que dans $(\mathbb{R}, +, .)$.

4.2 Systèmes générateurs, systèmes libres et bases

4.2.1 Systèmes générateurs

Dans les espaces vectoriels on peut coder les vecteurs comme des combinaisons linéaires d'un petit nombre de vecteurs.

Exemple 4.2.1 *On code dans $\mathbb{R}_3[x]$ tous les polynômes avec quatre réels et les quatre monômes $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = x^2,\ P_3(x) = x^3$. En effet tout polynôme de degré inférieur ou égal à 3 s'écrit*

$$P = aP_3 + bP_2 + cP_1 + dP_0$$

avec $a,\ b,\ c,\ d$ réels. Ce qui signifie

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

On dispose d'une définition qui étend cette propriété dans le cadre général.

Définition 4.2.1 *On dit que le système $(v_1, \ldots, v_p)$ est générateur si tout vecteur v de l'espace vectoriel peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots, v_p$:*

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1$ à p.

Remarque 4.2.1 *Pourquoi système et non partie ou ensemble de V? On parle de système quand il peut y avoir des répétitions comme dans $(v_1,\ v_1, v_2)$ ce qui n'est pas possible pour les ensembles.*

Remarque 4.2.2 *Nous supposons à partir de cette définition que tous les espaces vectoriels que nous rencontrerons possède un système générateur formé d'un nombre fini de vecteurs. On peut montrer que $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ne vérifie pas cette hypothèse.*

4.2.2 Systèmes libres

Dans la définition des systèmes générateurs, on ne demande pas que les λ_i soient uniques. Si on revient à $\mathbb{R}_3[x]$ et que l'on prend pour système

$$(1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^2 - x),$$

ce système reste générateur car tout polynôme s'écrit

$$P(x) = \lambda_4 x^3 + \lambda_3 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_1,$$

mais deux combinaisons linéaires distinctes peuvent coder le même polynôme. Si on prend les $\lambda_i = 0$ sauf $\lambda_3 = 1$ la combinaison linéaire donne $P(x) = x^2$. Par ailleurs $\lambda_i = 0$ sauf $\lambda_2 = \lambda_5 = 1$ donne

$$Q(x) = 1.x + 1(x^2 - x) = x^2 = P(x).$$

Définition 4.2.2 *On dit que le système* $(v_1, \ldots, v_p)$ *est libre si*

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = 0_E$$

implique $\lambda_i = 0$ *pour* $i = 1$ *à* p. *On dit d'un système de vecteurs qui ne sont pas libres, qu'ils sont linéairement dépendants ou liés.*

Remarque 4.2.3 *Le fait d'être un système lié n'a pas de rapport simple avec le fait d'être un système générateur. En revanche, on verra au corollaire 4.3.1 une relation qui n'est pas évidente.*

Remarque 4.2.4 *On demande l'unicité de l'écriture pour* 0_E *dans la définition 4.2.2.*

Proposition 4.2.1 *Si le système* $(v_1, \ldots, v_p)$ *est libre et que* w *est une combinaison linéaire des vecteurs* v_i, *il existe un unique* p*-uplet* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ *tel que*

$$w = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i. \tag{4.11}$$

*P*reuve
Supposons que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_p)$ satisfont (4.11) alors

$$w = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i v_i.$$

On fait la différence et on regroupe,

$$0_E = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \mu_i) v_i,$$

donc $\lambda_i - \mu_i = 0$ pour $i = 1$ à p, ou encore $\lambda_i = \mu_i = 0$ pour $i = 1$ à p.

Exemple 4.2.2 *Soit* $E = \mathcal{M}(2, 2, \mathbb{R})$, *on montre que le système*

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

est un système libre. Supposons

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc pour $i = 1$ *à* 4, $\lambda_i = 0$.

Exemple 4.2.3 *Est-ce que le système* $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ *est libre ?*

On écrit

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

ce qui revient à

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3\\ \lambda_2 + 2\lambda_3\\ 0\end{pmatrix}$$

et c'est équivalent à résoudre le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Comme prévu nous avons la solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, *mais ce qui nous intéresse est de savoir s'il y en a d'autres. Dans cet exemple pour* λ_3 *donné,* $(3\lambda_3, -2\lambda_3, \lambda_3)$ *est aussi une solution. Si on cherche un exemple concret pour conclure que le système* (v_1, v_2, v_3) *n'est pas libre on peut fixer* $\lambda_3 = 1$ *qui donne la combinaison linéaire*

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + -2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

4.2.3 Bases

Définition 4.2.3 *Un système de vecteurs* $(e_1, \ldots, e_p)$ *générateur et libre est appelé base de l'espace vectoriel. Tout vecteur* $v \in E$ *se décompose de manière unique sur une base* $(e_1, \ldots, e_p)$ *: il existe un unique* p*-uplet* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ *tel que* $v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$. *Les coefficients* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ *de la décomposition de* v *sur la base* $(e_1, \ldots, e_p)$ *sont appelés les coordonnées de* v *sur la base.*

Exercice 4.2.1 *Montrer que le système de matrices* $E_{ij} = (a_{kl})$, *où* $a_{kl} = 0$ *sauf si* $k = i$, $j = l$ *et* $a_{ij} = 1$ *dans ce cas, est une base de* $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{R})$.

Les bases sont particulièrement intéressantes parce qu'elles permettent de travailler sur un espace vectoriel en n'utilisant que les coordonnées qui sont des réels. On va voir que le nombre d'éléments d'une base est déterminé par l'espace vectoriel.

