TD5 Algèbre linéaire

Applications linéaires

1. Soit l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par : pour tout triplet (x, y, z)

$$f((x, y, z)) = (y - z, -2x - y + z, -2x - y + z)$$

   (a) Vérifier que f est un endomorphime de $\mathbb{R}^3$

   (b) Ecrire la matrice de f dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Considérons la base $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ de $\mathbb{R}^3$ définie par:

$$\begin{aligned} f_1 &= e_2 \\ f_2 &= e_1 - e_2 - e_3 \\ f_3 &= -2e_2 - 2e_3 \end{aligned}$$

   Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

   (d) En déduire le rang de f, une base du noyau et une base de l'image de f.

   (e) L'application f est-elle injective? surjective?

2. Soit l'ev $E = \mathbb{R}^3$. Soient $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 1, 0)$, $w = (1, 0, 1)$.

   (a) Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de E et en déduire que tout vecteur x de E se décompose de manière unique en la somme d'un vecteur x_F de $F = Vect(u, v)$ et d'un vecteur x_G de $G = Vect(w)$, soit $x = x_F + x_G$.

   (b) Démontrer que la projection $p : E \to E$ définie par : pour tout $x \in E$, $p(x) = x_F$ est une application linéaire.

   (c) Déterminer la matrice $[p]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ de p dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $p \circ p = p$.

   (d) Quel est le noyau de p? Son image? La projection p est-elle injective? surjective?

   (e) Donner la matrice A de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et vérifier que $A^2 = A$

   (f) Vérifiez que l'application q telle que $p + q = id_E$, est aussi une projection. Quels sont ses éléments caractéristiques ? Donnez sa matrice dans la base canonique de E.

3. Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $F = G = \mathbb{R}^2$. Soient $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (1, 0, 1)$, $e_3 = (0, 1, 1)$, $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (2, 1)$, $g_1 = (1, 0)$ et $g_2 = (1, 3)$.

   (a) Montrer que $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E, que $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$ est une base de F, et que $\mathcal{G} = (g_1, g_2)$ est une base de G.

   (b) Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ les applications linéaires définies par $f(x, y, z) = (x + y - z, x - y)$, et $g(x, y) = (x + y, x - y)$. Calculer les matrices $[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$, $[g]_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}$ et $[g \circ f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}}(g \circ f)$.

4. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit f l'application linéaire de E dans E dont la matrice $[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ dans la base E est:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Déterminer l'image d'un vecteur $v = (x, y, z)$ par f.

   (b) Ecrire la matrice $[f]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}'}(f)$ de f dans la base $\mathcal{E}' = (e_3, e_2, e_1)$.

   (c) Ecrire la matrice $[f]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}}(f)$ de f dans la base $\mathcal{F} = (e_1 + e_3, e_3, e_2 - e_3)$.

5. Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Montrer que l'application φ de $\mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$, définie par : pour toute matrice M,

$$\varphi(M) = AM - MA$$

   est une application linéaire.
   Donner la matrice $[\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2$.
   φ est-elle injective? surjective?

6. Montrer que dans $\mathbb{R}^n$, l'intersection de deux hyperplans distincts est de dimension $n - 2$