CIMP - L1 - S1
Recueil des contrôles continus de l’année 2003-2004

16 septembre 2004

Table des matières

1 Contrôles continus 1 **5**
1.1 . . . 6
1.2 . . . 7
1.3 . . . 8
1.4 . . . 9

2 Contrôles continus 2 **11**
2.1 . . . 12
2.2 . . . 13
2.3 . . . 14
2.4 . . . 15
2.5 . . . 16

3 Contrôles continus 3 **17**
3.1 . . . 18
3.2 . . . 19
3.3 . . . 20
3.4 . . . 21
3.5 . . . 22
3.6 . . . 23
3.7 . . . 24
3.8 . . . 25
3.9 . . . 26
3.10 Contrôle de rattrapage . . . 27

4 Quelques corrigés **29**
4.1 Corrigé du sujet 1.1 page 6 . . . 30
4.2 Corrigé du sujet 3.1 page 18 . . . 31
4.3 Corrigé du sujet 3.9 page 26 . . . 32

Chapitre 1

Contrôles continus 1

1.1

Le corrigé de ce sujet est en section 4.1 page 30.

I

Appliquer la méthode des pivots de Gauss au système linéaire S suivant (en explicitant chaque transformation élémentaire utilisée), puis préciser $Sol(S)$ (l'ensemble des solutions de S), $Sol(S_h)$ (l'ensemble des solutions du système homogène associé), et décrire concrètement sur cet exemple les deux théorèmes généraux concernant ces deux ensembles.

• **Sujet A** $\begin{cases} 2x+y-z+t & = & 3 \\ x+y+2z-2t & = & 2 \\ 3x-5y+7z-4t & = & 1 \end{cases}$

• **Sujet B** $\begin{cases} 3x-5y+7z-4t & = & 3 \\ x+y+2z-2t & = & 2 \\ 2x+y-z+t & = & 1 \end{cases}$

II

Pour chacun des deux ensembles suivants, préciser dans quel espace vectoriel il est inclus et dire s'il en est un sous-espace vectoriel ou non, en expliquant pourquoi.

• **Sujet A** $A_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y=0\}$, $A_2 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(0) = 1\}$

• **Sujet B** $B_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / xy=0\}$ $B_2 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(1) = 0\}$

III

• **Sujet A** Soient $B \subset A \subset \mathbb{R}$, avec B non vide et A majorée. Montrez que $sup(A)$ et $sup(B)$ existent et comparez-les (en justifiant votre réponse !).

• **Sujet B** $A \subset B \subset \mathbb{R}$, avec A non vide et B minorée. Montrez que $inf(A)$ et $inf(B)$ existent et comparez-les (en justifiant votre réponse !).

1.2

Exercice 1. Questions de cours (5 points)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}(n,n,\mathbb{R})$ et B un vecteur colonne de taille n.
   (a) Donner la définition de l'inversibilité de la matrice A.
   (b) Si A est inversible, que peut-on en déduire sur l'ensemble des solutions du système $AX = B$?
2. Soit A une partie non vide et minorée de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. Donner la caractérisation mathématique de la borne inférieure de A.

Exercice 2. (8 points) On considère le système linéaire

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & 2z & = & 1, \\ x & + & y & - & 2z & = & 1, \\ 2x & + & y & - & 4z & = & \alpha, \end{array} \right.$$

où α est un réel quelconque.

1. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$. Donner la matrice $A \in \mathcal{M}(3,3)$ telle que (S) s'écrive sous la forme $AX = B$.
2. A l'aide de transformations élémentaires à préciser, transformer la matrice A en une matrice de la forme
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$
   où a, b, c sont des réels à déterminer.
3. On note T la transformation qui permet de passer de A à $\tilde{A}$.
   (a) Calculer $\tilde{B} = T(B)$.
   (b) Quel est l'ensemble $\mathcal{S}_2$ des solutions du système (S) lorsque $\alpha = 2$?
   (c) Quel est l'ensemble $\mathcal{S}_3$ des solutions du système (S) lorsque $\alpha = 3$?
4. Que peut-on en déduire sur l'inversibilité de la matrice A ? (On prendra soin de justifier sa réponse.)

Exercice 3. (7 points) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{2+3u_n}{2+u_n}$.

1. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

1.3

1. Question de cours On considère un système linéaire (S) de n équations à m inconnues. Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ une solution de (S). Rappeler comment on exprime toutes les solutions de (S) en fonction de $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ et des solutions du système homogène (sans second membre) associé à (S). Le démontrer soigneusement.

2. Bornes supérieure et inférieure Rappeler la définition de la borne supérieure d'un ensemble. Donner la borne inférieure de l'ensemble suivant (en justifiant la réponse) :

$$E := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

Est-ce que cet ensemble à un minimum ?

3. Algèbre linéaire Résoudre le système suivant.

$$\left\{\begin{array}{cccc} 2x & +y & +z & = 1 \\ 3x & +3y & -z & = 2 \\ x & +y & +4z & = 3 \end{array}\right.$$

4. Suites Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers une limite l (dans $\mathbb{R}$). Quelle est la limite de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$?

Si $\lim_{n\to\infty} |u_n| = l$, est-ce que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers une limite ? Si oui, que peut être cette limite ? Le démontrer.

1.4

I

1. Donner la définition d'un minorant, puis de la borne inférieure d'une partie A de $\mathbb{R}$.
2. Traduire ces définitions à l'aide des symboles $\in$, $\forall$ et $\exists$.
3. Rappeler le résultat concernant l'existence d'une borne inférieure d'une partie A de $\mathbb{R}$.