Proposition 4.2.2 *Si l'espace vectoriel* E *possède un système générateur de* m *éléments* $(v_1, \ldots, v_m)$ *tout système libre a au plus* m *éléments.*

*P*reuve

Soit $(w_1, \ldots, w_n)$ un système de n vecteurs montrons que si $n > m$, ces vecteurs sont liés. Comme le système $(v_1, \ldots, v_m)$ est générateur, on peut décomposer chacun des vecteurs w_j sur ce système et pour $j = 1$ à n,

$$w_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i.$$

Cherchons les n-uplets $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $0_E = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n$. On a alors

$$\begin{aligned}
\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_j v_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{ij}) v_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{ij}) v_i \\
&= 0_E.
\end{aligned}$$

Donc, s'il existe un n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour $i = 1$ à m

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{ij} = 0$$

alors $(w_1, \ldots, w_n)$ est un système lié. Or ce système linéaire homogène possède plus d'inconnues que d'équations et il admet une solution différente de $(0, \ldots, 0)$ à cause du lemme suivant.

Lemme 4.2.1 *Si $A \in \mathcal{M}(m, n, \mathbb{R})$ avec $n > m$, le système $AX = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ admet une infinité de solutions.*

*P*reuve (optionnelle) *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(m, n, \mathbb{R})$ de rang r. Comme $n > m \geq r$, r est strictement inférieur au nombre d'inconnues. Soit le matrice réduite $R = (r_{ij})$ associée à A. Le système $AX = 0$ est équivalent à $RX = 0$, mais par construction d'une matrice réduite de rang r, il existe r inconnues $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$*

parmi les n qui correspondent aux r colonnes de la matrice identité I_r incluse dans la matrice R. On remarque alors que la $i$ème équation s'écrit

$$x_{j_r} + \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \notin \{j_1, \ldots, j_r\}}} r_{ij} x_j = 0.$$

Le système permet donc de déduire les r inconnues $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ des $n-r$ autres inconnues que l'on peut fixer arbitrairement. Il existe donc une infinité de solutions.

Corollaire 4.2.1 *Deux bases d'un espace vectoriel E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé dimension de l'espace vectoriel E, et on le note* $\dim E$.

*P*reuve

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ et $(f_1, \ldots, f_q)$ deux bases. On déduit $p \leq q$ du fait que le système $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre et que $(f_1, \ldots, f_q)$ est générateur. On déduit $q \leq p$ en échangeant le rôle des bases.

Exemple 4.2.4 *Soit $E = \mathbb{R}^n$, on obtient une base "canonique" en prenant comme $i$ème vecteur $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ où le 1 est en $i$ème place. Une combinaison linéaire quelconque $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, on en déduit que le système est générateur mais aussi l'unicité de l'écriture de $0_{\mathbb{R}^n}$. Donc $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base et* $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Exemple 4.2.5 *On montre que le système $(1,\ x,\ x^2, \ldots, x^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$. On en déduit que* $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$.

Exemple 4.2.6 *Nous avons exclu $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ car il n'a pas de systèmes générateurs avec un nombre fini d'éléments. Dans ce cas, on dit que la dimension de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est infinie, et nous nous sommes restreints aux espaces vectoriels de dimension finie.*

4.3 Sous-espaces vectoriels

4.3.1 Définition, théorème de la base incomplète

Définition 4.3.1 *Un sous-ensemble non vide F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si toute combinaison linéaire de vecteurs de F est encore dans F. On peut caractériser un sous-espace vectoriel par le fait que pour tout $\lambda,\ \mu$ réels et tous vecteurs $w_1,\ w_2 \in F$*

$$\lambda w_1 + \mu w_2 \in F.$$

Remarque 4.3.1 *On étend par récurrence cette propriété à une combinaison linéaire à p éléments :*

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i w_i \in F$$

si λ_i réels et $w_i \in F$.

Remarque 4.3.2 *Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel ! (Le prouver en exercice !) Il est plus facile de démontrer qu'un espace vectoriel est un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel connu, que de vérifier les huits propriétés directement. Par exemple l'ensemble des fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *et dérivables sur* $\mathbb{R}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ *car si* f, g *sont dérivables* $\lambda f + \mu g$ *est aussi dérivable. (Attention c'est aussi un espace vectoriel de dimension infinie.)*

Remarque 4.3.3 *On suppose* F *non vide, donc* F *contient au moins un élément* v *et par stabilité* $0.v + 0v \in F$, *or* $0.v + 0v = 0_E$ *donc l'élément neutre* 0_E *de* E *appartient à tous les sous-espaces vectoriels de* E. *On vérifie sans peine que c'est l'élément neutre de* F *en tant qu'espace vectoriel.*

Théorème 4.3.1 *Toute base d'un sous-espace vectoriel* F *peut être complétée en une base de l'espace vectoriel* E. *Si* $(f_1, \ldots, f_p)$ *est une base de* F, *il existe* $(e_1, \ldots, e_q)$ *vecteurs de* E *tels que* $(f_1, \ldots, f_p, e_1, \ldots, e_q)$ *est une base de* E.

*P*reuve

Soit $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F, supposons qu'il existe $e_1 \in E$ qui n'appartienne pas à F, alors $(f_1, \ldots, f_p, e_1)$ est un système libre de E. Sinon $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base de E. En effet si

$$0_E = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p + \mu e_1$$

alors $\mu = 0$ sinon

$$e_1 = \frac{-\lambda_1}{\mu} f_1 + \cdots + \frac{-\lambda_p}{\mu} f_p \in F$$

ce qui est impossible puisque $e_1 \notin F$. Donc

$$0_F = 0_E = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p,$$

or $(f_1, \ldots, f_p)$ est un système libre donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0 = \mu$ et $(f_1, \ldots, f_p, e_1)$ est un système libre de E.

S'il est générateur la preuve est finie, sinon on prend e_2 qui n'est pas combinaison linéaire de $(f_1, \ldots, f_p, e_1)$ et on continue à ajouter des vecteurs. En fait le procédé de complétion du système s'arrête car on ne peut rajouter plus de $\dim E - p$ vecteurs en gardant un système libre. Il y a une étape, où le système $(f_1, \ldots, f_p, e_1, \ldots, e_q)$ est à la fois libre et générateur dans E, c'est donc une base.

