TD1 Algèbre linéaire

Résolution de systèmes – Symbole $\sum$

1. Résoudre

$$(S1)\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -y & +z & = & 1 \\ 2x & -2y & -3z & = & 17 \\ -x & +y & +2z & = & -10 \end{array}\right. \qquad (S2)\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & +4x_2 & -3x_3 & +4x_4 & = & 5 \\ 5x_1 & +10x_2 & -8x_3 & +11x_4 & = & 12 \end{array}\right.$$

$$\text{et} \qquad (S3)\left\{\begin{array}{rrrcr} 6x & +3y & -4z & = & 1 \\ -4x & +y & -6z & = & 0 \\ x & +2y & -5z & = & -1. \end{array}\right.$$

2. Résoudre,suivant les valeurs de m réel le système

$$\left\{\begin{array}{rrcr} mx & +y & = & 1 \\ x & +my & = & 1 \end{array}\right.$$

Soit le système

$$(S_m)\left\{\begin{array}{rrrcr} mx & +y & +z & = & 1 \\ x & +my & +z & = & 1 \\ x & +y & +mz & = & 1 \end{array}\right.$$

   (a) Déterminer les valeurs de m réel, pour lesquelles ce système possède une unique solution. (On ne demande pas de calculer cette solution.)

   (b) Résoudre complètement le système pour $m = 1$ et pour $m = -2$.

3. Vous disposez de deux alliages, l'un contenant 35% d'argent, l'autre 60%. Quelle quantité de chacun de ces deux alliages devez vous fondre et mélanger pour obtenir 100g d'un alliage contenant 50% d'argent ?

4. Calculer les expressions suivantes (l'une d'entre elles n'a aucun sens) :

   (a) $\displaystyle\sum_{i=3}^{5}(2i-5)^2$.

   (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{i}(j-i)^2$.

   (c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\left((i+j)\times\sum_{j=2}^{3}j^2\right)$.

   (d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{10}i^6-\sum_{j=1}^{9}(j+1)^6$.

   (e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{99}(i^2+i)$. On pourra au préalable développer $(i+1)^3-i^3$.

5. Démontrer par récurrence l'égalité suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i=1}^{n} k.k! = (n+1)!-1.$$