II

On considère la partie $A = \{e^{\frac{1}{n}},\ n \in \mathbb{N}^*\}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Répondre à chacune des questions ci-dessous *en justifiant à chaque fois votre réponse par une preuve utilisant la partie I.*

1. La partie A est-elle majorée ? minorée ? bornée ?
2. Les bornes supérieures et inférieures de A existent-elles ? Si oui, quelle est leur valeur ?
3. La partie A admet-elle un plus grand élément ? plus petit élément ?

III

On calcule la note finale N d'un étudiant à partir de ses notes n_1 n_2 et n_3 dans trois matières affectées des coefficients entiers positifs x, y et z par la formule $N = xn_1 + yn_2 + zn_3$. Les valeurs des coefficients ont été égarées, mais on connait la note finale et les notes par matière de trois étudiants. Pour le troisième étudiant, une des trois notes est manquante et on l'a remplacée par un paramètre λ. On a donc le tableau :

	n_1	n_2	n_3	Note finale N
Etudiant 1 :	4	12	14	130
Etudiant 2 :	8	7	11	107
Etudiant 3 :	20	9	λ	146

On cherche à retrouver les coefficients x y et z, puis à retrouver la ou les valeurs possibles de la note manquante λ.

1. Ecrire le système linéaire traduisant la donnée ci-dessus.

   Ecrire ce système sous une forme échelonnée équivalente (on recommande pour la suite de ne pas changer l'ordre des équations et variables).
2. Discuter suivant la valeur de λ du rang de ce système.

   L'étudiant annonce que sa note manquante λ est 19. Peut-on le croire ?

   Montrer que pour toute autre valeur de la note λ entre 0 et 20, ce système admet une solution (x, y, z) unique. Exprimer la composante z de cette solution en fonction de λ.
3. En remarquant que les seuls diviseurs de 45 sont 1, 3, 5, 9, 15, et 45, déterminer les valeurs entières de λ entre 0 et 20 pour lesquelles z est un entier positif. Déterminer la (ou les) valeur(s) de λ entre 0 et 20 pour laquelle (ou lesquelles) les trois coefficients sont entiers positifs. Quelle sont alors les valeurs de ces coefficients ?

Chapitre 2

Contrôles continus 2

2.1

1. On munit $F = \left\{ A \in \mathcal{M}_{2,2} \ : \ \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \times A \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \right\}$ des opérations usuelles des matrices.
   (a) Montrer que F est un espace vectoriel.
   (b) Montrer que $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ est une famille libre.
   (c) Montrer que $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ est une base de F.

2. Question de cours. Redémontrer que

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u_n \times v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

3. Soit $u_0 = x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + u_n^2$.
   Etudier le comportement en l'infini de u selon la valeur du réel x.

2.2

Exercice 1 : (5 pts)

(1) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ calculer A^2 et A^{-1}.

(2) En utilisant la matrice A, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} y - z & = a \\ 4x - 3y + 4z & = b \\ 3x - 3y + 4z & = c \end{cases}$$

où a,b,c sont trois réels.

Exercice 2 : (9 pts)
Les questions 1,2,3 et 4 peuvent être traitées indépendamment.

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1,1,2)$, $v_2 = (2,1,1)$.
(1) Montrer que la famille $\{v_1, v_2\}$ est libre.
(2) Soit a un réel, on considère $V_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + z = a\}$.
Pour quelles valeurs de a, V_a est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
(3) Montrer que V_0 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension inférieure ou égale à 2.
En donner une base. Quelle est sa dimension ?
(4) Soit $v_\alpha = (1,2,\alpha)$. Pour quelles valeurs de α la famille $\{v_1, v_2, v_\alpha\}$ est elle une base de $\mathbb{R}^3$?
Dans ce dernier cas, calculer les coordonnées du vecteur $(1,1,1)$ dans cette base.

Exercice 3 : (6 pts)
Soit une suite $(a_n)_n$ vérifiant pour tout entier n : $0 \leq a_n \leq 1$.
On considère la suite : $u_0 = 0,\ ; u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{2^{n+1}}$.
1) Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_n$ vérifie pour tout entier $n \geq 1$: $u_n \leq 1 - \frac{1}{2^n}$.
2) Indiquer la monotonie de cette suite, et en déduire que $(u_n)_n$ converge vers un réel $u \leq 1$. 3) Soit $v_n = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} u_p$, montrer que $(v_n)_n$ est monotone convergente et en donner sa limite.

2.3

Exo 1. $\mathbb{R}^2$, muni de la loi interne (”addition”) + usuelle et de la loi externe (”multiplication par un scalaire”) définie par $\lambda(x,y) = (\lambda x, 0)$, est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Exo 2. On désigne par E l'ensemble des triplets (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $2x + y - z = a$, où a est un réel donné. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que E soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exo 3. Soit le système $S = \{e_1 = (1,1,1),\ e_2 = (1,1,2),\ e_3 = (1,2,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
1) Montrer que S est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Calculer les coordonnées du vecteur $v = (5,7,12)$ dans cette base.

