

Jean-Pierre Dedieu
Jean-Claude Yakoubsohn

SUITES NUMÉRIQUES : UNE INTRODUCTION

MIP, Département de Mathématiques
Université Paul Sabatier
31062 Toulouse cedex 04
dedieu@mip.ups-tlse.fr
yak@mip.ups-tlse.fr

Table des Matières

1	Nombres réels	5
1.1	Structure algébrique.	5
1.2	Relation d'ordre.	6
1.3	L'axiome de la borne supérieure.	6
1.4	$\mathbb{R}$ est archimédien.	8
1.5	Partie entière, valeur absolue.	8
2	Suites numériques : définitions et exemples.	9
2.1	Définitions	9
2.2	Opérations	10
2.3	Le principe de récurrence	11
2.4	Suites classiques	11
2.4.1	Suites arithmétiques	11
2.4.2	Suites géométriques	12
2.4.3	Suites arithmético-géométriques	12
2.4.4	Séries géométriques.	12
2.4.5	Suites linéaires d'ordre 2.	12
2.4.6	Itérations successives	12
3	Limite d'une suite.	13
3.1	Définitions	13
3.2	Opérations et limites	15
3.3	Limites et relation d'ordre	17
4	Limites infinies	19
4.1	La droite réelle achevée	19
4.2	Limites infinies	20
4.3	Opérations sur les limites.	20
4.4	Ordre et limites infinies	21
4.5	Limites classiques.	22
5	Théorèmes de convergence.	25
5.1	Monotonie et convergence	25
5.2	Suites adjacentes	27
5.3	Le théorème de Bolzano-Weierstrass (hors programme).	28

6	Itérations successives.	31
6.1	Image d'une suite par une fonction continue	31
6.2	Itérations successives.	31
6.3	Aspects graphiques.	32
6.4	Théorème de convergence.	33
6.4.1	Rappel. Le théorème des accroissements finis.	33
6.4.2	Théorèmes de convergence.	33
6.5	Exemples	34
6.5.1	Approximation de $\sqrt{a}$, $a > 0$.	34
6.5.2	Suites homographiques.	35
7	Réurrences linéaires d'ordre 2.	37
7.1	Introduction	37
7.1.1	Suite de Fibonacci	37
7.1.2	Discrétisation d'une équation différentielle d'ordre 2.	37
7.2	L'espace vectoriel des récurrences	38
7.3	Résolution	39
7.3.1	Les racines α et β sont réelles et distinctes	39
7.3.2	Les racines α et β sont distinctes et complexes conjuguées	40
7.3.3	Une racine double	40
7.4	Exemples	41
7.4.1	Exemple 1	41
7.4.2	Exemple 2.	41
7.4.3	Exemple 3.	41
7.5	Réurrences linéaires et calcul matriciel	42
8	Suites de Cauchy	45

1. Nombres réels

Le résultat essentiel de ce chapitre est le suivant :

Théorème 1 *L'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, est un corps commutatif, totalement ordonné, archimédien et satisfaisant à l'axiome de la borne supérieure.*

La suite consiste à fixer le vocabulaire et à expliquer chaque notion introduite dans ce théorème.

1.1 Structure algébrique.

On note

1- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ les entiers naturels,

2- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ les entiers relatifs,

3- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \neq 0\}$ les nombres rationnels.

ainsi que $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*$ les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ privés de 0. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Définition 1 $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif contenant $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$. C'est à dire que, pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a :

$(\mathbb{R}, +)$ groupe commutatif	$(\mathbb{R}^*, \times)$ groupe commutatif
$a + b = b + a$	$ab = ba$
$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a(bc) = (ab)c$
$a + 0 = 0 + a = a$	$a \times 1 = 1 \times a = a$
$a + (-a) = (-a) + a = 0$	$a \times a^{-1} = a^{-1}a = 1, (a \neq 0)$

$$a(b + c) = ab + bc$$

1.2 Relation d'ordre.

Definition 2 $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné : c'est à dire que, pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$, la relation $\leq$ vérifie:

$$\begin{array}{ll} a \leq a, & \text{réflexivité} \\ a \leq b \text{ et } b \leq a \Rightarrow a = b & \text{antisymétrie} \\ a \leq b \text{ et } b \leq c \Rightarrow a \leq b & \text{transitivité} \\ a \leq b \text{ ou } b \leq a & \text{ordre total} \end{array}$$

et elle est compatible avec l'addition et la multiplication :

$$\begin{array}{l} a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c \\ a \leq b \text{ et } c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc. \end{array}$$

Definition 3 On appelle intervalle tout ensemble I tel que, pour tout $x, y \in I$ et pour tout $z \in \mathbb{R}$

$$x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I.$$

On appelle

- 1- Intervalles fermés : $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $] - \infty, a]$, $\mathbb{R}$, $\emptyset$.
- 2- Intervalles ouverts : $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $] - \infty, a[$, $\mathbb{R}$, $\emptyset$.
- 3- $]a, b]$ et $[a, b[$ ne sont ni ouverts, ni fermés.

Exemples de nombres réels remarquables.

- 1- $\sqrt{2}$: rapport de la diagonale d'un carré à son côté.
- 2- $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$: nombre d'or, c'est la solution positive de $x^2 - x - 1 = 0$. C'était, dans la Grèce antique, le rapport idéal entre le grand côté et le petit côté d'un rectangle.
- 3- π : rapport du périmètre d'un cercle à son diamètre.
- 4- e : base des logarithmes népériens.

1.3 L'axiome de la borne supérieure.

Definition 4 Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que

- a est un **majorant** de A si pour tout $x \in A$ on a $x \leq a$,
- a est un **minorant** de A si pour tout $x \in A$ on a $a \leq x$,
- A est **majoré** s'il a un majorant,

- A est **minoré** s'il a un minorant,
- A est **borné** s'il est majoré et minoré.

Exemple 1 L'intervalle $]0, 1]$ est borné : -2 est un minorant, 2 est un majorant.

Proposition 1 Lorsque A est majoré et non-vide, l'ensemble des majorants de A est un intervalle illimité à droite.

Axiome 1 Lorsque A est majoré et non-vide, l'ensemble des majorants de A est du type $[M, +\infty[$. On appelle M la **borne supérieure** de A . On la note $M = \sup(A)$.

Proposition 2 Lorsque A est minoré et non-vide, l'ensemble des minorants de A est du type $] -\infty, m]$. On appelle m la **borne inférieure** de A . On la note $m = \inf(A)$.

Définition 5 Si la borne supérieure M (resp. inférieure m) de A est dans A on l'appelle le **maximum** ou le **plus grand élément** de A (resp. le **minimum** ou le **plus petit élément** de A). On note alors $M = \max(A)$ (resp. $m = \min(A)$).

Exemple 2 L'ensemble des majorants de $]0, 1[$ est l'intervalle $[1, +\infty[$. Ainsi, $\sup]0, 1[= 1$ et $\max]0, 1[$ n'existe pas. L'ensemble des majorants de $]0, 1]$ est l'intervalle $[1, +\infty[$ mais cette fois-ci $\max]0, 1] = 1$.

Deux caractérisations de la borne supérieure sont données par les propositions suivantes.

Proposition 3 Soit A une partie majorée et non vide de $\mathbb{R}$. Il y a équivalence entre
1- $M = \sup A$.

2- M est le plus petit des majorants de A .

Proposition 4 Soit A une partie majorée et non vide de $\mathbb{R}$. Il y a équivalence entre
1- $M = \sup A$,

2- M est un majorant de A et, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $M - \epsilon < x$.

Preuve. Montrons que 1 implique 2. Supposons que $M = \sup A$. C'est donc un majorant de A . Supposons que pour un certain $\epsilon > 0$ il n'existe pas $x \in A$ tel que $M - \epsilon < x$. On a donc $x \leq M - \epsilon$ pour tout $x \in A$. Mais alors $M - \epsilon$ est un majorant de A strictement plus petit que M ce qui est impossible.

Montrons que 2 implique 1. Notons que M est un majorant de A et supposons que M ne soit pas la borne supérieure. Soit N cette borne supérieure. On a $N < M$. Prenons $\epsilon = M - N > 0$. Par hypothèse, il existe $x \in A$ tel que $M - \epsilon < x$. Ceci donne $M - \epsilon = M - (M - N) = N < x$ et N n'est pas un majorant de A : absurde, ce qui achève la preuve. $\square$

On a une proposition similaire pour la borne inférieure.

Proposition 5 Soit A une partie minorée et non vide de $\mathbb{R}$. Il y a équivalence entre
1- $m = \inf A$

2- m est le plus grand des minorants de A ,

2- m est un minorant de A et, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $m + \epsilon < x$.

1.4 $\mathbb{R}$ est archimédien.

Proposition 6 $\mathbb{R}$ est archimédien, c'est à dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x < n$.

Preuve. Si $x \leq 0$ on prend $n = 1$. Supposons que $x > 0$. L'ensemble $A = \{k \in \mathbb{N} : k \leq x\}$ est majoré par x et contient 0. Nous pouvons donc considérer sa borne supérieure $M = \sup A$. Prenons $\epsilon = 1/2$. D'après la proposition 4 il existe $k \in A$ tel que $M - 1/2 < k \leq M$ de sorte que $M < M + 1/2 < k + 1$ et que $k + 1 \notin A$ (sans quoi M ne serait pas le supremum de A). Ainsi, $k + 1 > x$ et on prend $n = k + 1$. $\square$

C'est l'existence d'une borne supérieure qui permet, dans la preuve précédente, la construction de n .

Corollaire 1 Entre deux réels il y a toujours un rationnel : pour tout x et $y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$, il existe un rationnel p/q tel que $x < p/q < y$. On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve. Par la proposition 6, il existe un entier $q > 0$ tel que $1/(y - x) < q$ ainsi qu'un entier $n > 0$ tel que $qx < n$. L'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N}^* : qx < n\}$ est minoré par 1 et non vide : il possède une borne inférieure $p = \inf A$. On a donc $p - 1 \leq qx < p$ de sorte que $qx < p \leq qx + 1$ et $x < p/q \leq x + 1/q < y$ par la première inégalité. $\square$

1.5 Partie entière, valeur absolue.

Définition 6 On appelle partie entière de $x \in \mathbb{R}$ la quantité

$$E(x) = \max \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

Par exemple, $E(2.5) = 2$ et $E(-2.5) = -3$.

