TD1 Algèbre linéaire

Résolution de systèmes – Symbole Σ

1. Résoudre

$$(S1) \begin{cases} x & -y & +z & = & 1 \\ 2x & -2y & -3z & = & 17 \\ -x & +y & +2z & = & -10 \end{cases} \quad (S2) \begin{cases} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & +4x_2 & -3x_3 & +4x_4 & = & 5 \\ 5x_1 & +10x_2 & -8x_3 & +11x_4 & = & 12 \end{cases}$$

et $(S3) \begin{cases} 6x & +3y & -4z & = & 1 \\ -4x & +y & -6z & = & 0 \\ x & +2y & -5z & = & -1. \end{cases}$

2. Résoudre, suivant les valeurs de m réel le système

$$\begin{cases} mx & +y & = & 1 \\ x & +my & = & 1 \end{cases}$$

Soit le système

$$(S_m) \begin{cases} mx & +y & +z & = & 1 \\ x & +my & +z & = & 1 \\ x & +y & +mz & = & 1 \end{cases}$$

- (a) Déterminer les valeurs de m réel, pour lesquelles ce système possède une unique solution. (On ne demande pas de calculer cette solution.)
 - (b) Résoudre complètement le système pour $m = 1$ et pour $m = -2$.
3. Vous disposez de deux alliages, l'un contenant 35% d'argent, l'autre 60%. Quelle quantité de chacun de ces deux alliages devez vous fondre et mélanger pour obtenir 100g d'un alliage contenant 50% d'argent ?
4. Calculer les expressions suivantes (l'une d'entre elles n'a aucun sens) :

(a) $\sum_{i=3}^5 (2i - 5)^2$.

(b) $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^i (j - i)^2$.

(c) $\sum_{i=1}^2 \left((i + j) \times \sum_{j=2}^3 j^2 \right)$.

(d) $\sum_{i=1}^{10} i^6 - \sum_{j=1}^9 (j + 1)^6$.

(e) $\sum_{i=1}^{99} (i^2 + i)$. On pourra au préalable développer $(i + 1)^3 - i^3$.

5. Démontrer par récurrence l'égalité suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n k.k! = (n + 1)! - 1.$$