Exo 4. On considère la suite de terme général

$$u_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + ... + \frac{(-1)^n}{(2n)!},\ n \geq 0.$$

1) Montrer que les suites extraites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont des suites adjacentes.
2) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

2.4

Exercice 1. (9 points)

1. Soit E un espace vectoriel, F un sous-ensemble de E et $(u_1, u_2, ..., u_n)$ un système de n vecteurs de E.
   (a) Quand dit-on que le système $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est générateur ?
   (b) Quand dit-on que le système $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est libre ?
   (c) Quand dit-on que F est un sous-espace vectoriel de E ?
2. Posons $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \{v = (x, y, z, t) \in E : x - y + 2z + t = 1\}$. Cet ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de E ?
3. Posons $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \{v = (x, y, z, t) \in E : 3x - y + t = 0\}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Donner une base de F.
   (c) Quelle est la dimension de F ?

Exercice 2. (12 points)

1. Déterminer les limites des 3 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par
$$u_n = \frac{\sin(n)}{n}, \qquad v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+2} - n}, \qquad w_n = \frac{n^3 - n^2}{n^3}.$$
2. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Quand dit-on que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l ?
   (b) Quand dit-on que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$?
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et si $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n + 3)$.
   (a) Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2.
   (c) Conclure quant à la convergence de la suite.
   (d) Si la suite est convergente et si on note l sa limite, encadrer l entre 2 entiers.

2.5

1. Algèbre linéaire, question de cours. Soit E un espace vectoriel, et soient V, W des sous-espaces vectoriels de E.

1.1. Est-ce que $V \cap W$ est un sous-espace vectoriel de E ? Si oui le démontrer, si non, justifier la réponse.
1.2. Même question pour $V \cup W$.

2. Produits de matrices. On définit une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(3,3)$ comme suit : pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $a_{ij} = 1$ si $i < j$ et $a_{ij} = 0$ sinon.

2.1. Ecrire explicitement la matrice A.
2.2. Calculer A^2 (soit $A.A$) puis A^3.
2.3. La matrice A est-elle inversible ? Quel est son rang ?

3. Suite, question de cours. Montrer qu'une suite croissante majorée est convergente.

4. Calcul de limites de suites. Calculer les limites des suites suivantes.

4.1. $u_n = (\sqrt{n^2+1} - n)\cos(n)$.
4.2. $v_n = (\sqrt{n} + \sin(n)/n)/(n + \sqrt{n})$.

Chapitre 3

Contrôles continus 3

3.1

Le corrigé de ce sujet est en section 4.2 page 31.

Exercice 1.
On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$, muni de sa base canonique $\mathcal{E} = (1, X, X^2, X^3)$, et $f : E \to E$ l'application définie par :

$$(A) \qquad \forall P(X) \in E, f(P(X)) = P(X) + P(-X).$$

$$(B) \qquad \forall P(X) \in E, f(P(X)) = P(X) - P(-X).$$

a) Démontrer que f est linéaire et trouver sa matrice dans la base $\mathcal{E}$,

$$A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f).$$

$$B = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f).$$

b) Déterminer le noyau $Ker(f)$ et l'image $Im(f)$.
c) En déduire que dans E, le sous-ensemble F des polynômes pairs et le sous-ensemble G des poynômes impairs sont des sous-espaces vectoriels.
d) Donner une base de $Ker(f)$ et une base de $Im(f)$.
e) Vérifier, sur cet exemple, le théorème du rang.
f) f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2.
Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots, 10a - 1\}$ telle que, pour tout entier k dans cet ensemble,

$$(A) \qquad P([X = k]) = 1/a - 1/10.$$

$$(B) \qquad P([X = k]) = 1/10 - 1/a.$$

a) Trouver a afin que P soit bien une loi de probabilité.
b) (Pour cette valeur de a), calculer l'espérance et la variance de X. (On pourra utiliser - Suites, leçon 3 - que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

3.2

Exercice 1. (10 points)

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associe

$$f(x, y, z) = \big(x + y - z, 4x + y - 2z, 6x + 3y - 4z\big).$$

Notons $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On admettra que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ où $b_1 = (1, 2, 3)$, $b_2 = (1, 0, 2)$ et $b_3 = (0, 1, 1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

1. (1 point) Ecrire la matrice $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$.
2. (3 points) Trouver une base de $Ker(f)$ et en déduire la dimension de $Im(f)$.
3. (4 points)
   (a) Ecrire les matrices $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ et $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(Id)$.
   (b) Etant donné un triplet de réels (a, b, c). Trouver le triplet de réels (α, β, γ) tel que
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$
   (c) En déduire l'écriture de $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(Id)$.
4. (2 points) En donnant l'expression matricielle de $f = Id \circ f \circ Id$, vérifier la validité des matrices trouvées dans les questions précédentes.

Exercice 2. (10 points)

1. (4 points) Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.
   (a) Que vaut $f([-2, 1])$? $f^{-1}([0, 2])$?
   (b) Que vaut $f(-1)$? $f(1)$? $f^{-1}([-2, -1])$?
   (c) f est-elle injective ? surjective ?
2. (3 points)
   (a) Si, en France, les voitures avaient des plaques avec deux lettres et ensuite trois chiffres, combien de plaques possibles y aurait-t-il ?
   (b) Un professeur dispose de 32 livres sur un rayon de sa bibliothèque. 23 d'entre eux sont des livres de mathématiques et 9 de physique. Le professeur aimerait ranger ses livres de sorte que tous les livres traitant du même sujet restent groupés. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?
   (c) Supposons que l'on jette deux pièces. Quelle est la probabilité pour que l'une (au moins) des deux pièces tombe sur pile ?
3. (3 points) Les partis A, B, C et D ont respectivement 10, 5, 35 et 2 représentants dans une assemblée. Calculer le nombre de possibilités de constituer une commission de 10 personnes issues de cette assemblée si
   (a) il y a 2 personnes du parti D,
   (b) il y a au moins 1 personne du parti D,
   (c) il y a exactement 3 représentants du parti A et 2 du parti C.