Définition 7 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $x_+ = \max(x, 0)$ et $x_- = \max(-x, 0)$. Notons que $x = x_+ - x_-$. On appelle valeur absolue de x la quantité

$$|x| = x_+ + x_-.$$

Une définition équivalente est la suivante :

$$|x| = x \text{ si } x \geq 0 \text{ et } |x| = -x \text{ si } x \leq 0.$$

Proposition 7 Pour tout x et $y \in \mathbb{R}$ on a :

- 1- $|x| \geq 0$,
- 2- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- 3- $|x + y| \leq |x| + |y|$,
- 4- $||x| - |y|| \leq |x + y|$,
- 5- $|xy| = |x| |y|$.

2. Suites numériques : définitions et exemples.

2.1 Définitions

Définition 8 Une suite numérique est une application $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Au lieu de $u(n)$ on note u_n l'image de n par l'application u et $u = (u_n)_{n \geq 0}$.

Remarque 1 Toutes les suites n'ont pas $\mathbb{N}$ comme domaine de définition, ainsi la suite $(1/n)_{n \geq 1}$. Plus généralement on peut considérer $u = (u_n)_{n \geq n_0}$. Le fait de supposer $n_0 = 0$ n'est pas une perte de généralité: il suffit de considérer la suite $v = (u_{n+n_0})_{n \geq 0}$.

Il y a plusieurs manières de définir une suite :

- explicitement : $u_n = 1/n$ pour $n > 1$.
- par récurrence : $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} + 1$.
- par une propriété : u_n est le $n^{\text{ème}}$ nombre premier.

Définition 9 Deux suites u et v sont égales si $u_n = v_n$ pour tout n .

On introduit différents types de suites.

Définition 10

- Suite nulle : $0 := (0)_{n \geq 0}$,
- Suite unité : $1 := (1)_{n \geq 0}$,
- Suite constante : il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = a$ pour tout n ,
- Suite stationnaire : il existe $a \in \mathbb{R}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = a$ pour tout $n \geq n_0$,
- Suite majorée : il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq a$ pour tout n ,
- Suite minorée : il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \leq u_n$ pour tout n ,
- Suite bornée : suite majorée et minorée,
- Suite périodique : il existe un entier m tel que $u_{m+n} = u_n$ pour tout n ,

- **Suite croissante** : pour tout $n \geq 0$ on a $u_n \leq u_{n+1}$,
- **Suite décroissante** : pour tout $n \geq 0$ on a $u_{n+1} \leq u_n$,
- **Sous-suite** : une suite v est une sous-suite d'une suite u si $v = u \circ \sigma$ où σ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On note $v = u_\sigma$ et $v_n = u_{\sigma(n)}$.

Exemples.

- 1- La suite $(1/n)_{n \geq 1}$ est majorée par 1 et minorée par 0.
- 2- La suite $(1/n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
- 3- La suite $(n^2)_{n \geq 0}$ est croissante.
- 4- La suite $(\sin \frac{2n\pi}{3})_{n \geq 0}$ est de période 3.
- 5- Les suites $(2n)_{n \geq 0}$ et $(2n+1)_{n \geq 0}$ sont des sous-suites de la suite $u = (n)_{n \geq 0}$.
Ce sont respectivement $(u_{2n})_{n \geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$.
- 6- $(u_1, u_5, u_2, u_7, \dots)$ n'est pas une sous-suite de u .

2.2 Opérations

Soient $u = (u_n)_{n \geq 0}$ et $v = (v_n)_{n \geq 0}$. On définit les opérations suivantes :

- somme : $u + v = (u_n + v_n)_{n \geq 0}$
- multiplication par un réel λ : $\lambda u = (\lambda u_n)_{n \geq 0}$
- produit : $uv = (u_n v_n)_{n \geq 0}$
- quotient : $u/v = (u_n/v_n)_{n \geq 0}$ sous la condition $v_n \neq 0$ pour tout n .

Théorème 2 *L'ensemble des suites numériques est une algèbre sur $\mathbb{R}$ c'est à dire que les opérations $u + v$, λu et uv vérifient :*

$$\begin{array}{lll}
 u + v = v + u & \lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u & uv = vu \\
 u + (v + w) = (u + v) + w & \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v & u(vw) = (uv)w \\
 u + 0 = u & (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u & 1u = u \\
 u + (-u) = 0 & 1u = u & u(v + w) = uv + uw
 \end{array}$$

où u, v, w désignent des suites, λ et μ des nombres réels.

Remarque 2 *Les axiomes de la première colonne sont ceux d'un groupe commutatif, ceux des deux premières colonnes caractérisent un espace vectoriel, les axiomes des colonnes 1 et 3 sont ceux d'un anneau commutatif.*

2.3 Le principe de récurrence

Ce principe fondamental repose sur la propriété suivante : *tout sous-ensemble non-vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.* Cette propriété fondamentale de l'ensemble des entiers naturels est admise sans démonstration.

Théorème 3 *Soit $P_0, \dots, P_n, \dots$ une suite de propriétés. Si*

1- P_0 est vraie,

2- Pour tout $n \geq 0$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

alors, pour tout $n \geq 0$, P_n est vraie.

Preuve. Supposons que P_n soit fausse pour un certain entier $n > 0$. Introduisons $A = \{k \in \mathbb{N} : P_k \text{ est fausse}\}$. L'ensemble A est non vide par hypothèse, il possède donc un plus petit élément $m > 0$. On sait que m est le plus petit entier pour lequel P_m est fausse, donc P_{m-1} est vraie. Par hypothèse P_{m-1} implique P_m de sorte que P_m est vraie ... et l'on aboutit à une contradiction. $\square$

Remarque 3 *Il faut bien faire la différence entre le fait que P_n et P_{n+1} soient vraies et le fait que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ est vraie. Par exemple $(x = y) \Rightarrow (x + 1 = y + 1)$ est vraie quels que soient les nombres réels x et y . En particulier $(2 = 2) \Rightarrow (3 = 3)$ mais aussi $(2 = 4) \Rightarrow (3 = 5)$ sont vraies toutes deux.*

Comment prouve-t-on qu'une implication $P \Rightarrow Q$ est vraie ? On utilise la méthode de l'hypothèse auxiliaire ! Cela consiste à supposer que P est vraie et à prouver, à l'aide de cette hypothèse supplémentaire, que Q est vraie elle aussi.

Exemple.

Soit a un nombre réel tel que $a > 0$. Montrons que

$$an < (1 + a)^n$$

pour tout $n \geq 0$. Pour $n = 0$ on a bien $0 < (1 + a)^0 = 1$. Notons aussi que

$$1 \leq (1 + a)^n.$$

Montrons que $an < (1 + a)^n$ implique $a(n + 1) < (1 + a)^{n+1}$. Puisque $an < (1 + a)^n$ on a

$$a(n + 1) = an + a < (1 + a)^n + a(1 + a)^n = (1 + a)^{n+1}.$$

2.4 Suites classiques

2.4.1 Suites arithmétiques

$$u_{n+1} = u_n + b, n \geq 0.$$

b est la raison et $u_n = u_0 + nb$.

2.4.2 Suites géométriques

$$u_{n+1} = au_n \text{ d'où } u_n = a^n u_0.$$

2.4.3 Suites arithmético-géométriques

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

On obtient par récurrence

$$u_n = a^n u_0 + b \sum_{i=0}^{n-1} a^i.$$

2.4.4 Séries géométriques.

$$S_0 = 1, \quad S_n = S_{n-1} + a^n.$$

Si $a \neq 1$ alors

$$S_n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

et si $a = 1$ on a $S_n = n + 1$.

2.4.5 Suites linéaires d'ordre 2.

Pour a et $b \in \mathbb{R}$ donnés, on définit

$$u_0 = a, \quad u_1 = b, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \quad n \geq 0.$$

2.4.6 Itérations successives

Soit $f : I \rightarrow I$ avec $I \subset \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$ donné. On pose

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

pour tout $n \geq 0$.

3. Limite d'une suite.

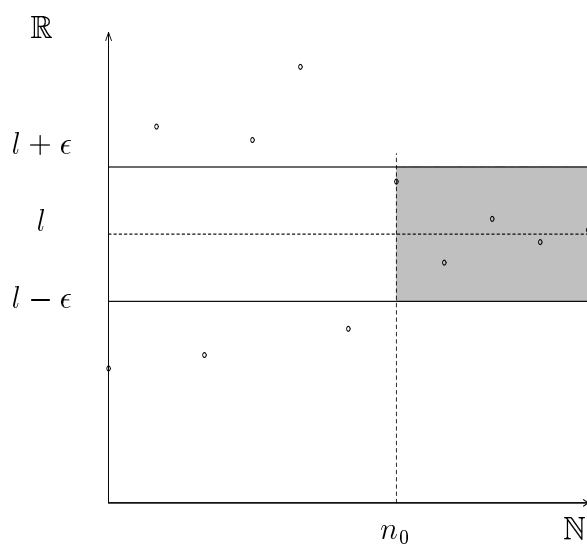
3.1 Définitions

Définition 11 On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ admet une limite l quand n tend vers l'infini si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a

$$|u_n - l| \leq \epsilon.$$

On dit aussi que la suite u converge vers l ou encore que la suite u est convergente et on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$



La convergence d'une suite se traduit graphiquement par l'appartenance des points de coordonnées (n, u_n) à la bande du plan hachurée sur la figure ci-dessus pour tout $n \geq n_0$.