Corollaire 4.3.1

1. *Tout système libre d'un espace vectoriel* E *peut être complété en une base de* E.
2. *Si* $(v_1, \ldots, v_n)$ *est un système libre de* E *et que* $\dim E = n$, *alors* $(v_1, \ldots, v_n)$ *est une base de* E.
3. *Si* $(v_1, \ldots, v_n)$ *est un système générateur de* E *et que* $\dim E = n$, *alors* $(v_1, \ldots, v_n)$ *est une base de* E.

*P*reuve

1. La preuve est contenue dans celle du théorème 4.3.1.

2. Si $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre et non générateur, il existe w qui n'est pas combinaison linéaire des v_i et $(v_1, \ldots, v_n, w)$ est libre et le cardinal de cette famille est supérieur à celui d'un système générateur. D'où une contradiction et $(v_1, \ldots, v_n)$ est générateur.

3. Admis, à faire en exercice.

Le corollaire est très pratique, en particulier le 2., il est facile de déterminer si un système de vecteurs est libre (résolution d'un système linéaire homogène), si l'on connaît la dimension et que l'on a le bon nombre de vecteurs, on a gagné.

4.3.2 Exemples

Donnons quelques exemples de sous-espaces vectoriels en partant de ceux qui ont la dimension la plus petite.

Exemple 4.3.1 *Un cas particulier. Soit E espace vectoriel, $F = \{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel car $\lambda 0_E + \mu 0_E = 0_E$ mais (0_E) n'est pas un système libre. En effet $\lambda 0_E = 0_E$ n'implique pas $\lambda = 0$. On pose conventionnellement* $\dim(0_E) = 0$.

Posons maintenant une définition.

Définition 4.3.2 *On appelle droite vectorielle, un espace vectoriel E de dimension* 1.

Si E est une droite vectorielle, alors tout vecteur $v \neq 0_E$ forme un système (v) de E qui est libre et donc une base de E.

Proposition 4.3.1 *Si F est un sous-espace vectoriel de E* $\dim F \leq \dim E$. *Si F est un sous-espace vectoriel de E et* $\dim F = \dim E$ *alors $E = F$.*

*P*reuve

Comme on peut compléter une base de F en une base de E, le cardinal d'une base de F est inférieur à celui d'une base de E. D'où le résultat.

Si $\dim F = \dim E$ et que l'on prend une base F alors c'est un système libre de E mais il a pour cardinal la dimension de E donc c'est un système générateur de E. Il en résulte que tout vecteur de E est une combinaison linéaire de ce système de F et donc est un vecteur de F, ce qui montre que $E \subset F$ et donc $F = E$.

La proposition suivante décrit des opérations qui préservent les sous-espaces vectoriels.

Proposition 4.3.2

1. *Soit F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, l'ensemble $F_1 \cap F_2$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.*
2. *Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ un système de vecteurs de E l'ensemble des combinaisons linéaires de $v_1, \ldots, v_n$ est un sous-espace vectoriel de E, on le note*

$vect(v_1, \ldots, v_n)$ et $w \in vect(v_1, \ldots, v_n)$ si et seulement si il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

*P*reuve

1. Si $w_1,\ w_2 \in F_1 \cap F_2$ et $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$, F_1 sous-espace vectoriel entraîne

   $$\lambda w_1 + \mu w_2 \in F_1$$

   de même F_2 sous-espace vectoriel entraîne

   $$\lambda w_1 + \mu w_2 \in F_2.$$

   Donc

   $$\lambda w_1 + \mu w_2 \in F_1 \cap F_2.$$

2. Si $w_1,\ w_2 \in vect(v_1, \ldots, v_n)$ et $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ alors $w_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ et $w_2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$ donc $\lambda w_1 + \mu w_2 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\lambda_i + \mu\mu_i) v_i$ et c'est donc un élément de $vect(v_1, \ldots, v_n)$.

Remarque 4.3.4 *Attention $F_1 \cup F_2$ n'est pas en général un sous-espace vectoriel, nous allons voir un exemple géométrique.*

Exemples géométriques

Soit $E = \mathbb{R}^2$ on a vu que c'était un espace vectoriel. Par ailleurs à

$$v = (x_1, x_2) \in E$$

on peut associer le point du plan de coordonnées (x_1, x_2). Par exemple, 0_E est associé à l'origine du repère. Si M et N sont deux points du plan et $\vec{OM}$ et $\vec{ON}$ deux vecteurs associés aux coordonnées v_1 et $v_2 \in E$ alors $v_1 + v_2$ correspond au vecteur du plan construit par la règle du parallélogramme.

On peut alors se convaincre que la réunion de deux droites vectorielles distinctes n'est pas un espace vectoriel. Tout d'abord, si F est une droite vectorielle de E, que l'on voit comme l'ensemble des points du plan, et si v est un vecteur non nul de F on sait que (v) est une base de F. donc

$$F = \{w \in E \text{ tel qu'il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } w = \lambda v\}.$$

Géométriquement cela signifie que F est la droite "classique" du plan qui contient le point M correspondant au vecteur v et qui passe par l'origine. Ainsi, si l'on se donne deux droites distinctes D et D' de E, on a géométriquement deux droites distinctes passant par l'origine. Mais si l'on fait la somme de deux vecteurs de ces droites avec la règle du parallélogramme, on constate que la somme n'est dans aucune des deux droites en général. Voir figure 4.4. Ce n'est pas une preuve mais cela illustre géométriquement que la réunion de deux droites n'est pas un sous-espace vectoriel.

