PLANS DES LEÇONS, AGRÉGATION 2018

par

Corentin KILQUE
ENS Rennes

Table des matières

Leçon 101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Références : Ulmer, Perrin, Caldero-Germoni, Mercier, *secondaire :* Gourdon.

Développements : loi de réciprocité quadratique, table de caractères de $\mathfrak{S}_4$.

Cadre : soit G un groupe et X un ensemble.

1. Définition et premières propriétés. —

1.1. Action de groupe sur un ensemble. — (Ulmer) Définition d'une action de groupe, du morphisme structurel associé, exemple de $\mathfrak{S}(X) \curvearrowright X$, de $\mathrm{GL}(V) \curvearrowright V$. Définition d'une action libre, fidèle, transitive, k-transitive, remarquer que $G/\ker\varphi$ agit fidèlement. Exemple de l'action de D_n sur les n sommets d'un polygone régulier qui est transitive mais pas libre. (Perrin) $\mathfrak{S}_n \curvearrowright [|1,n|]$ est n-transitive et $\mathfrak{A}_n \curvearrowright [|1,n|]$ est $n-2$-transitive, ainsi les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$, $n \geq 5$.

1.2. Orbite, stabilisateur. — (Ulmer) Définition d'un point fixe, d'une stabilisateur, d'une orbite, interprétation de libre et transitif dans ce cadre, relation d'équivalence donnée par les orbites, quotient G/X, application à la décomposition d'une permutation en cycles à support disjoints (Perrin). Expression du noyau de l'action comme intersection des stabilisateurs, ainsi libre implique fidèle, contre-exemple de D_3 agissant sur les sommets d'un triangle équilatéral fidèle non libre, et ainsi $D_3 \cong \mathfrak{S}_3$.

1.3. Groupe agissant sur lui-même. — (Ulmer) Définition de l'action de G sur lui même par translation, cette action est libre et transitive, théorème de Cayley. Action par translation de G sur l'ensemble G/H, noyau de l'action (Perrin), application : $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \cong \mathfrak{S}_3$. Définition de l'action de G sur lui même par conjugaison, elle n'est ni libre ni transitive. Classes de conjugaisons de D_n. (Perrin) Conjugaison d'un cycle, simplicité de $\mathfrak{A}_n$, $n \geq 5$.

2. Action d'un groupe fini. —

2.1. Formules de dénombrement. — (Ulmer) Bijection entre les classes à gauche modulo un stabilisateur et une orbite, conséquences, formule des classes.

2.2. Application à l'étude des p-groupes. — (Ulmer) Définition d'un p-groupe, proposition sur le cardinal des points fixes d'un p-groupe, théorème de Cauchy, caractérisation des p-groupes finis, un p-groupe non trivial n'est pas simple, un groupe d'ordre p^2 est abélien.

2.3. Théorèmes de Sylow. — (Perrin) Définition d'un p-Sylow, théorèmes de Sylow, un groupe d'ordre 195 n'est pas simple, groupes d'ordre pq.

3. Actions de groupes sur les espaces de matrices. —

3.1. Action par translation et par équivalence. — (Caldero-Germoni) Définition de l'action par translation à gauche, définition d'être échelonnée réduite en ligne, caractérisation d'être dans la même orbite par les matrices échelonnées réduites. Définition de l'action par équivalence, interprétation en termes de bases, théorème du rang. (Gourdon) Les matrices J_r sont des représentants des classes de similitude.

3.2. Action par conjugaison. — (Gourdon) Définition de l'action par conjugaison, interprétation par changement de base. (Caldero-Germoni) Les classes de similitude des matrices diagonalisables sont caractérisées par le polynôme caractéristique (c'est-à-dire le spectre, compté avec multiplicité), contre-exemple pour le polynôme minimal. Classification des orbites d'une matrice nilpotente. Forme réduite de Jordan et caractérisation des classes de similitude des endomorphismes trigonalisables. (Gourdon) Théorème de décomposition de Frobenius, version matricielle, corollaire : deux endomorphismes sont semblables ssi ils ont les même invariants de similitude.

3.3. Action par congruence. — (Caldero-Germoni) Définition de l'action par congruence, remarquer que cela revient à l'équivalence de forme bilinéaires ou de formes quadratiques. Classification des orbites sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ et sur les corps finis. **dev** Loi de réciprocité quadratique. (Perrin) Définition de $O(q)$, de $O_n(\mathbb{R})$, générateurs. Étude de $O(p,q)$.

4. Actions de groupes et géométrie. —

4.1. Isométries d'un espace affine. — (Mercier) Définition de $\mathrm{Isom}(P)$ pour $P \subset E$, de $\mathrm{Isom}^+(P)$ et $\mathrm{Isom}^-(P)$, bijection entre les deux. Groupe d'isométrie d'un triangle non isocèle, d'un triangle isocèle non équilatéral, d'un losange. Description de $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{P}_n)$ et de $\mathrm{Isom}^-(\mathcal{P}_n)$, définition du groupe diédral D_n, cardinal et description par générateurs et relations. Groupe d'isométries (directes) du cube, groupe d'isométries (directes) du tétraèdre.