En termes d'opérateurs logiques la limite d'une suite se définit ainsi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) \ (\exists n_0 \geq 0) \ (\forall n \geq n_0) \ |u_n - l| \leq \epsilon.$$

Exemple. Montrons que la suite de terme général $u_n = \frac{n+1}{n}$ a pour limite 1. Soit $\epsilon > 0$. Montrons qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait

$$|u_n - 1| = \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} \leq \epsilon.$$

Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe n_0 tel que $\frac{1}{\epsilon} \leq n_0$. Tout entier $n \geq n_0$ satisfait

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \epsilon.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Remarque 4 *L'entier n_0 dépend de ϵ . Ainsi dans l'exemple précédent on peut prendre $n_0 = E(1/\epsilon) + 1$. Si $\epsilon = 0.1$ on peut choisir $n_0 = 10$, pour $\epsilon = 0.01$ l'entier $n_0 = 100$ convient.*

Théorème 4 *La limite d'une suite convergente est unique.*

Preuve. Supposons qu'une suite convergente u admette deux limites $l_1 \neq l_2$. Soit $\epsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{4} > 0$. Il existe n_1 tel que

$$n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - l_1| \leq \epsilon$$

et de façon similaire il existe n_2 tel que

$$n \geq n_2 \Rightarrow |u_n - l_2| \leq \epsilon.$$

Pour $n = \max\{n_1, n_2\}$ on a

$$|l_1 - l_2| = |(l_1 - n) - (l_2 - n)| \leq |l_1 - u_n| + |l_2 - u_n| \leq 2\epsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$$

ce qui n'est pas possible si $l_1 \neq l_2$. Donc $l_1 = l_2$. □

Théorème 5 *La convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas des premiers termes de la suite.*

Preuve. Si $v_n = u_n$ pour tout $n \geq n_1$ et si $\lim u_n = l$ c'est à dire si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \geq 0, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon$$

alors, pour tout $\epsilon > 0$, si l'on prend $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ on aura

$$|v_n - l| = |u_n - l| \leq \epsilon$$

et donc $\lim v_n = l$. □

Proposition 8 *Toute suite convergente est bornée.*

Preuve. Soit $\epsilon = 1$. Il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $|u_n - l_1| \leq 1$ de sorte que

$$l - 1 \leq u_n \leq l + 1.$$

Notons

$$a = \min_{0 \leq k \leq n_0-1} u_k \text{ et } b = \max_{0 \leq k \leq n_0-1} u_k.$$

de sorte que, pour tout $k \geq n_0 - 1$,

$$a \leq u_k \leq b.$$

On réunit ces deux inégalités en

$$\min(a, l - 1) \leq u_k \leq \max(l + 1, b)$$

pour tout $k \geq 0$, et donc la suite u est bornée. $\square$

Remarque 5 *Toute suite bornée n'est pas convergente. Il suffit de considérer $u_n = (-1)^n$. Mais on verra que toute suite bornée possède une sous-suite convergente.*

Terminons cette section en soulignant que les techniques de preuve reposent en grande partie sur l'encadrement

$$|x| - |y| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$$

et l'équivalence de

$$|x - y| \leq a$$

et de

$$y - a \leq x \leq y + a.$$

3.2 Opérations et limites

Proposition 9 *Soient $u = (u_n)_{n \geq 0}$ et $v = (v_n)_{n \geq 0}$ deux suites convergentes. Alors,*

- 1- *La suite $u + v$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$,*
- 2- *La suite uv est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$,*
- 3- *Sous la condition $u_n \neq 0$ pour tout n et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$, la suite $1/u$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n}$,*
- 4- *La suite λu est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.*

5- La suite $|u|$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \right|$,

6- $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Preuve. Soient $\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_3$ trois nombres réels strictement positifs. Notons par l_1 et l_2 les limites des suites u et v respectivement. Notons n_1 et n_2 des entiers associés aux suites u et v pour lesquels

$$\begin{aligned} n \geq n_1 &\Rightarrow |u_n - l_1| \leq \epsilon_1, \\ n \geq n_2 &\Rightarrow |v_n - l_2| \leq \epsilon_2. \end{aligned}$$

1- Prenons $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon/2$ et soit $n \geq \max(n_1, n_2)$. Alors

$$\begin{aligned} |u_n + v_n - (l_1 + l_2)| &\leq |u_n - l_1| + |v_n - l_2| \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \end{aligned}$$

d'où le 1.

2- Puisque v converge, v est bornée. Soit $a > 0$ tel que $|v_n| \leq a$ pour tout n .

Soient $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2a}$, $\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2 \max(1, |l_1|)}$ et soit $n \geq \max(n_1, n_2)$. Alors

$$\begin{aligned} |u_n v_n - l_1 l_2| &= |(u_n - l_1)v_n + l_1(v_n - l_2)| \\ &\leq |u_n - l_1| |v_n| + |v_n - l_2| |l_1| \\ &\leq |u_n - l_1| a + |v_n - l_2| \max(1, |l_1|) \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \end{aligned}$$

d'où le 2.

3- Puisque u converge vers $l_1 \neq 0$, pour $\epsilon = |l_1|/2$, il existe $n_0 > 0$ tel que

$$|u_n - l_1| \leq |l_1|/2$$

pour tout $n \geq n_0$. On en déduit que

$$\frac{|l_1|}{2} \leq |u_n|$$

pour tout $n \geq n_0$. Soient $\epsilon > 0$ donné et $\epsilon_1 = \frac{\epsilon l_1^2}{2}$. Pour tout $n \geq \max(n_1, n_0)$ on a

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l_1} \right| = \frac{|u_n - l_1|}{|u_n| |l_1|} \leq \frac{2|u_n - l_1|}{l_1^2} \leq \frac{2\epsilon_1}{l_1^2} = \epsilon$$

d'où le 3.

4- Soient $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{\max(1, |\lambda|)}$ et $n \geq n_1$. Alors

$$|\lambda u_n - \lambda l| = |\lambda| |u_n - l| \leq |\lambda| \frac{\epsilon}{\max(1, |\lambda|)} \leq \epsilon$$

d'où le 4.

5- Soient $\epsilon_1 = \epsilon$ et $n \geq n_1$. Alors

$$||u_n| - |l|| \leq |u_n - l| \leq \epsilon$$

d'où le 5.

6- C'est une conséquence du 5.

□

3.3 Limites et relation d'ordre

Proposition 10 *Si pour deux suites convergentes u et v on a $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 0$ alors*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Preuve. Soient l_1 et l_2 les limites de u et v respectivement. Raisonnons par l'absurde et supposons que $l_1 > l_2$. Soit $2\epsilon < l_1 - l_2$, n_1 et n_2 les entiers pour lesquels

$$n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - l_1| \leq \epsilon,$$

$$n \geq n_2 \Rightarrow |v_n - l_2| \leq \epsilon$$

et soit $n \geq \max(n_1, n_2)$. On a

$$l_1 - \epsilon \leq u_n \leq l_1 + \epsilon,$$

$$l_2 - \epsilon \leq v_n \leq l_2 + \epsilon,$$

$$u_n \leq v_n,$$

mais puisque $2\epsilon < l_1 - l_2$ on obtient

$$v_n \leq l_2 + \epsilon < l_1 - \epsilon \leq u_n$$

ce qui contredit $u_n \leq v_n$.

□

Remarque 6 *Cette propriété subsiste si l'inégalité $u_n \leq v_n$ n'est satisfaite que pour tout $n \geq n_0$.*

Les inégalités strictes ne passent pas à la limite. Par exemple $1/(2n) < 1/n$ pour tout $n > 0$ mais $\lim 1/(2n) = \lim 1/n = 0$.

Le théorème d'encadrement suivant se déduit du précédent :

Théorème 6 *Soient trois suites u , v et w et un entier n_0 tels que*

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

pour tout $n \geq n_0$. Si u et w convergent vers la même limite l , alors la suite v converge aussi vers l .

Preuve. Soit $\epsilon > 0$ et soient n_1 et n_2 des entiers pour lesquels

$$\begin{aligned}n \geq n_1 &\Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon, \\n \geq n_2 &\Rightarrow |w_n - l| \leq \epsilon.\end{aligned}$$

Pour tout $n \geq \max(n_0, n_1, n_2)$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ implique $u_n - l \leq v_n - l \leq w_n - l$ et les deux inégalités $-\epsilon \leq u_n - l \leq \epsilon$ et $-\epsilon \leq w_n - l \leq \epsilon$ donnent :

$$-\epsilon \leq u_n - l \leq v_n - l \leq w_n - l \leq \epsilon.$$

Donc $-\epsilon \leq v_n - l \leq \epsilon$ et $|v_n - l| \leq \epsilon$.

□

4. Limites infinies

4.1 La droite réelle achevée

On adjoint à $\mathbb{R}$ deux nouveaux éléments que l'on note $+\infty$ et $-\infty$.

Définition 12 La droite réelle achevée est l'ensemble

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

On prolonge les quatre opérations dans $\bar{\mathbb{R}}$ par :

+	$-\infty$	x	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	ND
y	$-\infty$	$x + y$	$+\infty$
$+\infty$	ND	$+\infty$	$+\infty$

-	$-\infty$	x	$+\infty$
$-\infty$	ND	$-\infty$	$-\infty$
y	$+\infty$	$y - x$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ND

$\times$	$-\infty$	$u < 0$	0	$v > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ND	$-\infty$	$-\infty$
$x < 0$	$+\infty$	xu	0	xv	$-\infty$
0	ND	0	0	0	ND
$y > 0$	$-\infty$	yu	0	yv	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	ND	$+\infty$	$+\infty$

/	$-\infty$	$u < 0$	0	$v > 0$	$+\infty$
$-\infty$	ND	$+\infty$	ND	$-\infty$	ND
$x < 0$	0	x/u	ND	x/v	0
0	0	0	ND	0	0
$y > 0$	0	y/u	ND	y/v	0
$+\infty$	ND	$-\infty$	ND	$+\infty$	ND

où ND signifie *non défini*. La relation d'ordre $\leq$ est prolongée par :

$$-\infty < x < +\infty \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Insistons sur le fait que les formes suivantes sont **indéterminées** :

- 1- $(+\infty) + (-\infty)$,
- 2- $(+\infty) - (+\infty)$,
- 3- $(-\infty) - (-\infty)$,
- 4- $0(+\infty)$ et $0(-\infty)$,
- 5- $x/0$ pour $x \in \bar{\mathbb{R}}$,
- 6- $\pm\infty / \pm\infty$.