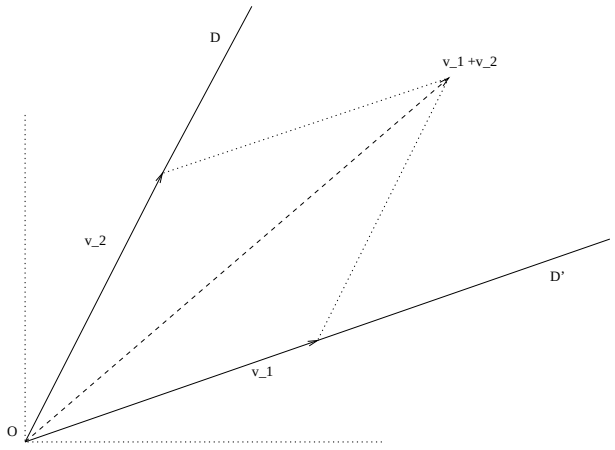

FIG. 4.4 – La réunion de deux droites n'est pas un espace vectoriel.

Chapitre 5

Applications linéaires

5.1 Applications linéaires et matrices

5.1.1 Définition et exemples

On va définir des applications qui partent d'un espace vectoriel E et qui arrivent dans un espace vectoriel F et qui se comportent bien par rapport aux opérations $+$ et $.$ (multiplication externe).

Définition 5.1.1 *Soit deux espaces vectoriels E et F. Une application $\phi : E \to F$ est dite linéaire si $\forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{R},\ \forall v, w \in E$,*

$$\phi(\lambda.v + \mu.w) = \lambda.\phi(v) + \mu\phi(w).$$

On appelle ces applications des morphismes de E dans F, et on note leur ensemble $\mathcal{L}(E, F)$.

Remarque 5.1.1 *1. "morphisme" veut dire : conserver la forme, vient du grec $\mu o \rho \phi o \sigma$.*
2. Si on a une combinaison linéaire avec p termes dans E, on montre par récurrence sur p que pour tout p-uplet de réels (λ_i), et tout p-uplet de vecteurs (v_i) de E,

$$\phi(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \phi(v_i).$$

Exemple 5.1.1 *On prend $E = \mathcal{M}(2, 3, \mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}$ et on définit ϕ par*

$$\phi(A) = a_{11} + a_{23}$$

où A est la matrice de taille 2×3 de coefficients a_{ij}. Montrons que ϕ est une application linéaire ; soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. On obtient pour tout couple (i, j) :

$$(\lambda A + \mu B)_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu b_{ij},$$

donc

$$\begin{aligned}\phi(\lambda A+\mu B) &= (\lambda a_{11}+\mu b_{11})+(\lambda a_{23}+\mu b_{23})\\ &= \lambda(a_{11}+a_{23})+\mu(b_{11}+b_{23})\\ &= \lambda\phi(A)+\mu\phi(B).\end{aligned}$$

On appelle ϕ une forme linéaire, car l'espace d'arrivée F est l'ensemble des réels.

Exemple 5.1.2 *Soit E un espace vectoriel, et $dim(E) < \infty$. On considère $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E : tout vecteur $v \in E$ s'écrit de manière unique*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

On considère l'application coordonnée

$$\phi : E \to \mathbb{R}^n \ ; \ v \mapsto (\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Lorsque les coordonnées de v dans la base sont $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et celles de w sont $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, on obtient

$$\begin{aligned}\phi(\lambda u+\mu v) &= \phi[\lambda(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i)+\mu(\sum_{i=1}^{n}\mu_i e_i)]\\ &= \phi[\sum_{i=1}^{n}(\lambda\lambda_i+\mu\mu_i)e_i]\\ &= ((\lambda\lambda_1+\mu\mu_1),\ldots,(\lambda\lambda_n+\mu\mu_n))\\ &= \lambda(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)+\mu(\mu_1,\ldots,\mu_n)\\ &= \lambda\phi(u)+\mu\phi(v).\end{aligned}$$

Proposition 5.1.1 *L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ muni des lois $+$ et $.$ définies pour $\phi, \psi \in \mathcal{L}(E,F), \lambda \in \mathbb{R}, v \in E$ par :*

$$\begin{aligned}(\phi+\psi)(v) &\stackrel{def}{=} \phi(v)+\psi(v)\\ (\lambda.\phi)(v) &\stackrel{def}{=} \lambda\phi(v)\end{aligned}$$

est un espace vectoriel.

*P*reuve : Il faut vérifier que les applications ainsi définies, $\lambda.\phi$ et $\phi+\psi$, appartiennent à $\mathcal{L}(E,F)$,
puis il faut vérifier les huits axiomes des espaces vectoriels ; cela marche de la même façon que pour $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, par exemple vérifions (**b4**) :

$$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall\phi\in\mathcal{L}(E,F),(\lambda+\mu)\phi=\lambda\phi+\mu\phi.$$

On prend $v \in E$ et on calcule

$$(\lambda+\mu).\phi(v) := (\lambda+\mu)\phi(v) = \lambda\phi(v)+\mu\phi(v) = \lambda.\phi(v)+\mu.\phi(v).$$

Comme ceci est vérifié pour tout v de E, on a bien $(\lambda+\mu)\phi = \lambda\phi+\mu\phi$. Il faut ensuite vérifier les septs autres axiomes....