3.3

1. Soit A, B, C trois sous-ensembles de Ω.
   (a) Montrer que
   $$(A \cup B) \cap C \quad \subset \quad A \cup (B \cap C).$$
   (b) Montrer que
   $$\Big((A \cup B) \cap C\Big) \cup \Big((A \cup C) \cap B\Big) \quad \subset \quad A \cup (B \cap C).$$
   (c) Soit $\Omega = \{0, 1\}$, donner un exemple de A, B et C tel que
   $$\Big((A \cup B) \cap C\Big) \cup \Big((A \cup C) \cap B\Big) \quad \neq \quad A \cup (B \cap C).$$
2. Soit $\Omega = \{-1, 0, 1\}$, $p(\omega) = c(1 + \omega^2)$ et $X(\omega) = \omega^2$.
   (a) Déterminer la constante c pour que (Ω, p) soit un espace dénombrable probabilisé.
   (b) Déterminer la loi de X.
3. Lors d'une galette des rois, on présente deux gâteaux : une brioche et une frangipane. La cuisinière a glissé une fève dans l'un des deux après avoir tiré une pièce à pile ou face. Comme Jean se sert une seule fois de la brioche et deux fois de la frangipane, il a une chance sur six d'être le roi quand la fève est dans la brioche, et une chance sur trois quand la fève est dans la frangipane.
   On notera $F = b$ quand la fève est dans la brioche et $F = f$ quand la fève est dans la frangipane.
   On notera aussi $R = 1$ quand Jean devient roi et $R = 0$ sinon.
   (a) Avec ces notations que représente le 1/6 dans l'énoncé ci-dessus ?
   (b) Calculer $P(R = 1)$.
   (c) Calculer $P(F = f \mid R = 1)$.
4. Dans chaque partie d'un jeu de 32 cartes, on vous distribue au départ cinq cartes au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité p d'avoir l'as de pique au début d'une partie ?
   (b) Vous jouez 4 parties. Quelle est la probabilité d'avoir eu l'as de pique au départ dans deux parties (exactement deux parties, ni plus, ni moins) ?
   Donnez si possible le résultat d'abord en fonction de p afin d'obtenir des points même si vous avez fait une erreur dans la question précédente.

3.4

Exercice 1 : (8 pts) On considère la suite récurrente de nombres réels définie par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = & \sqrt{1+x_n} \\ x_0 \geq 0 \end{cases}$$

(1) Soient $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $f(x) = \sqrt{1+x}$, remarquer la croissance de f sur $\mathbb{R}^+$
et résoudre l'équation $f(x) = x$.
(2) Si $0 \leq x_0 \leq a$, prouver par récurrence les inégalités suivantes : $0 \leq x_n \leq x_{n+1} \leq a$.
La suite $(x_n)_n$ est elle convergente ?
(3) Si $a \leq x_0$, vérifier par récurrence les inégalités : $a \leq x_{n+1} \leq x_n$, dans ce cas quelle est
la nature de la suite $(x_n)_n$?

Exercice 2 : (12 pts)
Les questions 1), 2) et 3) a,b,c,d, peuvent être traitées indépendamment.
Soient E , F deux espaces vectoriels réels et $f : E \to F$ une application linéaire.
On note $Ker\ f = \{x \in E : \ f(x) = 0\}$, et $Im\ f = \{f(x) : \ x \in E\}$.
(1) Vérifier l'équivalence : $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x - y \in Ker\ f$.
En déduire : $Ker\ f = \{0\} \Rightarrow \ f$ injective, réciproque ?
(2) On suppose $Ker\ f = \{0\}$.
a) L'image par f d'une base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de E est-elle une base de $Im\ f$?
En déduire : $dim\ E = dim\ Im\ f$, puis : $dim\ E \leq dim\ F$.
b) Prouver l'assertion : $dim\ E = dim\ F \Rightarrow f$ bijective. Réciproque ?
(3) Soient $E = \mathbb{R}_2[x]$, $F = \mathbb{R}^3$ et l'application Φ définie sur E, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, par : $\Phi(P) = \left(\int_0^1 P(t)dt, \ \int_0^1 tP(t)dt, \ \int_0^1 t^2 P(t)dt \ \right)$.
a) Vérifier que la famille $\mathcal{B} = \{1, 2x, 3x^2\}$ est une base de E.
b) Vérifier la linéarité de Φ.
c) Calculer les vecteurs : $\Phi(1), \Phi(x)$ et $\Phi(x^2)$.
d) Quelle est la matrice de Φ lorsque E est muni de la base $\mathcal{B}$, et F est muni de la base canonique ?
e) Soit P un élément de $Ker\ \Phi$, alors pour tout élément $Q = a + bx + cx^2$ de E, prouver : $\int_0^1 P(t)Q(t)dt = 0$.
En déduire $P = 0$, (indication : on utilisera le résultat suivant valable pour toute application continue v : $\int_0^1 v^2(t)dt = 0 \Rightarrow v = 0$).
f) Déduire des questions précédentes que Φ est une bijection linéaire entre espaces vectoriels :
un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3.5

Exo 1.

Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace vectoriel E. On note T l'endomorphisme de E défini par $T(e_1) = T(e_3) = e_3$, $T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.
a) Déterminer le noyau de T.
b) Ecrire la matrice de T dans la base $\mathcal{E}$.
c) On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de E.
d) Calculer $T(f_1)$, $T(f_2)$, $T(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3.
e) En déduire la nature de T.
f) Ecrire la matrice de T dans la base $\mathcal{F}$.

Exo 2.

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n},\ \forall n \geq 0.$$

a) Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$.
Faites l'étude des fonctions f et $f \circ f$ sur $]0, +\infty[$ et déterminer leurs points fixes respectifs sur $]0, +\infty[$.
b) Vérifier que $1 \leq u_n \leq 3$, $\forall n \geq 0$.
c) Montrer que la suite $(u_{2n})_{n\geq 0}$ est croissante et que la suite $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ est décroissante.
d) En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ et déterminer sa limite éventuelle.

Exo 3. (optionnel)

Soient $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ y & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & y = 0 \\ y-1 & \text{si} & y \geq 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$

a) Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité éventuelles de f et de g.
b) Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$.

3.6

I

1. Rappeler la définition d'une application injective de E dans F.
2. On suppose que E est fini de cardinal k et F est fini de cardinal n. Quel est le nombre d'applications injectives de E dans F ?
3. 10 personnes veulent s'assoir sur un banc de 4 places seulement : 4 s'assoient et 6 restent debout. De combien de façons différentes ceci peut-il se faire ? (justifiez votre réponse).

II

Soit A une matrice 3x3, et $\mathcal{E}_A$ l'ensemble des triplets $(X_n) = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ de suites réelles tels que pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Le but de ce problème est de déterminer $\mathcal{E}_A$ pour différentes matrices A.

1. Soit D la matrice diagonale :
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
a) Montrer que les éléments de $\mathcal{E}_D$ sont des triplets de suites géométriques que l'on précisera.
b) Ecrire le terme général de chacune de ces suites lorsque $(u_0, v_0, w_0) = (1, 1, 1)$.
c) Précisez la convergence et les limites éventuelles de ces trois suites (justifiez votre réponse).
2. On considère la matrice 3x3
$$M = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$
et les matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.
Résoudre le système $M \cdot X = Y$ en exprimant l'inconnue X en fonction du second membre Y.
En déduire que la matrice M est inversible et donner la matrice inverse M^{-1}.
3. Soit A la matrice $M \cdot D \cdot M^{-1}$.
a) Calculer la matrice A.
b) Déduire de la relation $A = M \cdot D \cdot M^{-1}$ que le triplet (X_n) appartient à $\mathcal{E}_A$ si et seulement si le triplet $(X'_n) = (M^{-1}X_n)$ appartient à $\mathcal{E}_D$ (cette question peut se traiter sans connaitre le résultat de la question précédente).
c) En déduire l'expression de l'élément (X_n) de $\mathcal{E}_A$ de premier terme $(u_0, v_0, w_0) = (1, 1, 1)$.

3.7

I

1. Quelle formule donne la valeur de C_n^k ? Que compte ce nombre ? (donner une réponse précise)
2. De combien de manières différentes peut-on répartir 12 élèves en trois groupes de 4 élèves ?

II

Soit A une matrice 3x3, et $\mathcal{E}_A$ l'ensemble des triplets $(X_n) = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ de suites réelles tels que pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Le but de ce problème est de déterminer $\mathcal{E}_A$ pour différentes matrices A.

1. Soit D la matrice diagonale :
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
   a) Montrer que les éléments de $\mathcal{E}_D$ sont des triplets de suites géométriques que l'on précisera.
   b) Ecrire le terme général de chacune de ces suites lorsque $(u_0, v_0, w_0) = (1, 1, 1)$.
   c) Précisez la convergence et les limites éventuelles de ces trois suites (justifiez votre réponse).
2. On considère la matrice 3x3
$$M = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$
   et les matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.
   Résoudre le système $M \cdot X = Y$ en exprimant l'inconnue X en fonction du second membre Y. En déduire que la matrice M est inversible et donner la matrice inverse M^{-1}.
3. Soit A la matrice $M \cdot D \cdot M^{-1}$.
   a) Calculer A.
   b) Déduire de la relation $A = M \cdot D \cdot M^{-1}$ que le triplet (X_n) appartient à $\mathcal{E}_A$ si et seulement si le triplet $(X'_n) = (M^{-1}X_n)$ appartient à $\mathcal{E}_D$. (Cette question peut se traiter sans connaitre le résultat de la question précédente)
   c) En déduire l'élément (X_n) de $\mathcal{E}_A$ de premier terme $(u_0, v_0, w_0) = (1, 1, 1)$.

3.8

1. Algèbre linéaire, question de cours. Soient E et F des espaces vectoriels, et soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E, et que l'image de f est un sous-espace vectoriel de F.

2. Combinatoire, question de cours. 2.1. Rappeler l'expression du nombre d'arrangements de p éléments parmi n, et du nombre de combinaisons de p éléments parmi n.

2.2. Montrer la formule pour le nombre d'arrangements.

3. Exercice d'algèbre linéaire. Soient E, F, G des espaces vectoriels, et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications linéaires. On suppose que $g \circ f = 0$. Montrer que l'image de f est contenue dans le noyau de g. Est-ce que la réciproque est vraie ?

4. Dénombrement. Soit $E = \{1, \cdots, n\}$. On souhaite déterminer le nombre de manière de décomposer E en la réunion de trois ensembles disjoints P, Q et R ayant respectivement p, q et r éléments, où $p + q + r = n$.