Notons que la *règle des signes* qui régit le signe d'un produit ou d'un quotient de deux nombres réels est respectée dans $\mathbb{R}$. Une conséquence de l'axiome de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ est la proposition suivante.

Proposition 11 *Toute partie non-vide $A \subset \mathbb{R}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\mathbb{R}$. Cette borne supérieure (resp. inférieure) est dans $\mathbb{R}$ lorsque A est majoré (resp. minoré) et vaut $+\infty$ (resp. $-\infty$) sinon.*

4.2 Limites infinies

Définition 13 *On dit qu'une suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout $A > 0$ il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que $u_n \geq A$ pour tout $n \geq n_0$.*

On note alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

En utilisant des quantificateurs cette définition s'écrit

$$(\forall A > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) u_n \geq A.$$

Définition 14 *On dit qu'une suite u a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout $A > 0$ il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que $u_n \leq -A$ pour tout $n \geq n_0$.*

Cela se note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

En utilisant des quantificateurs cette définition devient

$$(\forall A > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) u_n \leq -A.$$

Exemple. La suite $(n^2)_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$. Soit $A > 0$ donné. Alors pour tout $n \geq n_0 = E(\sqrt{A}) + 1$ on a $u_n \geq (E(\sqrt{A}) + 1)^2 \geq A$.

4.3 Opérations sur les limites.

Théorème 7 *Soient u et v deux suites convergentes, l_1 et l_2 leurs limites respectives dans $\mathbb{R}$. Si les opérations envisagées sur l_1 et l_2 sont définies on a :*

$$1- \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = l_1 + l_2,$$

$$2- \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n = \lambda l_1, \lambda \in \mathbb{R},$$

$$3- \text{ si } v_n \neq 0 \text{ pour tout } n \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Preuve. Montrons le 1 de ce théorème. La preuve doit considérer les cas suivants : l_1 et $l_2 \in \mathbb{R}$ (déjà traité au chapitre précédent), $l_1 \in \mathbb{R}$ et $l_2 = \pm\infty$, $l_1 = l_2 = \pm\infty$. Le cas $l_1 = +\infty$ et $l_2 = -\infty$ est indéterminé et n'a pas à être considéré.

- 1- $l_1 \in \mathbb{R}$ et $l_2 = +\infty$. La suite u est convergente donc elle est bornée (voir Chap. 3) : il existe M telle que $-M \leq u_n \leq M$ pour tout n . Puisque $l_2 = +\infty$

$$\forall A > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n (n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A + M),$$

donc pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n + v_n \geq -M + A + M = A$ d'où le second cas.

- 2- $l_1 = l_2 = +\infty$. Pour tout $A > 0$ il existe n_1 et n_2 tels que $n \geq n_1 \Rightarrow u_n \geq A/2$ et $n \geq n_2 \Rightarrow v_n \geq A/2$. Pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$ on obtient $u_n + v_n \geq A/2 + A/2 = A$ d'où le troisième cas.

Les autres cas se prouvent de la même façon. $\square$

4.4 Ordre et limites infinies

Une conséquence immédiate de la définition d'une limite infinie est la suivante:

Proposition 12 *Étant donné deux suites u et v , si $\lim u_n = +\infty$ et si $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 0$ alors $\lim u_n = +\infty$. De la même manière, si $\lim u_n = -\infty$ et si $v_n \leq u_n$ pour tout $n \geq 0$ alors $\lim v_n = -\infty$.*

Les inégalités se conservent à la limite :

Proposition 13 *Soient deux suites u et v , l_1 et l_2 leurs limites respectives dans $\bar{\mathbb{R}}$. On suppose que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 0$. Alors*

$$l_1 \leq l_2.$$

Preuve. Le cas $l_1 = \mathbb{R}$ et $l_2 = \mathbb{R}$ a été étudié au chapitre 3. Les cas $l_1 = -\infty$ ou $l_2 = +\infty$ sont immédiats. Il reste à exclure les trois cas restants qui sont $l_1 \in \mathbb{R}$ et $l_2 = -\infty$, $l_1 = +\infty$ et $l_2 = -\infty$, $l_1 = +\infty$ et $l_2 \in \mathbb{R}$. Montrons qu'il est impossible d'avoir $l_1 = +\infty$ et $l_2 = -\infty$. Raisonnons par l'absurde. Si tel est le cas, pour tout $A > 0$ il existe n_1 et n_2 tels que $u_n \geq A$ pour tout $n \leq n_1$ et $v_n \leq -A$ pour tout $n \geq n_2$. Prenons $A = 1$ et $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$. On a $u_{n_3} \geq 1$ et $v_{n_3} \leq -1$. Ces inégalités contredisent l'hypothèse $u_n \leq v_n$ et la proposition est démontrée. $\square$

On en déduit un "théorème des gendarmes" :

Théorème 8 *Soient trois suites u , v et w telles que :*

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

pour tout $n \geq 0$. Si $\lim u_n = \lim w_n = l$ avec $l \in \bar{\mathbb{R}}$ on a aussi $\lim v_n = l$.

Nous ne démontrerons pas ce théorème.

- 1- Considérons $u_n = n^2 - n$. On a $\lim u_n = +\infty$ parce que $n(n-1) \geq n$ pour tout $n \geq 2$ et $\lim n = +\infty$.
- 2- Soit $w_n = (3 + \sin n)^{1/n}$. Prenons $u_n = 2^{1/n}$ et $v_n = 4^{1/n}$. On a $\lim u_n = \lim v_n = 1$ et $u_n \leq w_n \leq v_n$: ceci prouve que $\lim w_n = 1$.

4.5 Limites classiques.

Dans les exemples qui suivent on utilisera l'inégalité vue au chapitre 2 : pour tout $a \geq 0$

$$(1 + a)^n \geq na.$$

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a, a \in \mathbb{Z}$

- 1- Si $a = 0$ alors la suite est constante : $n^0 = 1$.
- 2- Si $a \geq 1$ alors $n^a \geq n$ et $\lim n^a = +\infty$.
- 3- Si $a \leq -1$ alors $n^a = 1/n^{-a}$. De ce qui précède et du théorème 3.1 on déduit que $\lim n^a = 0$.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}, P \text{ et } Q \text{ sont des polynômes}$

Supposons que

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots a_dx^d$$

avec $a_d \neq 0$ et que

$$Q(x) = b_0 + b_1x + \dots b_ex^e$$

avec $b_e \neq 0$.

- Si $d < e$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$,
- Si $e < d$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \pm\infty$, le signe étant celui de a_d/b_e ,
- Si $d = e$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_d}{b_d}$.

Prouvons ce dernier cas. On a

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_0 + a_1n + \dots a_dn^d}{b_0 + b_1n + \dots b_dn^d}.$$

En divisant haut et bas par n^d on obtient

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_0n^{-d} + a_1^{1-d} + \dots + a_{d-1}^{-1} + a_d}{b_0n^{-d} + b_1^{1-d} + \dots + b_{d-1}^{-1} + b_d}$$

puis on utilise la limite précédente pour conclure.

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n, r \in \mathbb{R}$

- 1- Si $r \leq -1$ cette suite n'a pas de limite puisque $r^{2n} \geq 1$ et $r^{2n+1} \leq -1$.

2- Si $r > 1$ posons $r = 1 + a$ avec $a > 0$. Puisque $an < (1 + a)^n$ et que $\lim na = +\infty$ on en déduit que $\lim r^n = +\infty$.

3- Si $-1 < r < 1$ posons $a = 1/r$. On a $|a| > 1$ et, par ce qui précède, $\lim |a|^n = +\infty$. On en déduit que $\lim |r^n| = \lim 1/|a|^n = 0$. Donc $\lim r^n = 0$.

4. $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{1/n} = 1, a > 0}$

1- Soit $a \geq 1$. On a $\ln a^{1/n} = (\ln a)/n \geq 0$ donc $a^{1/n} \geq 1$ de sorte que

$$a = (a^{1/n})^n = (1 + (a^{1/n} - 1))^n \geq n(a^{1/n} - 1).$$

Donc

$$0 \leq a^{1/n} - 1 \leq \frac{a}{n}.$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{1/n} = 1$.

2- Soit $a < 1$. Donc $b = 1/a > 1$ et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^{1/n} = 1$, le 3 du théorème

3.1 impliquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{1/n} = 1$.

5. $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^p} = +\infty, \quad a > 1 \quad \text{et} \quad p \in \mathbb{N}^*}$

Puisque $a > 1$ on a $a^{1/p} > 1$. Soit $r > 0$ tel que $a^{1/p} = 1 + r$. Donc

$$(a^{1/p})^n = (1 + r)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k > \frac{n(n-1)}{2} r^2.$$

Il vient

$$\frac{(a^{1/p})^n}{n} > \frac{n-1}{2} r^2.$$

Finalement

$$\frac{(a)^n}{n^p} > \left(\frac{n-1}{2}\right)^p r^{2p}.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(a)^n}{n^p} = +\infty$. On dit que l'exponentielle l'emporte sur la puissance.

6. $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{-n} n^p = 0, \quad a > 1 \quad \text{et} \quad p \in \mathbb{N}^*}$

C'est l'inverse de la limite précédente.

7. $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.}$

Puisque la suite $(1/n)$ a pour limite 0, il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que

$$\frac{|a|}{n} \leq 1$$

pour tout $n \geq n_0$. Mézalor

$$\frac{|a^n|}{n!} = \frac{|a|}{1} \times \dots \times \frac{|a|}{n_0} \times \dots \times \frac{|a|}{n} \leq \frac{|a|}{1} \times \dots \times \frac{|a|}{n_0} \times \frac{|a|}{n} = \frac{K}{n}$$

où $K > 0$ est indépendant de n . Ceci prouve que la suite $(|a^n|/n!)$ a pour limite 0, on conclut avec la proposition 9-6 du chapitre précédent.