5.1.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 5.1.2 *Soit une application linéaire ϕ de E dans F, une base $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E, une base $\mathcal{F} = (f_1, \cdots, f_m)$ de F. On associe à ϕ une unique matrice $M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}(\phi) \in \mathcal{M}(m, n, \mathbb{R})$ dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ de la manière suivante. Pour $j \in \{1, \cdots, n\}$, $\phi(e_j)$ se décompose sur la base $\mathcal{F}$ en*

$$\phi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i,$$

on pose

$$M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}(\phi) = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n}.$$

Théorème 5.1.1 *Soit une application linéaire ϕ de E dans F, une base $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E, une base $\mathcal{F} = (f_1, \cdots, f_m)$ de F, alors $M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}(\phi)$ détermine l'application ϕ. En effet, si X est le vecteur colonne des coordonnées d'un vecteur v de E dans la base $\mathcal{E}$, alors le vecteur colonne Y des coordonnées de $\phi(v)$ dans la base $\mathcal{F}$ peut être calculé comme :*

$$Y = M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}(\phi) X.$$

*P*reuve : Soit $v \in E$, v se décompose en $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, et on note les coordonnées sous forme de vecteur colonne, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Comme ϕ est un morphisme

$$\begin{aligned}
\phi(v) &= x_1 \phi(e_1) + \cdots + x_n \phi(e_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \phi(e_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j f_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) f_i = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j) f_1 + \cdots + (\sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j) f_m,
\end{aligned}$$

c'est à dire que les coordonnées de $\phi(v)$ élément de F sur la base $\mathcal{F}$ sont : $Y = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix}$ si on les exprime sous forme d'un vecteur colonne. On conclut que $Y = M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}(\phi) X$ au sens de la multiplication matricielle. (Remarque : le nombre de lignes et de colonnes permet la multiplication !)

Exemple 5.1.3 *Soit* $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \mathbb{R}_2[X]$, *espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à* 2, *(*F *est un sous-espace vectoriel de* E*) et* $\phi(P) = P'$ *(polynôme dérivée, qui est bien de degré inférieur ou égal à* 2*). Comme base* $\mathcal{E}$ *de* E *on prend* $\mathcal{E} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ *où* $P_1(x) = 1, P_2(x) = x, P_3(x) = x^2, P_4(x) = x^3$.
On sait que $\mathcal{E}$ *est un système générateur, montrons qu'il est libre. Soit*

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4 \in \mathbb{R}^4,$$

tels que $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_4 P_4 = 0$, *alors* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_4 x^3 = 0$, *et ceci pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *En effet,* 0 *est le polynôme nul, donc* $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_4 P_4$ *est un polynôme qui s'annule pour tout* x *de* $\mathbb{R}$ *donc tous ses coefficients sont nuls, soit* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_4 = 0$, *et* $\mathcal{E}$ *est une base de* E. *De même,* $\mathcal{F} = (Q_1, Q_2, Q_3)$ *avec* $Q_1(x) = 1, Q_2(x) = x, Q_3(x) = x^2$ *est une base de* F. *En particulier,* $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4, \dim \mathbb{R}_2[X] = 3$.
Est ce que ϕ *est linéaire ? Oui, car si* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *et* $P, Q \in E$,

$$\phi(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q' = \lambda \phi(P) + \mu \phi(Q).$$

Quelle est la matrice $M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$ *? On décompose* $\phi(P_j)$ *pour* j *variant de* 0 *à* 4 *sur* $\mathcal{F}$ *: (*$m = 3, n = 4$*)* 3 *lignes et* 4 *colonnes :*

$$\begin{aligned}
\phi(P_1) &= P_1' = 0 = 0.Q_1 + 0.Q_2 + 0.Q_3, \\
\phi(P_2) &= P_2' = 1 = 1.Q_1 + 0.Q_2 + 0.Q_3, \\
\phi(P_3) &= P_3' = 2x = 0.Q_1 + 2.Q_2 + 0.Q_3, \\
\phi(P_4) &= P_4' = 3x^2 = 0.Q_1 + 0.Q_2 + 3.Q_3.
\end{aligned}$$

La matrice colonne des coordonnées de $\phi(P_1)$ *est la première colonne de* $M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$ *d'après* $\phi(P_1) = \sum_{i=1}^{3} a_{1i} Q_i$, *de même pour connaître la* j*-ième colonne de* $M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$, *il suffit de recopier la matrice colonne des coordonnées de* $\phi(P_j)$; *donc*

$$M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Remarque 5.1.2 *La réciproque est vraie ! Si* $\dim E = n$ *et que l'on a fixé une base* $\mathcal{E}$ *de* E, *et* $\dim F = m$ *et* $\mathcal{F}$ *base de* F, *et une matrice* $M \in \mathcal{M}(m, n, \mathbb{R})$ *il existe une unique application linéaire* $\phi : E \mapsto F$ *telle que* $M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}(\phi) = M$.

Exemple 5.1.4 *On prend* $E = F = \mathbb{R}^2$ *comme espaces vectoriels (on les interprète comme l'espace vectoriel des vecteurs du plan), on choisit la base* $\mathcal{E} = ((1,0),(0,1)) = \mathcal{F}$ *ce qui correspond aux vecteurs* $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$ *sur les axes. On caractérise géométriquement le morphisme*

$$\Phi : E \to F \text{ tel que } M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

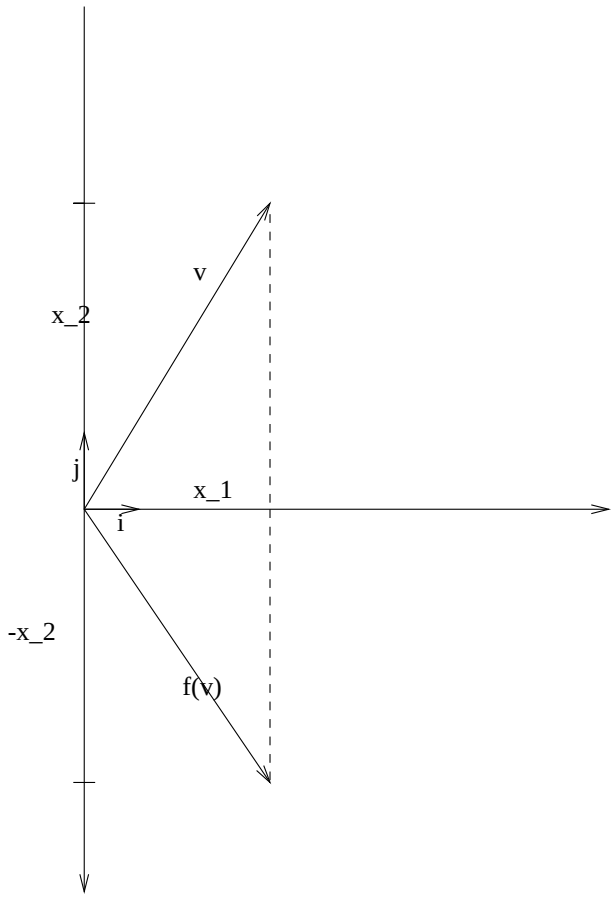

FIG. 5.1 – Symétrie orthogonale.

comme la symétrie orthogonale d'axe Ox.