4.1. On pose $F = P \cup Q$, quel est nombre d'éléments de F ? Déterminer le nombre de manières possibles de décomposer E en la réunion de F et de R.

4.2. Déterminer le nombre de manière de décomposer F en la réunion de P et de Q, ces deux ensembles ayant p et q éléments respectivement.

4.3. En déduire, en fonction de p, q et r, le nombre de manières de décomposer E en $P \cup Q \cup R$.

3.9

Le corrigé de ce sujet est en section 4.3 page 32.

Exercice 1. (2 points) On considère une application définie d'un ensemble E vers un ensemble F.

1- Donner la définition d'une application surjective.

2- Donner la définition d'une application injective.

Exercice 2. (2 points)

Rappel. Soient E et F deux espaces vectoriels. Soient $\mathcal{E}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une base de F. La notation $M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}(\phi)$ désigne la matrice d'une application linéaire de E dans F relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

On note $\mathcal{E} = \{(1,0),(0,1)\}$, on rappelle que c'est une base de $\mathbb{R}^2$. Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\phi(x,y) = (4x + y, 3x + 2y).$$

1- Montrer que l'application ϕ est linéaire.

2- Calculer $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\phi)$ en expliquant comment on obtient le résultat.

Exercice 3. (3 points) On rappelle que le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à q éléments, est q^p.

On veut calculer le nombre d'entiers naturels de n chiffres comportant deux cinq exactement. Par exemple, 1505 est un entier de 4 chiffres qui comporte exactement deux 5, dans ce cas $n = 4$, le premier chiffre est 1, le deuxième 5 etc... On précise que pour faire ce dénombrement, on n'écrit jamais les entiers non nuls avec un 0 comme premier chiffre. Par exemple 012 est écrit 12 et dans ce cas $n = 2$. On supposera que $n \geq 4$ dans tout l'exercice et on justifiera toutes les réponses aux questions qui suivent.

1- On suppose que le premier chiffre est un cinq.

1.1- Quel est le nombre de possibilités de placer le deuxième cinq ?

1.2- En utilisant le résultat cité au début de l'exercice 3, donnez le nombre de possibilités de placer les $n-2$ chiffres restants ?

1.3- En déduire le nombre d'entiers de n chiffres comportant deux cinq et commençant par un cinq.

2- On suppose que le premier chiffre n'est pas un cinq.

2.1- Quel est le nombre de possibilités de placer le premier chiffre.

2.2- Quel est le nombre de possibilités de placer les deux cinq.

2.3- Quel est le nombre de possibilités de placer les $n-3$ autres chiffres restants.

2.4- En déduire le nombre d'entiers de n chiffres comportant deux cinq et ne commençant pas par un cinq.

3- En déduire le nombre d'entiers de n chiffres comportant deux cinq exactement.

3.10 Contrôle de rattrapage

Exercice 1 (3 points)

Rappeler la définition de la borne supérieure d'un ensemble. Donner la borne inférieure de l'ensemble suivant (en justifiant la réponse) :

$$E = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \text{ pour } n \text{ entier naturel strictement positif} \right\}$$

Est-ce que cet ensemble a un minimum ?

Exercice 2 (6 points)

Soit le système $S = \{e_1 = (1,1,1),\ e_2 = (1,1,2),\ e_3 = (1,2,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
1) Montrer que S est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Calculer les coordonnées du vecteur $v = (5,7,12)$ dans cette base.

Exercice 3 (6 points)

Soit la matrice carrée suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1- Calculer A^2 et A^3.
2- Montrer que, pour tout entier naturel non nul, A^n est une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & a_n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

où a_n est une suite à préciser.

Exercice 4 (5 points)

On considère une application définie d'un ensemble E vers un ensemble F.
1- Donner la définition d'une application surjective.
2- Donner la définition d'une application injective.
3- Soit $E = F = \{0,1\}$. Déterminer toutes les applications de E dans F en précisant si elles sont surjectives , injectives ou les deux.

Chapitre 4

Quelques corrigés

4.1 Corrigé du sujet 1.1 page 6

I

- **Sujet A** $\left\{\begin{array}{lcl} 2x+y-z+t & = & 3 \\ x+y+2z-2t & = & 2 \\ 3x-5y+7z-4t & = & 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (L1 \leftrightarrow L2) \left\{\begin{array}{lcl} x+y+2z-2t & = & 2 \\ 2x+y-z+t & = & 3 \\ 3x-5y+7z-4t & = & 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$(L2 \to L2-2L1, L3 \to L3-3L1) \left\{\begin{array}{lcl} x+y+2z-2t & = & 2 \\ -y-5z+5t & = & -1 \\ -8y+z+2t & = & -5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (L3 \to L3-8L2)$

$\left\{\begin{array}{lcl} x+y+2z-2t & = & 2 \\ -y-5z+5t & = & -1 \\ 41z-38t & = & 3 \end{array}\right\}$

$Sol(S) = \{(-9\lambda + \frac{50}{41}, 15\lambda + \frac{26}{41}, 38\lambda + \frac{3}{41}, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\} = (50/41, 26/41, 3/41, 0) + Sol(S_h)$, avec $Sol(S_h) = (-9, 15, 38, 41)\mathbb{R}$ (droite vectorielle).