4.2. Groupe projectif. — (Ulmer) Définition de $\mathbb{P}(V)$, action de $\mathrm{GL}(V)$ et $\mathrm{SL}(V)$ sur $\mathbb{P}(V)$, noyaux, définition de $\mathrm{PGL}(V)$ et $\mathrm{PSL}(V)$, actions induites, celle de $\mathrm{PSL}(V)$ est 2-transitive. (Perrin) Cardinaux, et applications aux isomorphismes exceptionnels.

5. Représentations linéaires des groupes finis. —

(Ulmer) Définition d'une représentation, exemple de la représentation régulière, somme de représentations, sous-représentation, morphisme de représentations, représentation irréductible, théorème de Maschke, caractère, caractère irréductible. Caractères et sous-groupes distingués. **dev** Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$.

Remarques : c'est long, on peut aller plus vite sur les matrices (c'est bien d'avoir d'autres exemples que ceux matriciels).

Leçon 102 - Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

Références : Arnaudiès-Fraysse, Audin, Gozard, Peyré, Serre, *secondaires :* Cormen-Leiserson-Rivest-Stein, FGN Algèbre 1 et Analyse 1.

Développements : irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$, théorème de structure des groupes abéliens finis.

1. Nombres complexes de module 1. —

1.1. Le groupe $\mathbb{U}$, et première application. — (Arnaudiès-Fraysse) Définition de $\mathbb{U}$ comme le noyau de $|.| : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+^*$, c'est le cercle unité $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U} \to \mathbb{C}^*, (r,u) \mapsto ru$ est un isomorphisme de groupes, $\mathbb{R} \to \mathbb{U}, \theta \mapsto e^{i\theta}$ est un morphisme de groupe surjectif de noyau $2\pi\mathbb{Z}$, on a ainsi un isomorphisme $\varphi : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{U}$, on définit alors l'argument $\arg(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$ par $\arg(z) = \varphi^{-1}(\frac{z}{|z|})$, et détermination principale.

1.2. Applications trigonométriques. — (Arnaudiès-Fraysse) Définition de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ comme les parties réelles et imaginaires de e^{ix}, cor : valeurs particulières, périodicité. Formules d'Euler et application à la linéarisation de puissances de sin et cos. Formules de De Moivre, expression de $\cos(nx)$ comme un polynôme T_n en $\cos(x)$, définition des polynômes de Tchebychev, expression, premiers polynômes (Gozard) et coefficient dominant.

1.3. Paramétrisation sur le cercle unité. — (Combes) Équation de Diophante $x^2 + y^2 = z^2$ et lien avec le cercle unité, paramétrisation rationnelle du cercle, solutions de l'équation de Diophante.

1.4. Rotations et angles. — (Audin) Définition de $SO_2(\mathbb{R})$, isomorphisme avec $\mathbb{U}$. Pour tout couple de vecteur (u,v), il existe une unique rotation f telle que $f(u) = v$, définition de la relation d'équivalence sur l'ensemble des couples de vecteurs, de l'angle orienté de u et v comme la classe d'équivalence de (u,v), de leur ensemble, application de cet ensemble dans $SO_2(\mathbb{R})$, invariance sur les classes d'équivalence, application induite des angles dans $SO_2(\mathbb{R})$, mesure de l'angle orienté de u et v comme l'angle de la rotation associée, relation de Chasles.

2. Racines de l'unité et cyclotomie. —

2.1. Sous-groupes de $\mathbb{U}$. — (FGN Analyse 1) Un sous-groupe de $\mathbb{U}$ est soit dense, soit fini, exemple de $< e^{2i\pi\theta} >$, de $\{\sin(n), n \in \mathbb{N}\}$. (Gozard) Définition des racines n-ième de l'unité, exemples, de leur groupe $\mathbb{U}_n$, $\mathbb{U}_n$ est cyclique, $\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, 0 \leq k < n\}$, le seul sous-groupe fini d'ordre n de $\mathbb{C}$ est $\mathbb{U}_n$, définition d'une racine primitive n-ième, exemples, de leur groupe μ_n^*, ce sont les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \wedge n = 1$. $\mathbb{U}_d < \mathbb{U}_n$ ssi $d \mid n$, $\mathbb{U}_n = \bigsqcup_{d|n} \mu_d^*$, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

2.2. Cyclotomie. — (Gozard) Corps cyclotomique. Définition du n-ième polynôme cyclotomique $\Phi_n \in \mathbb{C}[X]$, il est unitaire, de degré $\varphi(n)$, on a a formule $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$, premiers polynômes cyclotomiques, théorème de Wedderburn, $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$, **dev** Φ_n est irréductible dans $\mathbb{Q}$. Ainsi, le polynôme minimal de ζ une racine n-ième de l'unité sur $\mathbb{Q}$ est Φ_n, donc $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$, si $m \wedge n = 1$ et α, β racines n, m-ièmes de l'unité, $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}$. (FGN Algèbre 1) Théorème de Kronecker, cor : si P est de plus irréductible, c'est une polynôme cyclotomique. (Gozard) Théorème de Dirichlet faible.