Soit v un vecteur du plan de coordonnées (x_1, x_2) dans la base $\mathcal{E}$, alors $\Phi(v) = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ car $\mathcal{E}$ est une base. Le théorème dit que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

donc $\Phi(v) = x_1\vec{i} - x_2\vec{j}$; géométriquement, on obtient $\Phi(v)$ en appliquant la symétrie orthogonale d'axe Ox sur v.

Exercice 5.1.1 *Quelle est la matrice dans la base $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ de la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice ?*

Théorème 5.1.2 *Soit trois espaces vectoriels E, F, G munis des bases respectives $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$, et deux applications linéaires $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$, $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors la*

composition $\psi \circ \phi \in \mathcal{L}(E, G)$ *et*

$$M_{\mathcal{G}}^{\mathcal{E}}(\psi \circ \phi) = M_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}(\psi).M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}(\phi) \tag{5.1}$$

au sens de la multiplication des matrices.

Remarque 5.1.3 *Cela justifie l'utilité de la définition "bizarre" de l'opération . multiplication entre les matrices : ceci permet de calculer avec un nombre fini d'opérations une composée de deux applications linéaires.*

Remarque 5.1.4 *Il y a une espèce de simplification de la base* $\mathcal{F}$ *(au moins symboliquement !) dans la formule* (5.1) *à droite du signe égal pour obtenir les bases où est calculé la matrice de* $\psi \circ \phi$.

Preuve : Montrons que $\psi \circ \phi$ est linéaire, soit $v, w \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(\psi \circ \phi)(\lambda v + \mu w) &= \psi[\phi(\lambda v + \mu w)] \\ &= \psi[\lambda\phi(v) + \mu\phi(w)] \\ &= \lambda\psi[\phi(v)] + \mu\psi[\phi(w)] \\ &= \lambda(\psi \circ \phi)(v) + \mu(\psi \circ \phi)(w).\end{aligned}$$

On pose $dimE = n$, $dimF = m$, $dimG = l$,

$$A = (a_{ij}) = M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}(\phi) \in \mathcal{M}(m, n)\ ;\ B = (b_{ij}) = M_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}(\psi) \in \mathcal{M}(l, m)$$

$$C = (c_{ij}) = M_{\mathcal{G}}^{\mathcal{E}}(\psi \circ \phi).$$

De plus on considère

$$D = (d_{ij}) = BA \in \mathcal{M}(l, n), d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}.$$

On veut montrer que $C = D$. La définition de c_{ij} vient du théorème et de l'expression de $(\psi \circ \phi)(e_j)$, lorsque $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$; $\mathcal{F} = (f_1, \cdots, f_m)$; $\mathcal{G} = (g_1, \cdots, g_l)$.

Or

$$\begin{aligned}\psi \circ \phi(e_j) &= \psi[\phi(e_j)] \\ &= \psi[a_{1j}f_1 + \cdots + a_{mj}f_m] = a_{1j}\psi(f_1) + \cdots + a_{mj}\psi(f_m) \\ &= a_{1j}(\sum_{k=1}^{l} b_{k1}g_k) + \cdots + a_{mj}(\sum_{k=1}^{l} b_{km}g_k) \\ &= \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}g_i,\end{aligned}$$

et par définition de $\mathcal{M}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{E}}(\psi \circ \phi) = C$:

$$\psi \circ \phi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} c_{ij}g_i,$$

donc comme $\mathcal{G}$ est une base, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{i,k}a_{k,j}$, et $C = D$.

Changements de bases(optionnel)

Si on a deux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, quel est le rapport entre les matrices $M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}(\phi)$ et $M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}'}(\phi)$ pour une application linéaire ϕ donnée ? On introduit la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$ pour répondre à cette question.

Ici, on suppose que $E = F$, et on donne la définition suivante :

Définition 5.1.3 *Une application linéaire $\phi : E \to E$ est appelée un endomorphisme.*

Proposition 5.1.2 *On note $Id : E \to E$ l'endomorphisme identité qui vérifie pour tout $v \in E$, $Id(v) = v$. La matrice $P = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}(Id)$, de l'application Id correspondant à deux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ est inversible, de plus son inverse $P^{-1} = M_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}(Id)$. On appelle P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$.*

Remarque 5.1.5 *Il y a renversement dans les notations : $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$ ($\mathcal{E}'$ est la base de départ).*

Preuve : On remarque que la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}$ (où $\mathcal{E}$ est une base de E) est la matrice identité, élément neutre pour la multiplication des matrices, qui n'a que des 1 sur la diagonale. Car si $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $(a_{ij}) = M_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}(Id)$, alors $Id(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i = e_j$ soit $a_{jj} = 1$ et les autres sont nuls. D'où $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(Id) = I_n$. En utilisant le théorème sur la composition des morphismes, on obtient en partant de $Id \circ Id = Id$, $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}(Id) \times M_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}(Id) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(Id)$ et donc $P \times M_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}(Id) = I_n$ ce qui montre que P est inversible et $P^{-1} = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(Id)$.