- **Sujet B** $\left\{\begin{array}{lcl} 3x-5y+7z-4t & = & 3 \\ x+y+2z-2t & = & 2 \\ 2x+y-z+t & = & 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (L1 \leftrightarrow L2) \left\{\begin{array}{lcl} x+y+2z-2t & = & 2 \\ 3x-5y+7z-4t & = & 3 \\ 2x+y-z+t & = & 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$(L2 \to L2-3L1, L3 \to L3-2L1) \left\{\begin{array}{lcl} x+y+2z-2t & = & 2 \\ -8y+z+2t & = & -3 \\ -y-5z+5t & = & -3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (L2 \leftrightarrow L3)$

$\left\{\begin{array}{lcl} x+y+2z-2t & = & 2 \\ -y-5z+5t & = & -3 \\ -8y+z+2t & = & -3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (L3 \to L3-8L2) \left\{\begin{array}{lcl} x+y+2z-2t & = & 2 \\ -y-5z+5t & = & -3 \\ 41z-38t & = & 21 \end{array}\right\}$

$Sol(S) = \{(-9\lambda + \frac{22}{41}, 15\lambda + \frac{18}{41}, 38\lambda + \frac{21}{41}, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\} = (22/41, 18/41, 21/41, 0) + Sol(S_h)$, avec $Sol(S_h) = (-9, 15, 38, 41)\mathbb{R}$ (droite vectorielle).

II

A_1, B_1 sont inclus dans l'e.v. $\mathbb{R}^3$, A_2, B_2 sont inclus dans l'e.v. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ = (cf cours) l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

A_1 est un s.e.v. car non vide (il contient $(0,0,0)$), stable par + (si (x,y,z) et $(x',y',z') \in A_1$ alors $(x,y,z)+(x',y',z') = (x+x', y+y', z+z') \in A_1$ car $(x+x')+(y+y') = (x+y)+(x'+y') = 0+0 = 0$), et stable par produit par chaque réel λ (si $(x,y,z) \in A_1$ alors $\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in A_1$ car $\lambda x + \lambda y = \lambda(x+y) = \lambda 0 = 0$). Argument plus futé (cf cours) : A_1 est un s.e.v. car $A_1 = Sol(S_h)$ où S_h est le système linéaire homogène d'une équation (à trois inconnues x, y, z) $x+y=0$.

B_2 est un s.e.v. car non vide (il contient la fonction constante nulle), stable par + (si $f, g \in B_2$ alors $f+g \in B_2$ car $(f+g)(1) = f(1)+g(1) = 0+0 = 0$), et stable par produit par chaque réel λ (si $f \in B_2$ alors $\lambda f \in B_2$ car $(\lambda f)(1) = \lambda f(1) = \lambda 0 = 0$).

A_2 n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ car il ne contient pas le vecteur nul de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire la fonction constante nulle), puisque cette fonction vérifie $f(0) = 0$ et non pas $f(0) = 1$.

B_1 n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ car il n'est pas stable par + : $(1,0,0), (0,1,0)$ appartiennent à B_1, mais pas leur somme $(1,1,0)$. (Interprétation géométrique : B_1 est la réunion du plan d'équation $x=0$ et du plan d'équation $y=0$).

III

- **Sujet A** A est majorée par hypothèse, et non vide car contenant $B \neq \emptyset$, donc $M = \sup(A)$ existe. M est un majorant de A, donc aussi de B (puisque $B \subset A$), donc B est majorée. Comme de plus B est non vide par hypothèse, $M' = \sup(B)$ existe. L'ensemble des majorants de B est $[M', +\infty[$ et puisqu'il contient M, on a $M \geq M'$.
- **Sujet B** B est minorée par hypothèse, et non vide car contenant $A \neq \emptyset$, donc $m' = \inf(B)$ existe. m' est un minorant de B, donc aussi de A (puisque $A \subset B$), donc A est minorée. Comme de plus A est non vide par hypothèse, $m = \inf(A)$ existe. L'ensemble des minorants de A est $]-\infty, m]$ et puisqu'il contient m', on a $m' \leq m$.

4.2 Corrigé du sujet 3.1 page 18

Exercice 1. *Solution en remplaçant ± par + pour le sujet A et par − pour le sujet B*

a) Linéarité de f : $f(P(X)+Q(X)) = (P(X)+Q(X)) \pm (P(-X)+Q(-X)) = (P(X) \pm P(-X)) + (Q(X) \pm Q(-X)) = f(P(X)) + f(Q(X))$ et $f(\lambda P(X)) = (\lambda P(X)) \pm (\lambda P(-X)) = \lambda(P(X) \pm P(-X)) = \lambda f(P(X))$.
Matrice : $(1 \pm 1, X \pm (-X), X^2 \pm (-X)^2, X^3 \pm (-X)^3) = (1 \pm 1, X \mp X, X^2 \pm X^2, X^3 \mp X^3)$ est égal à $(2, 0, 2X^2, 0)$ si $\pm = +$ et à $(0, 2X, 0, 2X^3)$ si $\pm = -$, donc $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Variante (méthode "simultanée")

sujet A, $f(a + bX + cX^2 + dX^3) = (a + bX + cX^2 + dX^3) + (a - bX + cX^2 - dX^3) = 2a + 2cX^2$ or $\begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 2c \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc f est linéaire et $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = A$;

sujet B, $f(a + bX + cX^2 + dX^3) = (a + bX + cX^2 + dX^3) - (a - bX + cX^2 - dX^3) = 2bX + 2dX^3$ or $\begin{pmatrix} 0 \\ 2b \\ 0 \\ 2d \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ pour $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, donc f est linéaire et $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = B$.