3. Occurrence en théorie des représentations. —

3.1. Représentations et table de caractères d'un groupe cyclique. — (Serre) Définition d'une représentation, remarquer qu'une représentation est diagonalisable de valeurs propres des racines n-ème de l'unité, définition du caractère associé à une représentation, remarquer qu'il est à valeurs dans $\mathbb{U}_{|G|}$. G est abélien ssi toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1. (Peyré) Table de caractères de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. (Serre) Les représentations irréductibles d'un produit sont les produits tensoriels de représentations irréductibles des deux groupes.

3.2. Dual d'un groupe. — (Peyré) Définition du dual d'un groupe, transformée de Fourier et transformée de Fourier inverse, isomorphisme entre G et son bidual, prolongement de caractères, **dev** théorème de structure des groupes abéliens finis.

3.3. Transformée de Fourier discrète. — (Peyré) Définition de l'échantillon d'un signal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, transformée de Fourier discrète, lien avec la transformée de Fourier sur un groupe fini, formule d'inversion. (Cormen-Leiserson-Rivest-Stein) Algorithme rapide de calcul de la TFD, coût en $O(N \ln(N))$. Principe de l'algorithme de multiplication rapide de polynômes.

Leçon 103 - Exemples de sous-groupes distingués et groupes quotients. Applications.

Références : Ulmer, Perrin, Calais (Th. des groupes), *secondaires :* Peyré, Serre, Rauch.

Développements : simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$, automorphismes de $\mathfrak{S}_n$.

Introduction : l'étude des sous-groupes distingués et des groupes quotients est importante puisqu'elle permet de réduire l'étude du groupe si on peut le décomposer comme produit direct ou produit semi-direct. Important : lien entre sous-groupes distingués et sous-groupes quotient, très puissant : table de caractères et sous-groupes distingués, a été utilisé pour la classification des groupes simples finis.

Cadre : soit G un groupe.

1. Lien entre sous-groupes distingués et groupes quotients. —

1.1. Sous-groupes distingués. — (Ulmer) définition d'un sous groupe distingué : $gHg^{-1} \subset H\ \forall g$, équivalence avec être stabilisé par tous les automorphismes intérieurs. Exemple dans les abéliens. Proposition sur l'image et l'image réciproque d'un groupe distingué, exemple du noyau : $\mathfrak{A}_n$, $\mathrm{SL}_n(K)$, et du centre $\mathrm{Id} \cdot K^*$.

1.2. Quotient par un sous-groupe. — (Ulmer) Définition des classes à gauche, à droite, relations d'équivalence associées, espaces quotient à gauche, à droite, équipotence de ces espaces, définition de l'indice lorsque l'ensemble quotient est fini, un sous-groupe d'indice 2 est distingué : $< r >$ est d'indice 2 donc distingué dans D_n.

1.3. Lien entre les notions : groupe quotient. — (Ulmer) Remarque que H est distingué ssi les classes à gauche et à droite sont égales, H est distingué ssi $(G/H)_g$ est munit d'une bonne structure de groupe, définition du groupe quotient. Exemple de $\mathrm{PGL}_n(K)$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. H est distingué ssi c'est le noyau d'un morphisme de groupes. (Calais (Th. des groupes)) Sous-groupes du groupe quotient. (Ulmer) propriété universelle du groupe quotient, app : $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbf{S}_1$, $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{SL}_n(K) \cong K^*$, $G/Z(G) \cong \mathrm{Int}(G)$. 3e th d'isomorphisme, app : si $d|n$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$.

1.4. Sous-groupes caractéristiques. — (Ulmer) définition comme un sous-groupe stabilisé par tous les automorphismes : c'est un sous-groupe distingué, exemples du centre, du groupe engendré par les carrés, exemple de $\mathfrak{A}_n$, proposition sur la transitivité.

2. Produit direct, produit semi-direct. — Définition d'une suite exacte $1 \to N \xrightarrow{i} G \to H \to 1$, remarque que si $N \triangleleft G$, $G/i(N) \cong H$.

2.1. Produit direct. — (Perrin) définition du produit direct de deux groupes N et H, $N \times \{e\} \triangleleft N \times H$ et $\{e\} \times H \triangleleft N \times H$, suite exacte, exemple du lemme chinois, contre exemple de V_4 et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. (Ulmer) Produit direct interne.

2.2. Produit semi-direct. — (Perrin) définition du produit semi-direct externe de N et H via $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$, $N \times \{e\} \triangleleft N \rtimes_\varphi H$, suite exacte, critère pour que $G \cong N \rtimes_\varphi H$ pour des sous-groupes de G, définition du produit semi-direct interne, critère de produit semi-direct par extension scindée, critère pour d'un produit semi-direct soit direct. Exemple de $\mathfrak{S}_n \cong \mathfrak{A}_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $D_n \cong < r > \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathrm{GL}_n(K) \cong \mathrm{SL}_n(K) \rtimes K^*$.

