

TD4 Algèbre linéaire

Sous-espaces vectoriels

1. Dans $\mathbb{R}^n$ muni des lois habituelles, lesquels de ces sous-ensembles sont-ils des sous-espaces vectoriels?
 - (a) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0, 2x - y = 0\}$.
 - (b) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x - y)^2 = 2x + y\}$.
 - (c) $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + t = 0 \text{ et } z + t = 1\}$
 - (d) $K = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + t = 0 \text{ et } z + t = 0\}$
 - (e) En cas de réponse positive, en donner la dimension.
2. Déterminer les équations cartésiennes des sev suivants :
 - (a) $F = Vect\{(1, 3)\}$ -sev de $\mathbb{R}^2$
 - (b) $G = Vect\{(1, 2, 3); (1, 0, 1)\}$ -sev de $\mathbb{R}^3$
 - (c) $H = Vect\{(1, 0, 1, 0)\}$ - sev de $\mathbb{R}^4$
3. Montrer que dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $x = (2, 3, -1)$ et $y = (1, -1, -2)$ engendrent le même sev que les vecteurs $u = (3, 7, 0)$ et $v = (5, 0, -7)$
4. Dans $\mathbb{R}^4$, soient $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (1, 1, 1, 3)$, $c = (2, 1, 1, 1)$, $d = (-1, 0, -1, 2)$, $e = (2, 3, 0, 1)$, $U = Vect(a, b, c)$ et $V = Vect(d, e)$. Quelles sont les dimensions des sev $U, V, U \cap V$?
5. Montrer que l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n$ des matrices à n lignes et n colonnes est de dimension n^2 . L'ensemble des matrices inversibles est-il un sev de $\mathcal{M}_n$? Donner un exemple de sev de sev de $\mathcal{M}_n$.
6. Soit l'ensemble des fonctions polynômiales de degré au plus 2,

$$F = \{x \mapsto ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

- (a) Montrer que F est un espace vectoriel.
- (b) Montrer que $\dim F = 3$.
- (c) Montrer que $(f_1 : x \mapsto x(x - 1), f_2 : x \mapsto (x + 1)(x - 1), f_3 : x \mapsto (x + 1)x)$ est une base de F .
- (d) Soit trois réels y_1, y_2, y_3 . Dédurre de la question précédente qu'il existe une et une seule fonction polynômiale $P \in F$ telle que

$$P(-1) = y_1, \quad P(0) = y_2 \quad \text{et} \quad P(1) = y_3.$$

(On donnera les coordonnées de P dans la base (f_1, f_2, f_3) , puis on déterminera ses trois coefficients a, b, c .)