TD3 Algèbre linéaire

Espaces vectoriels

1. Soient les n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$, $(x'_1, \ldots, x'_n)$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque. Exprimer chacun des n-uplets suivants comme combinaison linéaire de $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(x'_1, \ldots, x'_n)$.
   (a) $(x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n)$.
   (b) $(x_1 - x'_1, \ldots, x_n - x'_n)$.
   (c) $(0, \ldots, 0)$.
   (d) $(x_1, \ldots, x_n)$.
   (e) $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.
2. L'ensemble F des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui prennent la valeur 1 en $x = 0$ est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ -pour l'addition et l'opération extérieure classique sur les fonctions
3. Peut-on déterminer x, y réels tels que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ de $\mathbb{R}^4$ soit combinaison linéaire de vecteurs $u_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $u_2 = (-1, 2, 3, 1)$
4. Soient les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par : pour tout$x$ réel, $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = \sin^2 x$, $f_4(x) = \cos^2 x$, $f_5(x) = 1$.
   (a) La famille $\{f_1, f_2, f_5\}$ forme t-elle un système libre?
   (b) Même question pour la famille $\{f_3, f_4, f_5\}$.
5. Montrer que les vecteurs $u_1 = (1, 2)$ et $u_2 = (1, -2)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.
   Donner les coordonnées du vecteur (x, y) dans cette base.
6. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $u_1 = (0, 1, 2)$, $u_2 = (-1, 4, 6)$, $u_3 = (-2, 9, 14)$ et $u_4 = (0, 0, -2)$.
   (a) La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?
   (b) Mêmes questions pour (u_1, u_2, u_3, u_4).
   (c) Montrer que $b = (u_1, u_2, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (d) Déterminer les coordonnées du vecteur $u = (x, y, z)$ dans la base b.
7. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la famille $((a, 1, 2, 2), (0, a, 1, 1), (1, 0, a, 1))$ est-elle une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^4$?
8. Trouver une condition sur les réels a, b, c et d pour que les vecteurs (a, b) et (c, d) forment une base de $\mathbb{R}^2$.