Exercice 5.1.2 *Soit $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{E}$ la base canonique $((1,0),(0,1))$ et $\mathcal{E}' = ((1,1),(1,-1))$. Vérifier que $\mathcal{E}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Quelle est la matrice de passage P entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$?*

Théorème 5.1.3 *Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de l'espace vectoriel E, et P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$. Soit X (respectivement X') la matrice colonne d'un vecteur x de E dans $\mathcal{E}$ (respectivement dans $\mathcal{E}'$). Alors $X = PX'$.*

Preuve : Si on se souvient que $P = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$, le théorème dit que le vecteur colonne des coordonnées de $Id(x) = x$ dans la base $\mathcal{E}$ est donné par $X = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}(Id)X'$, c'est à dire $X = PX'$.

Remarque 5.1.6 *Ce n'est pas la meilleure manière pratique de se rappeler l'opération de changement de bases, mais cela justifie le nom de P.*

Théorème 5.1.4 *Soit E(respectivement F) un espace vectoriel de bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ (respectivement $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$) et P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$, Q celle de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}'$. Si $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A = M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}(\phi)$ est la matrice dans les "anciennes" bases, on obtient $A' = M_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{E}'}(\phi)$ la matrice de ϕ dans les nouvelles bases par :*

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Preuve : On peut écrire $\phi = Id_F \circ \phi \circ Id_E$ *et le théorème de composition donne*

$$A' = M_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{E}'}(\phi) = M_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}}(Id_F) \times M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}(\phi) \times M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}(Id_E)$$

d'où $A' = Q^{-1}AP$.

Cas particulier si $\phi \in \mathcal{L}(E,E)$ *est un endomorphisme, et* P *la matrice de passage de* $\mathcal{E}$ *à* $\mathcal{E}'$, $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\phi)$; $A' = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}(\phi)$; *alors* $A' = P^{-1}AP$.

Définition 5.1.4 *On dit que deux matrices* A *et* $B \in \mathcal{M}(n,n,\mathbb{R})$ *sont semblables s'il existe* $P \in GL(n,\mathbb{R})$ *telle que* $B = P^{-1}AP$.

Cela signifie que A *et* B *sont les matrices* $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ *et* $M_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}'}$ *d'un même endomorphisme* ϕ *dans deux bases différentes* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{E}'$.

5.2 Retour aux sous-espaces vectoriels

5.2.1 Noyaux et images

Soit $\phi : E \to F$ une application linéaire, le problème qui nous intéresse est de savoir si pour $y \in F$ il existe un $x \in E$ tel que $\phi(x) = y$. On peut aussi se demander dans le cas où il existe un x tel que $\phi(x) = y$ s'il est unique. Le fait de supposer que ϕ est un morphisme d'espaces vectoriels simplifie le problème. Cela revient une fois fixées les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ de E et de F à se demander s'il existe un vecteur colonne X tel que $AX = Y$ où $A = M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}(\phi)$; c'est à dire à résoudre un système linéaire.

Définition 5.2.1 *On appelle noyau de* $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$

$$Ker(\phi) = \{x \in E,\ \phi(x) = 0\},$$

et image de ϕ *le sous-ensemble de* F

$$Im(\phi) = \{y \in F,\ \textit{tel qu'il existe}\ x \in E\ \phi(x) = y\},$$

On vérifie que ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels.

Proposition 5.2.1 *Le noyau* $Ker(\phi)$ *est un sous-espace vectoriel de* E, *et l'image* $Im(\phi)$ *est un sous-espace vectoriel de* F.

*P*reuve Tout d'abord $Ker(\phi)$ contient 0_E car $\phi(0_E) = \phi(0.0_E) = 0.\phi(0_E) = 0_F$. Ce n'est pas l'ensemble vide. Soit $x_1,\ x_2 \in Ker(\phi)$ $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$,

$$\phi(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda\phi(x_1) + \mu\phi(x_2) = 0_F.$$

donc $\lambda x_1 + \mu x_2 \in Ker(\phi)$.

Tout d'abord $Im(\phi)$ contient 0_F car $\phi(0_E) = 0_F$ et est donc non vide. Soit $y_1,\ y_2 \in Im(\phi)$; $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$, il existe $x_1,\ x_2 \in E$ tels que $\phi(x_1) = y_1$ et $\phi(x_2) = y_2$. D'où

$$\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda\phi(x_1) + \mu\phi(x_2) = \phi(\lambda x_1 + \mu x_2),$$

donc $\lambda y_1 + \mu y_2 \in Im(\phi)$.

On peut caractériser l'injectivité d'une application linéaire grâce au noyau.

Proposition 5.2.2 *On a équivalence entre $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ injectif et $Ker(\phi) = \{0_E\}$. On a équivalence entre $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ surjectif et $Im(\phi) = F$.*

*P*reuve

Montrons que ϕ injection entraîne $Ker(\phi) = \{0_E\}$. L'élément neutre $0_E \in Ker(\phi)$ mais 0_F a un seul antécédent donc $Ker(\phi) = \{0_E\}$.

Montrons $Ker(\phi) = \{0_E\}$ entraîne ϕ injection. Si

$$\phi(x_1) = \phi(x_2)$$

alors

$$\phi(x_1 - x_2) = 0_F.$$

Donc $x_1 - x_2 \in Ker(\phi)$ et par hypothèse $x_1 - x_2 = 0_E$ ou encore $x_1 = x_2$.

Par définition ϕ surjection veut dire que pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $\phi(x) = y$ ce qui n'est rien d'autre que $Im(\phi) = F$.

5.2.2 Isomorphismes et dimension

Proposition 5.2.3 *Si ϕ est injectif et surjectif, on dit que ϕ est un isomorphisme de E sur F. Dans ce cas l'application linéaire $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ admet une application réciproque notée ϕ^{-1} qui est aussi linéaire $\phi^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.*

*P*reuve Si ϕ est un isomorphisme tout $y \in F$ admet un unique antécédent $x \in E$ on définit ϕ^{-1} par $\phi^{-1}(y) = x$.