5. Théorèmes de convergence.

5.1 Monotonie et convergence

Rappelons qu'une suite $u = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ est croissante si $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 14 *Toute suite croissante et majorée admet une limite $l \in \mathbb{R}$ qui est la borne supérieure de l'ensemble des termes de la suite.*

Preuve. Soit u une suite croissante et majorée. L'ensemble

$$\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$$

admet une borne supérieure l . Nous allons voir que c'est la limite de cette suite. Soit $\epsilon > 0$. D'après le théorème de caractérisation de la borne supérieure il existe un entier n_0 tel que :

$$l - \epsilon < u_{n_0} \leq l.$$

Puisque la suite u est croissante on a

$$l - \epsilon < u_{n_0} \leq u_n \leq l$$

pour tout $n \geq n_0$ de sorte que

$$|u_n - l| = l - u_n \leq \epsilon$$

pour tout $n \geq n_0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$. □

Proposition 15 *Toute suite croissante et non majorée a pour limite $+\infty$.*

Preuve. Puisque u n'est pas majorée, pour tout $A > 0$ il existe un entier n_0 tel que $A \leq u_{n_0}$. Puisque u est croissante on a

$$A \leq u_{n_0} \leq u_n$$

pour tout $n \geq n_0$ ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. □

En substituant $-u$ à u dans les deux propositions précédentes on obtient

Proposition 16

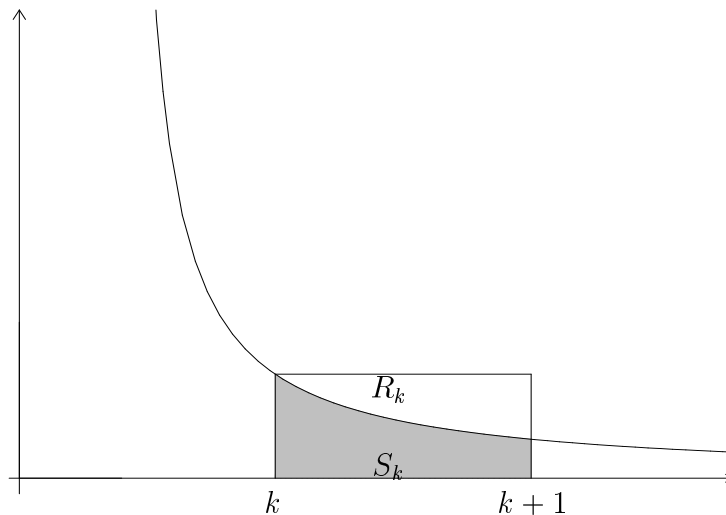
- 1- Toute suite décroissante et minorée admet une limite $l \in \mathbb{R}$ qui est la borne inférieure des termes de la suite.
- 2- Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Exemple 1 : La suite $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ est convergente. Sa limite est le nombre e base des logarithmes népériens. Cette suite est croissante parce que $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}$. Montrons qu'elle est majorée par 3. Pour $k \geq 1$, on montre facilement par récurrence que $k! \geq 2^{k-1}$ de sorte que $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$. Donc

$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq 3.$$

Exemple 2 : La suite $u_n = \ln n$ a pour limite $+\infty$. Cette suite est croissante puisque la fonction $\ln$ est elle-même croissante. Elle n'est pas majorée puisque pour tout $A > 0$ on a $A < \ln n$ pour $n = E(A) + 1$.

Exemple 3 : La suite $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$. Cette suite est croissante parce que $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$. Montrons que $u_n > \log(n+1)$. Comme la suite $(\log(n+1))$ n'est pas majorée il en sera de même pour (u_n) d'où la limite infinie. Partons de l'observation suivante : soit S_k le domaine du plan compris entre le graphe de la fonction $y = 1/x$, l'axe des x et les deux droites verticales d'équations respectives $x = k$ et $x = k+1$.



Ce domaine S_k est contenu dans le rectangle R_k dont les sommets sont les points de coordonnées $(k, 0)$, $(k+1, 0)$, $(k+1, 1/k)$ et $(k, 1/k)$. En prenant les aires de ces

régions on obtient

$$\text{aire}(S_k) = \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \log(k+1) - \log k < \frac{1}{k} = \text{aire}(R_k)$$

donc

$$\sum_{k=1}^n (\log(k+1) - \log k) = \log(n+1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

5.2 Suites adjacentes

Définition 15 Deux suites u et v sont adjacentes si :

1- u est croissante et v décroissante,

2- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$.

Proposition 17 Deux suites adjacentes convergent vers la même limite l . De plus,

$$u_n \leq l \leq v_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. Montrons que $u_n \leq v_n$. La suite $v - u$ est décroissante parce que u est croissante et v est décroissante. Puisqu'elle converge, sa limite 0 est aussi sa borne inférieure et donc $0 \leq v_n - u_n$ pour tout n . Ainsi

$$u_0 \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq \dots \leq v_0.$$

Ceci prouve que les suites u et v convergent respectivement vers l_1 et l_2 puisque l'une est croissante et majorée par v_0 et l'autre décroissante et minorée par u_0 . De plus

$$u_n \leq l_1 \leq l_2 \leq v_n$$

pour tout n par passage à la limite dans l'inégalité $u_n \leq v_n$. On obtient $l_1 = l_2$ parce que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$. $\square$

Exemple : Moyenne arithmético-géométrique de deux nombres réels $a > 0$ et $b > 0$. Définissons deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

pour tout $n \geq 0$.

1- Par récurrence on montre que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ de sorte que les deux suites sont bien définies.

2- On a ensuite $u_{n+1} \leq v_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$: élever au carré puis vérifier que

$$u_n v_n \leq \left(\frac{u_n + v_n}{2} \right)^2.$$

3- La suite v est décroissante puisque

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0.$$

4- La suite u est croissante puisque

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} (\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \geq 0.$$

5- Ces deux suites convergent vers la même limite. En effet, la suite u est croissante et majorée par v_1 donc elle converge vers l_1 . De même, v décroissante et minorée par u_1 converge vers l_2 . Par passage à la limite dans l'expression de v_{n+1} on obtient $l_2 = \frac{l_1 + l_2}{2}$ donc $l_1 = l_2$.

Corollaire 2 Le théorème des intervalles emboîtés.

Etant donné une suite d'intervalles $[a_n, b_n]$ emboîtés :

$$\dots \subset [a_n, b_n] \subset \dots \subset [a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$$

et telle que $\lim b_n - a_n = 0$, l'intersection de ces intervalles $I = \bigcap_{n \geq 0} [a_n, b_n]$ est réduite à un point.

Preuve. Les deux suites a et b sont adjacentes. Soit l leur limite. Pour tout n on a $a_n \leq l \leq b_n$ de sorte que $l \in [a_n, b_n]$. Ceci prouve que $l \in I$. De plus, si $l' \in I$ alors $l' \in [a_n, b_n]$ pour tout n c'est à dire $a_n \leq l' \leq b_n$. Par passage à la limite $l \leq l' \leq l$. Donc $I = \{l\}$. $\square$

5.3 Le théorème de Bolzano-Weierstrass (hors programme).

Définition 16 *Une sous-suite ou suite extraite d'une suite u est une suite du type $u \circ \sigma$ où $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.*

Théorème 9 *Toute suite bornée possède une sous-suite convergente. :*

Preuve. On construit tout d'abord une suite d'intervalles emboîtés dont l'intersection est réduite à un point. Cette construction est la suivante: la suite u étant bornée, il existe a_0 et b_0 tels que

$$a_0 \leq u_n \leq b_0$$

pour tout n . Notons $[a_1, b_1]$ l'un des deux intervalles $[a_0, \frac{a_0 + b_0}{2}]$ ou $[\frac{a_0 + b_0}{2}, b_0]$ qui contient une infinité de termes de la suite. En répétant ce procédé, on construit une

suite d'intervalles emboîtés $[a_n, b_n]$, chacun d'eux contenant une infinité de termes de la suite, dont l'intersection est réduite à un point noté l .

On construit une sous-suite $u \circ \sigma$ de u qui converge vers l de la façon suivante. Posons $\sigma(0) = 0$: on a $a_0 \leq u_{\sigma(0)} \leq b_0$. Supposons connus $\sigma(0), \dots, \sigma(n)$ tels que

$$\forall k \leq n, a_k \leq u_{\sigma(k)} \leq b_k.$$

Pour déterminer $\sigma(n+1)$ on prend le rang d'un terme u_k de la suite u qui soit dans l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ et tel que $k > \sigma(n)$. Ceci est rendu possible par le fait que ce dernier intervalle contient une infinité de u_k . Du théorème des intervalles emboîtés la sous-suite $u \circ \sigma$ converge vers l . $\square$

6. Itérations successives.

Dans tout ce chapitre $x \in \bar{\mathbb{R}}$ et D est un intervalle du type :

- $D =]x - \epsilon, x + \epsilon[$ si $x \in \mathbb{R}$ avec $\epsilon > 0$,
- $D =]A, +\infty[$ si $x = +\infty$ où $A > 0$,
- $D =]-\infty, -A[$ si $x = -\infty$ où $A > 0$.

6.1 Image d'une suite par une fonction continue

Théorème 10 Soient $x \in \bar{\mathbb{R}}$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{u \rightarrow x} f(u) = y \in \bar{\mathbb{R}}$. Pour toute suite (u_n) telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$ on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = y.$$

Ce théorème admet de nombreux cas particuliers suivant que $x \in \mathbb{R}$, $x = +\infty$ ou $x = -\infty$. Idem pour y .