3. Théorèmes de Sylow. — (Perrin) Définition d'un p-Sylow, théorèmes de Sylow : existence d'un p-Sylow, un p-sous-groupe est contenu dans un p-Sylow, les p-Sylow sont tous conjugués, leur nombre divise n le cardinal de G et est congru à 1 modulo p, cor : il existe un unique p-Sylow ssi il est distingué dans G, un groupe d'ordre 195 n'est pas simple, groupes d'ordre pq.

4. Résolubilité et simplicité. —

4.1. Groupes résolubles. — (Ulmer) Définition du groupe dérivé, groupes dérivés itérés, il est caractéristique, donc itérés aussi, donc distingués, G/H abélien ssi $D(G) \subset H$. Définition de résoluble comme l'existence d'un groupe dérivé itéré trivial, équivalence avec suite de groupe distingués, exemple de $\mathbb{H}_8$, $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$. Tout p-groupe fini est résoluble.

4.2. Groupes simples. — Définition, **dev** $SO_3(\mathbb{R})$ est simple, (Perrin) $\mathfrak{A}_n$ est simple pour $n \geq 5$, cor : $D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{A}_n$ $n \geq 2$ et $D(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$ $n \geq 5$, donc pour $n \geq 5$, $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$ ne sont pas résolubles, **dev** sous-groupes distingués de $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$, automorphismes de $\mathfrak{S}_n$.

5. Représentations et sous-groupes distingués. —

5.1. Représentations. — (Ulmer) Définition d'une représentation, du caractère associé à une représentation. (Rauch) Une représentation de G/H donne une représentation de G. (Peyré) Définition d'une table de caractère, exemple de la table du groupe diédral. (Rauch) La table de caractères de G contient celle de G/H. (Serre) Exemple de la table de caractères de $\mathfrak{A}_4$. Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$.

5.2. Caractères et sous-groupes distingués. — (Ulmer) Définition du noyau d'un caractère, c'est effectivement le noyau de ρ, les sous-groupe distingués sont les intersections de noyaux des caractères, exemples avec les tables déjà données, caractérisation de la simplicité.

Leçon 104 - Groupes finis. Exemples et applications.

Références : Ulmer, Combes, Perrin, Tauvel, Ortiz, FGN Al 1, *secondaires :* Peyré, Serre.

Développements : automorphismes de $\mathfrak{S}_n$, table de caractères de $\mathfrak{S}_4$, *théorème de structure des groupes abéliens finis.*

Cadre : soit G un groupe fini d'ordre n.

1. Étude générale. —

1.1. Ordre et exposant. — (ULMER) Définition de l'ordre d'un groupe, exemple de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathfrak{S}_n$, définition de l'ordre d'un élément, exemple d'une permutation, de $\overline{k}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $o(g)|k \Leftrightarrow g^k = e$. (FGN ALGÈBRE 1) Définition de l'exposant exp d'un groupe fini comme le ppcm des ordres de ses éléments, existence d'un élément d'ordre l'exposant, exemple de $\exp(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n$, $\exp((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}) = 2$, $\exp(G) = 2 \Rightarrow G$ est abélien.

1.2. Indice et théorème de Lagrange. — (ULMER) Définition de l'ensemble quotient G/H, des classes à gauche, de l'indice de H dans G : $[G : H]$, exemple : $[\mathbb{Z} : 2\mathbb{Z}] = 2$, équipotence des classes à gauche, $|G| = |H|[G : H]$, théorème de Lagrange, un sous-groupe d'indice 2 est distingué, tout groupe d'ordre p premier est cyclique, un groupe non abélien d'ordre 8 est isomorphe à D_4 ou $\mathbb{H}_8$ (COMBES).

1.3. Actions de groupe. — (ULMER) Définition de l'action à gauche de G sur un ensemble X, interprétation comme un morphisme $G \to \mathfrak{S}_X$, définition de l'orbite, du stabilisateur, d'une action libre, transitive, fidèle, les orbites forment une partition, exemple de l'action de $\mathfrak{S}_X$ sur X, G sur lui même par translation, théorème de Cayley, par conjugaison, relation $|G| = |\operatorname{Stab}(x)||\operatorname{Orb}(x)|$, équation aux classes, formule de Burnside.

2. Groupes abéliens finis. —

2.1. Groupes cycliques. — Définition d'un groupe cyclique, un groupe cyclique est abélien. (COMBES) ordre de a^k dans $G =< a >$, caractérisation de a^k générateur, indicatrice d'Euler. (PERRIN) $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ (ces résultats s'appliquent à tout groupe cyclique via l'automorphisme). (COMBES) Morphisme d'un groupe cyclique dans un groupe, deux groupes cycliques sont isomorphes ssi ils ont le même ordre, sous-groupes d'un groupe cyclique, app : $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. (PERRIN) $\mathbb{F}_q^*$ est cyclique. (COMBES) Nombre de morphismes entre deux groupes cycliques, produit de groupes cycliques, app : calcul de φ.

