TD2 Algèbre linéaire

Matrices

1. On note
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$
   (a) Calculer $A+B$.
   (b) Calculer $-A+3B$.
   (c) Calculer AB.
   (d) Calculer BA.
   (e) Déterminer quatre réels x, y, z et t tels que
$$xA + yB + zAB + tBA = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. On note
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Calculer AB.
   (b) Parmi AC, BA, BC, CA et CB, quels sont les produits licites et ceux qui ne sont pas définis pour incompatibilité des tailles des matrices ?
   (c) Vérifier que $(AB)C = A(BC)$.

3. Soit la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Calculer A^2
   (b) Calculer A^3.
   (c) Calculer $A^3 - 3A^2 - 2A$, en déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
   (d) Résoudre
$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +y & -z & = & 1 \\ 2x & +3y & +z & = & 2 \\ -x & -2y & -z & = & 3. \end{array} \right.$$

4. (optionnel) Soit la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   On note J la matrice $J = A - I_3$ où I_3 est la matrice unité d'ordre 3.
   (a) Montrer que $J^3 = 0$ et en déduire en dévellopant $(A - I_3)^3$ que A est inversible, puis calculer A^{-1}.
   (b) Vérifier que $I_3 J = J I_3$ et calculer A^n pour n entier, en utilisant la formule du binôme de Newton