b) Sujet A : $Ker(f) = \{P(X) \in E | P(-X) = -P(X)\} = G$, $Im(f) = \{P(X) + P(-X) | P(X) \in E\} = \{(a + bX + cX^2 + dX^3) + (a - bX + cX^2 - dX^3) | a, b, c, d \in \mathbb{R}\} = Vect(1, X^2) = F$.
Sujet B : $Ker(f) = \{P(X) \in E | P(-X) = P(X)\} = F$, $Im(f) = \{P(X) - P(-X) | P(X) \in E\} = \{(a + bX + cX^2 + dX^3) - (a - bX + cX^2 - dX^3) | a, b, c, d \in \mathbb{R}\} = Vect(X, X^3) = G$.

c) Pour toute application linéaire $f : E \to E'$ (ici, $E' = E$), $Ker(f)$ est toujours un s.e.v. de E et $Im(f)$ un s.e.v. de E'.

d) $F = Vect(1, X^2)$ et $(1, X^2)$ est libre, donc c'est une base de F. $G = Vect(X, X^3)$ et (X, X^3) est libre, donc c'est une base de G.

e) $dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = 2 + 2 = 4 = dim(E)$.

f) $Ker(f) \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective. $Im(f) \neq E$ donc f n'est pas surjective.

Exercice 2.

a) Sujet A : $1 = 10a(1/a - 1/10) = 10 - a \Leftrightarrow a = 9$, et alors on a bien $1/a - 1/10 = 1/9 - 1/10 = 1/90 > 0$.
Sujet B : $1 = 10a(1/10 - 1/a) = a - 10 \Leftrightarrow a = 11$, et alors on a bien $1/10 - 1/a = 1/10 - 1/11 = 1/110 > 0$.

b) L'espérance de la loi uniforme sur $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ est $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k/(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}/(n+1) = n/2$.
D'après le rappel, $E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2/(n+1) = n(n+1)(2n+1)/(6.(n+1)) = n(2n+1)/6$ donc $V(X) = n(2n+1)/6 - n^2/4 = \frac{n}{12}((4n+2) - 3n) = n(n+2)/12$.
Le sujet A correspond à $n = 89$ donc $E(X) = 89/2 = 44,5, V(X) = 89.91/12 \simeq 674,9$.
Le sujet B correspond à $n = 109$ donc $E(X) = 109/2 = 54,5, V(X) = 109.111/12 = 109.37/4 = 1008,25$.

4.3 Corrigé du sujet 3.9 page 26

Exercice 1.

1- Une application d'un ensemble E dans un ensemble F est surjective si pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

2- Une application d'un ensemble E dans un ensemble F est injective si $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$.

Exercice 2.

1- Il faut montrer que $\phi((x_1, y_1)+(x_2, y_2)) = \phi(x_1, y_1)+\phi(x_2, y_2)$ et $\phi(\lambda(x, y)) = \lambda(x, y)$. On a successivement

$$\begin{aligned}\phi((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= \phi(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (4(x_1 + x_2) + y_1 + y_2, 3(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2)) \\ &= (4x_1 + y_1, 3x_1 + 2y_1) + (4x_2 + y_2, 3x_2 + 2y_2) = \phi(x_1, y_1) + \phi(x_2, y_2).\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\phi(\lambda(x, y)) &= \phi(\lambda x, \lambda y) = (4\lambda x + \lambda y, 3\lambda x + 2\lambda y) \\ &= \lambda(4x + y, 3x + 2y) = \lambda\phi(x, y).\end{aligned}$$

2- On a $\phi(1, 0) = (4, 3)$ et $\phi(1, 0) = (1, 2)$. La première (*respectivement* : seconde) colonne de la matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\phi)$ est composée des coordonnées de $\phi(1, 0)$ (*respectivement* : $\phi(0, 1)$). Donc

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On note $E = \{0, \dots, 9\} - \{5\}$. On a $card(E) = 9$.

1.1- Il y a $n - 1$ possibilités de placer le deuxième 5.

1.2- Montrons que ce nombre est 9^{n-2}. Le nombre de possibilités de placer les $n-2$ chiffres restants est égal au nombre de $(n - 2)$-uplets du type $(i_1, \dots i_{n-2})$ tels que $i_k \in E$ et $1 \leq k \leq n - 2$. Chaque $(n - 2)$-uplet définit une application d'un ensemble à $n - 2$ éléments dans E. Le nombre de ces applications est 9^{n-2}.

1.3- On en déduit qu'il y a $9^{n-2}(n - 1)$ entiers comportant deux cinq et commençant par un cinq.

2.1- Dans ce cas le premier chiffre d'un entier comportant plus de quatre chiffres est différent de zéro et de cinq. Il y a 8 possibilités de le choisir.

2.2- C'est le nombre de parties de cardinal 2 d'un ensemble de cardinal $n - 1$. C'est à dire $\binom{n-1}{2}$.

2.3- Il s'agit du nombre de $(n - 3)$-uplets formés d'éléments de E : c'est à dire 9^{n-3}

2.4- On en déduit qu'il y a $8 \times 9^{n-3}\binom{n-1}{2}$ entiers comportant deux cinq et ne commençant pas par un cinq.

3- La somme des résultats des questions 1.3 et 2.4 est le nombre cherché : c'est à dire,

$$9^{n-2}(n - 1) + 8 \times 9^{n-3}\binom{n-1}{2} = 9^{n-3}(n - 1)(4n + 1).$$