2.2. Théorème de structure des groupes abéliens finis. — (COMBES) **dev** Théorème de structure des groupes abéliens finis, cor : l'exposant de G est le dernier invariant, pour tout diviseur d de $|G|$ il existe un sous-groupe d'ordre d, existence et unicité d'un sous-groupe d'ordre $p^{\nu_p(n)}$, app : groupes abéliens d'ordre 600.

3. p-groupes et théorèmes de Sylow. —

3.1. p-groupes. — (ULMER) Définition d'un p-groupe fini, si G est un p-groupe agissant sur X, $|X^G| \equiv |X| \mod (p)$, théorème de Cauchy : existence d'un élément d'ordre p pour $p||G|$, G est un p-groupe ssi $|G| = p^k$, le centre d'un p-groupe non trivial n'est pas trivial, un groupe d'ordre p^2 est abélien.

3.2. théorèmes de Sylow. — (PERRIN) Définition d'un p-Sylow, théorèmes de Sylow, cor : un groupe d'ordre 195 n'est pas simple, groupes d'ordre pq.

4. Groupes finis remarquables. —

4.1. Groupe symétrique. — (TAUVEL (ALGÈBRE)) Définition de $\mathfrak{S}_n$, orbite, support, deux permutations à support disjoint commutent, cycle, décomposition en produit de cycles à supports disjoints, générateurs de $\mathfrak{S}_n$, morphisme signature $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-m(\sigma)}$, $\mathfrak{A}_n$ comme son noyau, exemple de $\mathfrak{A}_2 = \{Id\}$ et $\mathfrak{A}_3 = \{Id, (1,2,3), (1,3,2)\} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, générateurs de $\mathfrak{A}_n$. $Z(\mathfrak{S}_n) = \{\text{id}\}$, pour $n \geq 3$ et $Z(\mathfrak{A}_n) = \{\text{id}\}$ pour $n \geq 4$, exemple de $\mathfrak{S}_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathfrak{A}_2 = \{\text{id}\}$ et $\mathfrak{A}_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. (PERRIN) Pour $n \leq 5$, $\mathfrak{A}_n$ est simple, cor : groupes dérivés, exemple de $D(\mathfrak{A}_4) \cong V_4$, **dev** automorphismes de $\mathfrak{S}_n$.

4.2. Groupe diédral. — (ULMER) Définition comme le groupe des isométries qui préserve un polygone régulier, s et r engendrent D_n, relations vérifiées, $< r >$ d'ordre n et distingué, groupe dérivé. (ORTIZ) Centre, classes de conjugaison.

5. Représentations. —

5.1. Représentations et caractères. — (ULMER) Définition d'une représentation, d'une sous représentation, d'une représentation irréductible, théorème de Maschke. Définition du caractère associé à une représentation, d'un caractère irréductible. Définition du produit scalaire sur les fonctions centrales, les caractères irréductibles forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales.

5.2. Tables de caractères. — (PEYRÉ) Définition d'une table de caractère, exemple de la table de caractères de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, du groupe diédral. (SERRE) Exemple de la table de caractères de $\mathfrak{A}_4$. **dev** Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$. (ULMER) Définition du noyau d'un caractère, les sous-groupe distingués sont les intersections de noyaux des caractères, exemples avec les tables déjà données, caractérisation de la simplicité.

Leçon 105 - Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Références : Tauvel (Algèbre), Perrin, Ulmer, Gourdon, Ramis-Deschamps-Odoux 1.

Développements : table de caractères de $\mathfrak{S}_4$, automorphismes de $\mathfrak{S}_n$.

1. Généralités sur le groupe symétrique. —

1.1. Définition et premières propriétés. — (Tauvel (Algèbre)) Définition de $\mathfrak{S}_n$, cardinal, structure de groupe, n-transitivité. (Perrin) Th. de Cayley, matrices de permutations, app : 1er th. de Sylow.

1.2. Orbites et cycles. — (Tauvel (Algèbre)) Définition de l'orbite, du support. (Ulmer) deux permutations à support disjoint commutent. (Tauvel (Algèbre)) Cycles, nombre de k-cycles, décomposition en produit de cycles à support disjoint, exemple. (Ulmer) Type d'une permutation, exemple, l'ordre d'une permutation est le ppcm des éléments du type.

1.3. Signature et groupe alterné. — (Tauvel (Algèbre)) Morphisme signature, exemple pour une transposition, remarque avec le type, autre forme de ε, c'est un morphisme de groupes, groupe alterné, distingué, cardinal, exemple pour $n = 2, 3$, $n - 2$-transitivité.

2. Structure du groupe symétrique. —

2.1. Classes de conjugaison. — (Ulmer) Conjugaison d'un cycle par une permutation, deux permutations sont conjuguées ssi elles ont le même type. Nombre d'éléments d'ordre n (Tauvel (Algèbre)). **dev** Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$, étude des sous-groupes distingués.