6.2 Itérations successives.

Dans ce paragraphe on étudie la suite des itérations successives : associée à une fonction $f : D \rightarrow D$ et à un point initial $u_0 \in D$. On appelle ainsi la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Notons $f^0 = I$ l'application identité, $f^1 = f$ et $f^n = f \circ f^{n-1}$. La suite (u_n) vérifie : $u_1 = f(u_0)$,

$$u_2 = f(u_1) = f \circ f(u_0) = f^2(u_0)$$

et enfin

$$x_n = f(x_{n-1}) = f \circ f^{n-1}(x_0) = f^n(x_0).$$

Théorème 11 Soit $f : D \rightarrow D$ et soit $u_0 \in D$. Si la suite

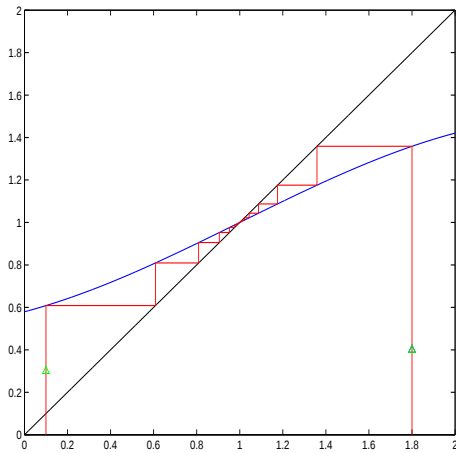
$$u_{n+1} = f(u_n), \quad n \geq 0,$$

converge vers $x \in D$ et si f est continue en x alors $f(x) = x$.

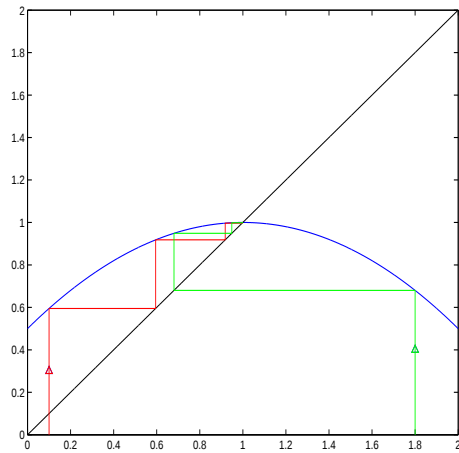
Un point qui vérifie $f(x) = x$ est un *point fixe* : de f . Les points fixes sont donnés par l'intersection du graphe de f et de la première bissectrice.

6.3 Aspects graphiques.

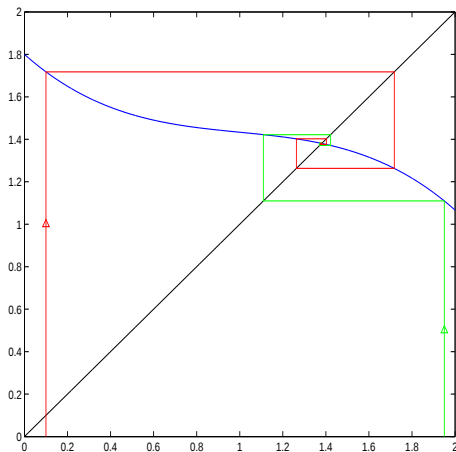
Etant donné un point fixe x de f , le comportement de la suite des itérations successives qui démarre en un point u_0 proche de x dépend de la valeur de la dérivée $f'(x)$. Voici tout d'abord quelques expériences graphiques.



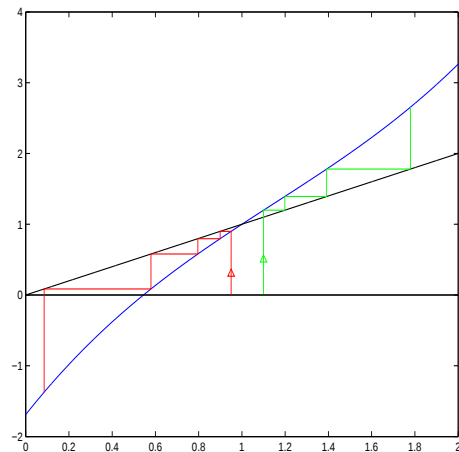
$0 < f'(x) < 1$: convergence



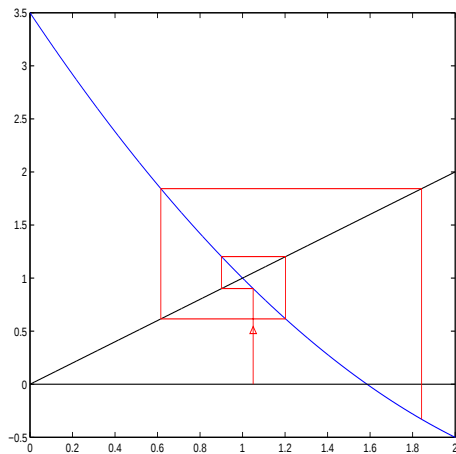
$f'(x) = 0$: convergence



$-1 < f'(x) < 0$: convergence



$f'(x) > 1$: divergence



$f'(x) < -1$: divergence

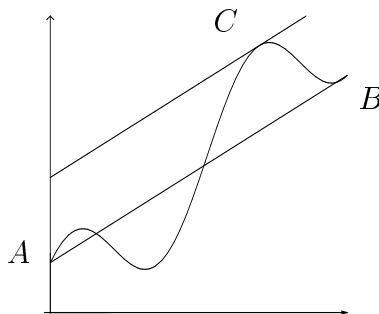
6.4 Théorème de convergence.

6.4.1 Rappel. Le théorème des accroissements finis.

Théorème 12 : Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Géométriquement, cela signifie qu'il existe au moins une tangente au graphe de la fonction f parallèle à la droite passant par les points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$ (voir figure ci-dessous).



On en déduit l'inégalité des accroissements finis :

Corollaire 3 Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et soient $0 \leq \lambda \leq \mu$ tels que :

$$\forall u \in D, \quad \mu \leq |f'(u)| \leq \lambda.$$

Alors, pour tout u et $v \in D$, on a :

$$\mu|u - v| \leq |f(u) - f(v)| \leq \lambda|u - v|$$

6.4.2 Théorèmes de convergence.

Théorème 13 Soient $f : D \rightarrow D$ dérivable sur D , $x \in D$ un point fixe de f et soient $0 \leq \lambda \leq \mu$. Notons $I =]x - a, x + a[\subset D$ un intervalle ouvert de centre x et supposons que

$$\forall u \in I, \quad \mu \leq |f'(u)| \leq \lambda.$$

Alors

- 1- Si $\lambda < 1$, pour tout $u_0 \in I$ la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ reste dans I et converge vers x .
- 2- Si $\mu > 1$, pour tout $u_0 \in I$ la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ ne converge pas vers x .

Preuve. L'inégalité des accroissements finis appliquée à f dans I prouve que

$$\mu|u - v| \leq |f(u) - f(v)| \leq \lambda|u - v|$$

pour tout $u, v \in I$.

Lorsque $\lambda < 1$, soit $u_0 \in I$. On a

$$|u_1 - x| = |f(u_0) - f(x)| \leq \lambda|u_0 - x|.$$

Ceci prouve que $u_1 \in I$ puisque $\lambda|u_0 - x| < a$. Montrons par récurrence que

$$|u_n - x_0| \leq \lambda^n |u_0 - x|.$$

On a comme plus haut

$$|u_{n+1} - x| = |f(u_n) - f(x)| \leq \lambda|u_n - x| \leq \lambda\lambda^n |u_0 - x| = \lambda^{n+1} |u_0 - x|$$

ce qui prouve aussi que $u_{n+1} \in I$. Comme $0 \leq \lambda < 1$ la suite (λ^n) a pour limite 0 donc $\lim u_n = x$.

Si $\mu > 1$, soit $u_0 \in I$. On a ici

$$|u_1 - x| = |f(u_0) - f(x)| \geq \mu|u_0 - x|.$$

Ceci prouve que l'effet de f sur u_0 consiste à éloigner de x ce qui rend impossible la convergence vers x . $\square$

Il faut remarquer que lorsque la dérivée de f est continue et lorsqu'elle vérifie $|f'(x)| < 1$ on aura aussi $|f'(u)| \leq \lambda < 1$ pour tout u dans un intervalle du type $]x - a, x + a[$ avec $a > 0$. On peut alors appliquer le théorème précédent. Ceci justifie les "preuves" graphiques de la section précédente.

6.5 Exemples

6.5.1 Approximation de $\sqrt{a}$, $a > 0$.

Le procédé suivant, pour le calcul de la racine carrée d'un nombre réel $a > 0$ est attribué à Héron d'Alexandrie, grec, 1er siècle, également appelé Héron l'Ancien. Ce procédé était déjà connu des Babyloniens, 300 à 400 années avant, et il s'écrit au moyen des suites numériques de la façon suivante :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right).$$

La fonction f associée à cette suite est $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$ que nous ne considérerons que pour $x > 0$. L'équation $f(x) = x$ a pour seule solution positive $x = \sqrt{a}$.

1- Donnons nous $u_0 > 0$. On a par récurrence $u_n > 0$ pour tout n .

2- Un calcul simple montre que :

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}.$$

Si $u_0 = \sqrt{a}$ la suite est constante égale à $\sqrt{a}$. Si $u_0 \neq \sqrt{a}$, pour tout $n \geq 1$, l'égalité précédente prouve que $u_n > \sqrt{a}$: cette suite est minorée par $\sqrt{a}$.

3- Comme $0 < \frac{u_n - \sqrt{a}}{2u_n} < \frac{1}{2}$ on obtient

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{u_n - \sqrt{a}}{2u_n}(u_n - \sqrt{a}) < \frac{u_n - \sqrt{a}}{2} < u_n - \sqrt{a},$$

cette suite est décroissante pour tout $n \geq 1$ et minorée par $\sqrt{a}$: elle est donc convergente. Sa limite est le seul point fixe positif possible : $\sqrt{a}$.

6.5.2 Suites homographiques.

: Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $c \neq 0$. On considère la suite

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}, \quad n \geq 0.$$

La fonction associée est

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cx + d)}$$

Si $ad - bc = 0$ la suite est constante.

Supposons désormais que $ad - bc \neq 0$. La fonction f est une bijection de $\mathbb{R} - \{-d/c\}$ dans $\mathbb{R} - \{a/c\}$ puisque

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \Leftrightarrow x = \frac{dy - b}{cy - a}.$$

Pour que la suite (u_n) soit définie pour tout n , il faut et il suffit que u_0 soit différent des termes de la suite définie par récurrence par

$$w_0 = -\frac{d}{c}, \quad w_{k+1} = \frac{dw_k - b}{cw_k - a}, \quad k \geq 0.$$

Si la suite a une limite, celle-ci est solution de l'équation $f(l) = l$ c'est à dire

$$cl^2 + (d - a)l - b = 0.$$

1- Si $(d - a)^2 + 4bc < 0$ cette équation n'a pas de racines réelles et la suite diverge.