Montrons que ϕ^{-1} est linéaire ; soit $y_1,\ y_2 \in F$ $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$, et $x_1,\ x_2 \in E$ tels que $\phi(x_1) = y_1$ et $\phi(x_2) = y_2$

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(\lambda y_1 + \mu y_2) &= \phi^{-1}(\lambda\phi(x_1) + \mu\phi(x_2)) \\ &= \phi^{-1}(\phi(\lambda x_1 + \mu x_2)) \\ &= \lambda x_1 + \mu x_2 \\ &= \lambda\phi^{-1}(y_1) + \mu\phi^{-1}(y_2). \end{aligned}$$

On peut caractériser les isomorphismes au moyen des bases.

Théorème 5.2.1 *Soit E, F deux espaces vectoriels, $\mathcal{E} = (e_1, \ldots e_m)$ une base de E, et ϕ un isomorphisme de E sur F alors l'image de $\mathcal{E}$ par ϕ notée $\phi(\mathcal{E}) = (\phi(e_1), \ldots \phi(e_m))$ est une base de F. Réciproquement, pour qu'un morphisme ϕ soit un isomorphisme il suffit qu'il existe une base $\mathcal{E}$ de E telle que $\phi(\mathcal{E})$ soit une base de F.*

*P*reuve

En exercice. Voir énoncé dans les feuilles de Td.

Définition 5.2.2 *On dit que deux espaces vectoriels sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de ϕ de E sur F.*

Corollaire 5.2.1 *1. Deux espaces vectoriels E et F de dimension fini, sont isomorphes si et seulement si* $\dim E = \dim F$.

2. *Si* $\dim E = m$, E *est isomorphe à* $\mathbb{R}^m$.
3. *Soit* $\mathcal{E}$ *une base de* E, $\mathcal{F}$ *une base de* F, *et* ϕ *un isomorphisme de* E *sur* F $M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}(\phi)$ *est inversible et*

$$(M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}(\phi))^{-1} = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}(\phi^{-1})$$

l'inverse de la matrice $M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}(\phi)$ *est la matrice de l'isomorphisme réciproque.*

*P*reuve

Si ϕ est un isomorphisme de E sur F alors $\mathcal{E}$ base de E est équivalent à $\phi(\mathcal{E})$ base de F mais $\mathcal{E}$ et $\phi(\mathcal{E})$ ont même nombre de vecteurs donc $\dim E = \dim F$.

Supposons que $\dim E = m$, notons $\mathcal{E} = (e_1, \dots e_m)$et ϕ application coordonnée

$$\begin{array}{ccc} E & \stackrel{\phi}{\rightarrow} & \mathbb{R}^m \\ v & \rightarrow & (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \end{array}$$

où $\phi(v) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ si $v = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i$. Le m-uplet est unique, donc

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \stackrel{\phi^{-1}}{\rightarrow} & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_m) & \rightarrow & \displaystyle\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i. \end{array}$$

ϕ est injectif, surjectif et E est isomorphe à $\mathbb{R}^m$.

Exercice 5.2.1 *Montrer que* $\mathcal{L}(E, F)$ *est isomorphe à* $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{R})$, *si* $\dim F = m$ *et* $\dim E = n$. *En déduire la dimension de* $\mathcal{L}(E, F)$.

5.2.3 Dimension et applications linéaires

On a vu que pour les isomorphismes, il y avait une relation entre la dimension de l'espace de départ E, et celle de l'espace d'arrivée. Cela se généralise pour un morphisme ϕ qui n'est pas forcément injectif ou surjectif.

Théorème 5.2.2 *Soit* E *et* F *deux espaces vectoriels de dimension finie, et* $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ *alors*

$$\dim E = \dim Ker(\phi) + \dim Im(\phi).$$

Preuve

Soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_k)$ une base de $Ker(\phi)$, on peut la compléter en une base de E $\mathcal{E} = (v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_r)$. D'après les dimensions $\dim Ker(\phi) = k$ et $\dim E = k + r$. Montrons que $(\phi(w_1), \dots, \phi(w_r))$ est une base de $Im(\phi)$. Prouvons d'abord que c'est un système libre. Soit λ_i tels que

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \phi(w_i) = 0_F$$

alors

$$\phi(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i w_i) = 0_F$$

et $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i w_i \in Ker(\phi)$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de $Ker(\phi)$

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i w_i = \sum_{j=1}^{k} \mu_j v_j$$

et $-\sum_{j=1}^{k} \mu_j v_j + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i w_i = 0_E$ donc $\mu_j = 0$ et $\lambda_i = 0$.

Prouvons que c'est un système générateur, soit $y \in Im(\phi)$ il existe $x \in E$ tel que $\phi(x) = y$. Comme $\mathcal{E}$ est une base de E

$$x = \sum_{j=1}^{k} \mu_j v_j + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i w_i$$

donc

$$y = \phi(x) = \phi(\sum_{j=1}^{k} \mu_j v_j + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i w_i)$$

et comme les v_j sont dans $Ker(\phi)$

$$y = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \phi(w_i).$$

On en déduit que $\dim Im(\phi) = r$.

Corollaire 5.2.2 *Si $\phi \in \mathcal{L}(E, E)$, on a équivalence entre ϕ injectif et ϕ surjectif.*

Remarque 5.2.1 *Le fait que $\phi(x) = y$ a au plus une solution est équivalent au fait que $\phi(x) = y$ a au moins une solution. Dans ce cas ϕ est un isomorphisme de E sur E. On parle aussi d'automorphisme.*

Preuve

Le fait que ϕ soit injectif est équivalent à $\dim Ker(\phi) = 0$. Et par le théorème précédent c'est équivalent à $\dim Im(\phi) = \dim E$. Ce qui revient à dire que $Im(\phi) = E$ ou encore que ϕ est surjectif.

Index