2.2. Générateurs. — (Tauvel (Algèbre)) $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions, $(1, i)$, $(i, i + 1)$, $(1, 2)$ et $(1, 2, \dots, n)$, exemple (preuve) de décompositions, $\mathfrak{A}_n$ engendré par $(1, i)(1, j)$, $(1, 2, i)$, $s^2, s \in \mathfrak{S}_n$, exemple (preuve) de décompositions.

2.3. Sous groupes, sous groupes distingués. — (Tauvel (Algèbre)) Centres, contre-exemples, le sous-groupe engendré par les carrés est caractéristique, donc $\mathfrak{A}_n$ est caractéristique. Sous-groupes d'indice 2. (Perrin) Pour $n \leq 5$, $\mathfrak{A}_n$ est simple, sous groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$, groupes dérivés, contre-exemple $D(\mathfrak{A}_4) \cong V_4$, sous-groupe d'indice n, **dev** automorphismes de $\mathfrak{S}_n$.

3. Applications. —

3.1. Déterminant. — (Gourdon) L'ensemble des formes n-linéaires alternées est un e.v. de dimension 1 et il existe une unique forme n-linéaire alternée qui vaut 1 sur un base donnée de E, c'est le déterminant. Forme explicite avec les permutations. Si $f \in \mathrm{End}(E)$, le déterminant de $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ ne dépend pas de la base $(e_i)_i$ choisie, c'est le déterminant de f. Le déterminant d'une matrice est le déterminant de l'endomorphisme induit. Calcul explicite du déterminant en dimension 2 et 3, égalité du déterminant d'un endomorphisme et de celui de sa matrice associée, morphisme surjectif $\det : \mathrm{GL}(E) \to K^*$, déterminant de la matrice obtenue avec permutation des colonnes, développement par rapport aux lignes et aux colonnes, matrice de Vandermonde, déterminant d'une matrice de Vandermonde.

3.2. Polynômes symétriques. — (Ramis-Deschamps-Odoux tome 1) Action de $\mathfrak{S}_n$ sur $A[X_1, \dots, X_n]$, $P \mapsto \sigma(P)$ est un automorphisme d'algèbre, définition des polynômes symétriques, structure de A-algèbre, exemple de $X^2 + 3XY + Y^2 + 1$, définition des polynômes symétriques élémentaires, exemple pour $n = 3$. (Gourdon) Relations coefficient racines. (Ramis-Deschamps-Odoux tome 1) Théorème de structure des polynômes symétriques, exemple de $X^2 + 3XY + Y^2 + 1$, algorithme de détermination de Q, remarque sur les hauts degrés.

Leçon 106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel E de dimension finie, sous groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

Références : Perrin, Gourdon, Caldero-Germoni, Mneimné-Testard, *secondaires :* Beck-Malick-Peyré, Ortiz, Ulmer, Audin, Rouvière.

Développements : simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$, étude du groupe $O(p,q)$.

Introduction : voir l'avant propos d'Histoires hédonistes de groupes et de géométrie, tome 1. $\mathrm{GL}(E)$ intervient beaucoup en actions de groupes, beaucoup de problèmes et de résultats ont leur interprétation en termes d'action de groupe, comme par exemple la réduction (cf H2G2), ses sous-groupes apparaissent alors naturellement comme les stabilisateurs de ces actions ($O_n(\mathbb{R})$). Beaucoup d'applications en réduction. Citer le théorème de Sylow, fondamental.

Cadre : soit k un corps et soit E un k-ev de dimension finie n.

1. Aspects algébriques de $\mathrm{GL}(E)$. —

1.1. Groupe linéaire et groupe spécial linéaire. — (Perrin) Définition du groupe linéaire, isomorphisme avec $\mathrm{GL}_n(k)$ via le choix d'une base, $\mathrm{GL}_n(k) \cong \mathrm{GL}_m(k) \Leftrightarrow n = m$ (Beck-Malick-Peyré p. 205), caractérisation de l'inversibilité d'un morphisme (Gourdon), morphisme déterminant, définition de $\mathrm{SL}(E)$ qui est donc un sous-groupe distingué, expression de $\mathrm{GL}(E)$ comme un produit semi-direct : $\mathrm{GL}(E) \cong \mathrm{SL}(E) \rtimes k^*$. Cardinaux dans le cas des corps finis.

1.2. Générateurs et groupes dérivés. — (Perrin) Définition-proposition sur les dilatations et les transvections, les transvections engendrent $\mathrm{SL}(E)$, les transvections et les dilatations engendrent $\mathrm{GL}(E)$, corollaire sur les groupes dérivés.

1.3. Groupes projectifs. — (Perrin) Comportement par conjugaison, centres de $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{SL}(E)$. (Ulmer) Définition de $\mathbb{P}(E)$, action de $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{SL}(E)$ sur $\mathbb{P}(E)$, les noyaux de ces actions sont les centres, définition des groupes projectifs. (Audin) Isomorphisme avec le groupe des homographies. (Perrin) Cardinaux dans le cas des corps finis, simplicité de $\mathrm{PSL}(E)$ sauf cas exceptionnels, isomorphismes exceptionnels, application aux sous-groupes distingués de $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{SL}(E)$ (Ortiz p. 206).