- 2- Si $(d - a)^2 + 4bc > 0$ cette équation admet deux racines réelles distinctes α et β . Si $u_0 = \alpha$, la suite est constante égale à α . Sinon

$$\frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \frac{\frac{au_n+b}{cu_n+d} - \frac{a\beta+b}{c\beta+d}}{\frac{au_n+b}{cu_n+d} - \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}} = \frac{c\alpha + d}{c\beta + d} \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}.$$

Par le changement de variable $x_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ et pour $k = \frac{c\alpha + d}{c\beta + d} \neq 1$ on obtient $x_{n+1} = kx_n$. La suite (x_n) a pour limite 0 si $|k| < 1$. Dans ce cas $\lim u_n = \beta$. La suite $(|x_n|)$ a pour limite ∞ si $|k| > 1$ ce qui donne $\lim u_n = \alpha$. Pour $k = -1$ la suite (u_n) diverge.

- 3- Si $(d - a)^2 + 4bc = 0$ cette équation admet une seule racine réelle distinctes $\alpha = \frac{a-d}{2c}$. Si $u_0 \neq \alpha$ on a

$$\frac{1}{u_{n+1} - \alpha} = \frac{\frac{au_n+b}{cu_n+d} - \frac{1}{a\beta+b}c\beta + d}{ad - bc} \frac{c\alpha + d}{u_n - \alpha} = \frac{2c}{a + d} + \frac{1}{u_n - \alpha}.$$

En posant $x_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$ et pour $k = \frac{2c}{a+d} \neq 0$ on obtient $x_{n+1} = k + x_n$ d'où $x_n = x_0 + nk$. Cette suite a une limite infinie et donc $\lim u_n = \alpha$.

7. Récurrences linéaires d'ordre 2.

7.1 Introduction

Etant donné deux nombres réels a, b avec $b \neq 0$, on souhaite calculer la suite u définie par :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \quad n \geq 0,$$

où u_0 et u_1 sont donnés. Ce type de suite est appelé récurrence linéaire d'ordre 2. Les deux exemples ci-dessous donnent une motivation à cette étude.

7.1.1 Suite de Fibonacci

Leonardo Pisano (1170-1240) dit Fibonacci a introduit en Europe les chiffres arabes et la numérotation de position décimale toujours en vigueur aujourd'hui. La suite de fibonacci est donnée par

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, & u_1 &= 1, \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n, & n &\geq 0. \end{aligned}$$

7.1.2 Discrétisation d'une équation différentielle d'ordre 2.

On considère le problème différentiel :

$$\begin{aligned} u''(t) + cu'(t) + du(t) &= 0, & t &\in [0, 1], \\ u(0) &= u_0, & u'(0) &= u'_0, \end{aligned}$$

dont on veut calculer, de façon approchée, la solution; u_0 et u'_0 sont donnés, ce sont les conditions initiales du problème.

Afin de remplacer ce problème continu par un problème discret, on se donne un entier N donné, puis

- Au lieu du temps $t \in [0, 1]$, on ne considère que les instants $t_k = \frac{k}{N}$ pour $k = 0, \dots, N$,
- Au lieu de la fonction $u(t)$ on introduit une suite (u_k) ,
- On approche pour chaque $k = 0, \dots, N$:

1- $u(t_k)$ par u_k ,

2- $u'(t_k)$ par $u'_k = \frac{u_{k+1} - u_k}{t_{k+1} - t_k} = N(u_{k+1} - u_k)$,

3- $u''(t_k)$ par $\frac{u'_{k+1} - u'_k}{t_{k+1} - t_k} = N^2(u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k)$.

- L'équation différentielle est remplacée par l'équation suivante :

$$N^2(u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k) + cN(u_{k+1} - u_k) + du_k = 0,$$

c'est à dire

$$u_{k+2} + \left(\frac{c}{N} - 2\right) u_{k+1} + \left(\frac{d}{N^2} - \frac{c}{N} + 1\right) u_k = 0$$

- La condition initiale du problème différentiel est remplacé par la donnée des deux premiers termes de la suite : on prend u_0 et $u_1 = u_0 + \frac{u'_0}{N}$.

7.2 L'espace vectoriel des récurrences

Notons

$$\mathcal{E}_{a,b} = \{u : u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, n \geq 0\}$$

l'ensemble des suites qui vérifient cette récurrence.

Proposition 18 $\mathcal{E}_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites.

Preuve. Rappelons les opérations définies sur l'espace vectoriel des suites :

1- Addition de deux suites $u + v : (u + v)_n := u_n + v_n, n \geq 0$.

2- Multiplication d'une suite par un scalaire $\lambda u : (\lambda u)_n := \lambda u_n, n \geq 0$.

$\mathcal{E}_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel puisque :

1- La suite nulle $0 \in \mathcal{E}_{a,b} : 0_{n+2} = a0_{n+1} + b0_n = 0, n \geq 0$.

2- Toute combinaison linéaire de deux suites u et $v \in \mathcal{E}_{a,b}$ appartient à $\mathcal{E}_{a,b}$. En effet si $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ et $v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n$, on a pour tout λ et $\mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} &= \\ \lambda(au_{n+1} + bu_n) + \mu(av_{n+1} + bv_n) &= \\ a(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + b(\lambda u_n + \mu v_n). \end{aligned}$$

□

Proposition 19

$$\dim \mathcal{E}_{a,b} = 2.$$

Preuve. Soient e et f les deux suites :

$$1- e_0 = 1, e_1 = 0, e_{n+2} = ae_{n+1} + be_n, n \geq 0,$$

$$2- f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = af_{n+1} + bf_n, n \geq 0.$$

Ces deux suites sont indépendantes. En effet si $\lambda e + \mu f = 0$ alors

$$(\lambda e + \mu f)_0 = \lambda = 0 \text{ et } (\lambda e + \mu f)_1 = \mu = 0.$$

Montrons que ces deux suites sont génératrices. Soit $u \in \mathcal{E}_{a,b}$; nous allons prouver que

$$u = u_0 e + u_1 f.$$

C'est vrai pour les indices 0 et 1. Supposons que cette propriété soit vraie pour tous les indices plus petits ou égaux à $n + 1$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n = a(u_0 e_{n+1} + u_1 f_{n+1}) + b(u_0 e_n + u_1 f_n) = \\ &= u_0(ae_{n+1} + be_n) + u_1(af_{n+1} + bf_n) = u_0 e_{n+2} + u_1 f_{n+2}. \end{aligned}$$

□

7.3 Résolution

Résoudre une récurrence linéaire d'ordre 2 signifie exprimer u_n en fonction des nombres u_0, u_1, a, b et n .

Définition 17 *L'équation caractéristique de la récurrence est :*

$$x^2 = ax + b.$$

On note par α et β les racines de cette équation.

7.3.1 Les racines α et β sont réelles et distinctes

Proposition 20

$$u_n = \lambda \alpha^n + \mu \beta^n$$

$$\lambda + \mu = u_0$$

$$\lambda \alpha + \mu \beta = u_1.$$

Preuve. Les deux suites (α^n) et (β^n) vérifient la récurrence puisque

$$\alpha^{n+2} - a\alpha^{n+1} - b\alpha^n = \alpha^n(\alpha^2 - a\alpha - b) = 0.$$

Elles sont indépendantes : l'identité

$$\lambda(\alpha^n) + \mu(\beta^n) = 0$$

implique pour $n = 0$: $\lambda + \mu = 0$ et pour $n = 1$: $\lambda \alpha + \mu \beta = 0$. Donc $\lambda = \mu = 0$ puisque $\alpha \neq \beta$.

La dimension de $\mathcal{E}_{a,b}$ étant égale à 2, ces deux suites sont génératrices. Ainsi les deux suites (α^n) et (β^n) constituent une base de $\mathcal{E}_{a,b}$ et la suite u_n est une combinaison linéaire de ces deux suites. □

7.3.2 Les racines α et β sont distinctes et complexes conjuguées

Notons $r \pm is$ les deux racines de l'équation caractéristique et $r = \rho \cos \theta$, $s = \rho \sin \theta$ avec $\rho > 0$, $0 < \theta < 2\pi$ et $\theta \neq \pi$ puisque l'on doit avoir $s \neq 0$.

Proposition 21

$$\begin{aligned} u_n &= \rho^n (\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta) \\ \lambda &= u_0 \\ \rho(\lambda \cos \theta + \mu \sin \theta) &= u_1. \end{aligned}$$

Preuve. Nous allons prouver que les deux suites $c = (\rho^n \cos n\theta)$ et $s = (\rho^n \sin n\theta)$ vérifient la récurrence et sont indépendantes. La suite u pourra donc s'écrire $u = \lambda c + \mu s$, les coefficients λ et μ vérifiant le système $u_0 = \lambda c_0 + \mu s_0$ et $u_1 = \lambda c_1 + \mu s_1$ c'est à dire $u_0 = \lambda$ et $u_1 = \rho(\lambda \cos \theta + \mu \sin \theta)$. Notons que, par la formule de Moivre,

$$c_n + is_n = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = \rho^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} c_{n+2} + is_{n+2} - a(c_{n+1} + is_{n+1}) - b(c_n + is_n) &= \\ \rho^{n+2} (\cos \theta + i \sin \theta)^{n+2} - a\rho^{n+1} (\cos \theta + i \sin \theta)^{n+1} - b\rho^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n &= \\ \rho^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n ((r + is)^2 - a(r + is) - b) &= 0. \end{aligned}$$

Les parties réelles et imaginaires de l'expression précédente sont donc nulles :

$$c_{n+2} - ac_{n+1} - bc_n = s_{n+2} - as_{n+1} - bs_n = 0$$

de sorte que c et s vérifient la récurrence. Elles sont indépendantes parce que, par le calcul ci-dessus, $\lambda c + \mu s = 0$ donne $\lambda = 0$ et $\rho(\lambda \cos \theta + \mu \sin \theta) = 0$ d'où $\lambda = \mu = 0$ puisque $\rho > 0$ et $\sin \theta \neq 0$. $\square$

7.3.3 Une racine double

Dans ce cas $a^2 - 4b = 0$ et $\alpha = \frac{a}{2}$.