1.4. Application au théorème de Sylow. — (Perrin) Injection de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{GL}_n(k)$, injection de tout groupe fini dans $\mathrm{GL}_n(k)$ via le théorème de Cayley, existence d'un p-Sylow dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, théorème de Sylow.

2. Actions de $\mathrm{GL}(E)$ sur les espaces de matrices. —

2.1. Action par équivalence. — (Caldero-Germoni) Définition de l'action de $\mathrm{GL}_n(k) \times \mathrm{GL}_m(k)$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(k)$ par équivalence, interprétation en terme d'endomorphisme et de bases, théorème du rang, corollaire : en caractéristique différente de deux, une matrice est somme de deux matrices inversibles (sans référence).

2.2. Action par conjugaison. — (Caldero-Germoni) Définition de l'action, invariants de l'action. Réduction de Jordan d'une matrice nilpotente, les formes réduites de Jordan sont un système de représentant des orbites. Réduction de Frobenius, les facteurs invariant forment un invariant total des classes de similitudes.

2.3. Action par congruence. — (Caldero-Germoni) Définition de l'action, interprétation en termes de forme quadratique, classification sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{F}_p$: application à la loi de réciprocité quadratique. (Perrin) Définition du groupe orthogonal $O(f)$, dans une certaine base, interprétation comme le stabilisateur de la matrice de f sous l'action par congruence, isomorphisme avec un $O(p,q)$ dans le cas non dégénéré. Définition des endomorphismes unitaires.

3. Étude des groupes orthogonaux. —

3.1. Parties génératrices. — (Perrin) Définition du groupe spécial orthogonal. $O_n(\mathbb{R})$ est compact, $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe, centres, structure des éléments. Définition des symétries, réflexions, renversements, générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$, **dev** $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

3.2. Décomposition polaire. — (Caldero-Germoni) Décomposition polaire, $O_n(\mathbb{R})$ est compact maximal, $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme, **dev** $O(p,q) \cong O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$.

4. Éléments de topologie de $\mathrm{GL}(E)$. — Ici $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

4.1. Densité. — (Mneimné-Testard) $\mathrm{GL}_n(k)$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(k)$, application à $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, et la différentielle du déterminant (Rouvière).

4.2. Connexité. — (Mneimné-Testard) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes, l'ensemble des matrices de rang donné est connexe.

Leçon 107 : Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Références : Ulmer, Colmez, Peyré, Serre, Rauch.

Développements : table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ par les isométries positives du cube, structure des groupes abéliens finis.

Introduction : concept majeur : étude des sous-groupes distingués et de la simplicité à partir de la table de caractères (cela a été utilisé pour classifié les groupes simples finis), on cherche donc à savoir la construire. Comme d'habitude on cherche à décomposer en des trucs plus simples, et savoir si c'est possible : représentations irréductibles, et c'est toujours possible. Important : relations sur les caractères irréductibles, décomposition,... Conséquence importante : théorème de structure des groupes abéliens finis.

Cadre : soit G un groupe fini de cardinal n et V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1. Représentations linéaires. —

1.1. Définition et premières propriétés. — (Colmez) Définition d'une représentation, du degré d'une représentation, d'une représentation fidèle. Exemples de représentations de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Une représentation est diagonalisable de valeurs propres des racines n-ème de l'unité. (Ulmer) Exemple de la représentation triviale, par permutation, régulière. (Rauch) Si $H \lhd G$, une représentation de G/H donne une représentation de G.

1.2. Opérations sur les représentations. — (Ulmer) Définition d'un morphisme de représentations, isomorphisme, exemple de l'opérateur de moyenne. Somme de représentations, représentation $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$, représentation duale.

1.3. Représentations irréductibles. — (Ulmer) Définition d'une sous-représentation, exemple de V^G, $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)^G = \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$, définition d'une représentation irréductible, complètement réductible, exemple des représentations de degré 1, si une représentation de G/H est irréductible sa représentation induite sur G l'est aussi (Rauch). (Colmez) Il existe un produit scalaire sur V invariant sous l'action de G, théorème de Maschke. (Ulmer) Exemple de la décomposition de la représentation par permutation de $\mathfrak{S}_3$. Lemme de Schur.

2. Caractères d'un groupe fini. —

2.1. Définition et premières propriétés. — (Ulmer) Définition du caractère associé à une représentation, exemple du caractère de la représentation triviale, par permutation, régulière. Définition d'un caractère irréductible. Les caractères de deux représentations isomorphes sont égaux, caractère de la somme de deux représentation, de $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$, de la représentation duale.