Proposition 22

$$\begin{aligned} u_n &= \lambda \alpha^n + \mu n \alpha^n \\ \lambda &= u_0 \\ (\lambda + \mu) \alpha &= u_1. \end{aligned}$$

Preuve. La suite $(n\alpha^n)$ vérifie la relation de récurrence. En effet :

$$\begin{aligned} (n+2)\alpha^{n+2} - a(n+1)\alpha^{n+1} - bn\alpha^n &= \\ n\alpha^n (\alpha^2 - a\alpha - b) + \alpha^{n+1}(2\alpha - a) &= 0. \end{aligned}$$

Les suites (α^n) et $\mu(n\alpha^n)$ sont indépendantes puisque l'identité $\lambda(\alpha^n) + \mu(n\alpha^n) = 0$ implique $\lambda = 0$ pour $n = 0$ et $(\lambda + \mu)\alpha = 0$ pour $n = 1$. Puisque $0 \neq b = a^2/4$, on obtient $\alpha = a/2 \neq 0$, de sorte que $\lambda = \mu = 0$. $\square$

7.4 Exemples

7.4.1 Exemple 1

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, & u_1 &= 1 \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n, & n &\geq 0. \end{aligned}$$

L'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ a pour solutions $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Alors,

$$\begin{aligned} u_n &= \lambda \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \\ \lambda + \mu &= 0 \\ \lambda \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + \mu \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) &= 1. \end{aligned}$$

de sorte que $\lambda = -\mu = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

7.4.2 Exemple 2.

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n, \quad n \geq 0.$$

L'équation caractéristique $x^2 - 4x + 4 = 0$ a pour solution $x = 2$. Donc

$$u_n = \lambda 2^n + \mu n 2^n.$$

7.4.3 Exemple 3.

$$u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n, \quad n \geq 0.$$

L'équation caractéristique $x^2 + x + 1 = 0$ a pour solutions

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \pm i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

Donc

$$\begin{aligned} u_n &= \lambda \cos \frac{2\pi n}{3} + \mu \sin \frac{2\pi n}{3} \\ \lambda &= u_0 \\ \lambda \cos \frac{2\pi}{3} + \mu \sin \frac{2\pi}{3} &= u_1. \end{aligned}$$

7.5 Récurrences linéaires et calcul matriciel

Une récurrence linéaire d'ordre 2 possède une écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

c'est à dire

$$U_{n+1} = AU_n$$

en notant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ et $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Remarquons l'analogie avec les suites géométriques $u_{n+1} = au_n$, $a \in \mathbb{R}$. Dans ce dernier cas, $u_n = a^n u_0$. Le cas matriciel est similaire :

$$U_n = A^n U_0$$

et la question est maintenant de calculer A^n . Supposons que les racines de l'équation caractéristique soient réelles et distinctes. La matrice A s'écrit alors $A = PDP^{-1}$ et de façon plus précise

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Voyons pourquoi cette forme est intéressante pour le calcul de A^n .

Proposition 23

$$A^n = PD^n P^{-1} \text{ et } D^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}.$$

Preuve. Par récurrence. Pour $n = 1$ il n'y a rien à démontrer. Supposons que $A^n = P^{-1}D^n P$ alors

$$A^{n+1} = A^n A = (PD^n P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^{n+1}P^{-1}.$$

□

Il faut ensuite calculer A^n , on obtient :

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} = \\ &\frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \alpha^n \beta - \alpha \beta^n & \beta^n - \alpha^n \\ \alpha^{n+1} \beta - \alpha \beta^{n+1} & \beta^{n+1} - \alpha^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Revenons maintenant à la récurrence : $U_n = A^n U_0$. Un calcul facile montre que la première coordonnée u_n de U_n est donnée par

$$u_n = c\alpha^n + d\beta^n$$

pour des constantes c et d convenables.

8. Suites de Cauchy

Ce chapitre est hors programme.

Définition 18 Une suite u est de Cauchy si

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N) (\forall m \geq N) |u_n - u_m| \leq \epsilon.$$

Remarque 7 Il revient au même de dire que

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N) (\forall p \geq 0) |u_n - u_{n+p}| \leq \epsilon.$$

Cela revient à supposer que $m \geq n$ et à prendre $m = n + p$ dans la définition précédente.

Voici un exemple de suites de Cauchy :

Théorème 14 Toute suite convergente est de Cauchy.

Preuve. Soit u une suite convergente et soit $l \in \mathbb{R}$ sa limite. Nous savons que

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N(\epsilon)) |u_n - l| \leq \epsilon.$$

On en déduit que, pour tout n et $m \geq N(\epsilon/2)$,

$$|u_n - u_m| = |u_n - l - (u_m - l)| \leq |u_n - l| + |u_m - l| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

ce qui prouve que u est de Cauchy. □

Le résultat suivant montre que l'exemple précédent est le seul possible :

Théorème 15 Toute suite de Cauchy est convergente.

Preuve. Soit u une suite de Cauchy. Notons $N(\epsilon)$ un entier tel que

$$(\forall n \geq N) (\forall m \geq N) |u_n - u_m| \leq \epsilon.$$

Cette suite est bornée. En effet,

$$|u_n| \leq \max \{|u_k|, 0 \leq k \leq N(1) - 1\}$$

pour tout $n \leq N(1) - 1$ et

$$|u_n - u_m| \leq 1$$

pour tout n et $m \geq N(1)$. On en déduit que

$$|u_n| \leq |u_n - u_{N(1)} + u_{N(1)}| \leq |u_n - u_{N(1)}| + |u_{N(1)}| \leq 1 + |u_{N(1)}|$$

pour tout $n \geq N(1)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a toujours

$$|u_n| \leq \max \{|u_0|, \dots, |u_{N(1)-1}|, 1 + |u_{N(1)}|\}.$$

En vertu du théorème de Bolzano-Weirstrass, il existe une sous-suite de u qui est convergente : il existe une suite strictement croissante d'entiers $k = (k_n)$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{k_n} = l$ autrement dit, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $M(\epsilon)$ tel que, pour tout $k_n \geq M(\epsilon)$ on a $|u_{k_n} - l| \leq \epsilon$.

Montrons que u a pour limite l . Donnons nous $\epsilon > 0$ ainsi qu'un terme de la sous-suite u_{k_p} avec $k_p \geq M(\epsilon/2)$ et $k_p \geq N(\epsilon/2)$. Un tel entier existe puisque $\lim k_n = \infty$. Pour tout $n \geq N(\epsilon/2)$ on a

$$|u_n - l| = |(u_n - u_{k_p}) + (u_{k_p} - l)| \leq |u_n - u_{k_p}| + |u_{k_p} - l| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

et le théorème est prouvé. $\square$

Remarque 8 1. On qualifie de **complet** un espace dans lequel toute suite de Cauchy est convergente : $\mathbb{R}$ est complet.

2. L'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. En effet, considérons la suite $q = (q_n)$ des approximations décimales de $\sqrt{2}$: $q_0 = 1$, $q_1 = 1.1$, $q_2 = 1.14$, $q_4 = 1.414$ et ainsi de suite. C'est une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$. Pour cette raison cette suite est de Cauchy. Par contre sa limite n'est pas un rationnel, elle est de Cauchy mais n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$ ce qui fait que cet espace n'est pas complet.

3. Le critère de Cauchy permet de prouver la convergence d'une suite sans avoir à invoquer sa limite.

Exemple 3 Soit b un entier $b \geq 2$. Pour tout $n \geq 1$ on se donne un entier $x_n \in \{1 - b, \dots, -1, 0, 1, \dots, b - 1\}$. Nous allons voir que la suite

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{b^k}$$

est convergente. On a

$$|s_n - s_{n+p}| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x_k}{b^k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \left| \frac{x_k}{b^k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{b-1}{b^k} = \frac{b-1}{b^{n+1}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{b^k} < \frac{1}{b^n}.$$

Cette inégalité prouve que la suite s est de Cauchy puisque l'on a $|s_n - s_{n+p}| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq -\ln(\epsilon)/\ln(b)$ et pour tout $p \geq 0$.

Index

- $+\infty$, 19
- $-\infty$, 19
- archimédien, 8
- borné, 7
- borne inférieure, 7
- borne supérieure, 7
- complet, 46
- convergente, 13
- converger, 13
- corps commutatif, 5
- dense, 8
- formes indéterminées, 19
- groupe commutatif, 5
- inf, 7
- intervalle, 6
- itérations successives, 12, 31
- limite, 13
 - infinie, 20
- majoré, 6
- majorant, 6
- max, 7
- maximum, 7
- min, 7
- minimum, 7
- minoré, 7
- minorant, 6
- moyenne arithmético-géométrique, 27
- partie entière, 8
- plus grand élément, 7
- plus petit élément, 7
- point fixe, 31
- récurrence, 11
- récurrence linéaire d'ordre 2, 37
- série géométrique, 12
- sous-suite, 10
- suite
 - adjacentes (suites), 27
 - arithmético-géométrique, 12
 - arithmétique, 11
 - bornée, 9
 - constante, 9
 - croissante, 10
 - décroissante, 10
 - de Cauchy, 45
 - géométrique, 12
 - homographique, 35
 - linéaire d'ordre 2, 12
 - majorée, 9
 - minorée, 9
 - nulle, 9
 - numérique, 9
 - périodique, 9
 - stationnaire, 9
 - unité, 9
- sup, 7
- théorème
 - de Bolzano-Weierstrass, 28
 - des accroissements finis, 33
 - des intervalles emboîtés, 28
- totalelement ordonné, 6
- valeur absolue, 8