2.2. Espace des fonctions centrales. — (Ulmer) Définition des fonctions centrales, elles forment un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, les caractères sont des fonctions centrales. Définition du produit scalaire sur les fonctions centrales, les caractères irréductibles forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales, il y a autant de caractères irréductibles que des classes de conjugaison dans G, un caractère irréductible apparait $\deg \chi$ fois dans la représentation régulière, expression de l'ordre de G, décomposition unique de tout caractère comme combinaison linéaire de caractère irréductible et expression des coefficients, χ est irréductible ssi $< \chi, \chi >= 1$, deux représentations sont isomorphes ssi elles ont même caractère.

2.3. Tables de caractères. — (Peyré) Définition d'une table de caractère, les colonnes sont orthogonales (preuve : Serre), exemple de la table de caractères de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, du groupe de Klein (sans référence), du groupe diédral. (Rauch) La table de caractères de G contient celle de G/H, table de caractères de $\mathfrak{S}_3$. (Serre) Exemple de la table de caractères de $\mathfrak{A}_4$. **dev** Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$.

3. Représentations et théorie des groupes. —

3.1. Sous-groupes distingués. — (Ulmer) Définition du noyau d'un caractère, c'est effectivement le noyau de ρ, les sous-groupe distingués sont les intersections de noyaux des caractères, exemples avec les tables déjà données, caractérisation de la simplicité. (Rauch) Table de caractères de $\mathfrak{A}_5$ et application à la simplicité.

3.2. Groupes abéliens. — (Ulmer) Les caractères irréductibles d'un groupe abélien sont tous de degré 1, au nombre de $|G|$, caractères irréductibles de degré 1 dans le cas général, conséquence pour le groupe des quaternions. (Serre) Un groupe est abélien ssi toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1. Les représentations irréductibles de $G_1 \times G_2$ sont les produits tensoriels de représentations irréductibles de G_1 et G_2. (Peyré) Table de caractères des groupes cycliques. Définition du dual d'un groupe, prolongement des caractères, **dev** théorème de structure des groupes abéliens finis.

Leçon 108 - Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

Références : Perrin, Ulmer, Calais (Th. des groupes), Tauvel, Combes, Mneimné-Testard, Caldero-Germoni.

Développements : automorphismes de $\mathfrak{S}_n$, $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

Introduction : l'étude des générateurs d'un groupe est très importante puisqu'elle peut permettre de réduire l'étude du groupe à celle de ses générateurs. On peut notamment penser à la détermination des morphismes de groupes.

Cadre : soit G un groupe.

1. Partie génératrice, générateurs et relations. — (Perrin) Groupe engendré, caractérisation comme intersection et avec les éléments de la partie, partie génératrice. (Calais (Th. des groupes)) Exemple du groupe dérivé, le groupe dérivé est distingué et caractéristique, quotient abélien et caractérisation par le quotient. (Ulmer) Groupe libre, propriété universelle du groupe libre, présentation par générateurs et relations. Exemple de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2. Groupes abéliens. —

2.1. Groupes monogènes et groupes cycliques. — (Perrin) Groupe monogène, tout groupe monogène est abélien, tout groupe monogène est isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, dans le dernier cas : cyclique. On a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} =< x|x^n >$, exemple de $\mathbb{U}_n$ cyclique d'ordre n, tout groupe d'ordre p premier est cyclique. (Combes) Ordre de a^k dans $G =< a >$, caractérisation de a^k générateur, indicatrice d'Euler. (Perrin) $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. (Combes) Morphisme d'un groupe cyclique dans un groupe, deux groupes cycliques sont isomorphes ssi ils ont le même ordre, sous-groupes d'un groupe cyclique, quotient (Ortiz), app : $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. (Perrin) $\mathbb{F}_q^*$ est cyclique. (Combes) Produit de groupes cycliques, app : calcul de φ.

2.2. Groupe abéliens de type fini. — (Ulmer) groupe abélien de type fini, les groupes abéliens finis sont de type fini, $\mathbb{Z}$-base, théorème de structure, exemple de G abélien d'ordre 24, caractérisation de G fini pour G abélien de type fini, exposant d'un groupe fini, existence d'un élément d'ordre l'exposant dans un groupe abélien fini, un groupe abélien fini est cyclique si et seulement si il contient au plus un sous groupe d'ordre d pour tout diviseur d de n.

3. Groupe symétrique. —

3.1. Générateurs. — (Tauvel (Algèbre)) définition de $\mathfrak{S}_n$, orbite, support, cycle, décomposition en produit de cycles à supports disjoints, morphisme signature $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-m(\sigma)}$, $\mathfrak{A}_n$ comme son noyau, exemple de $\mathfrak{A}_2 = \{Id\}$ et $\mathfrak{A}_3 = \{Id, (1,2,3), (1,3,2)\} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, générateurs de $\mathfrak{S}_n$, générateurs de $\mathfrak{A}_n$.

3.2. Applications. — (Perrin, Tauvel (Algèbre)) $Z(\mathfrak{S}_n) = \{id\}$ pour $n \geq 3$ et $Z(\mathfrak{A}_n) = \{\text{id}\}$ pour $n \geq 4$, exemple de $\mathfrak{S}_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathfrak{A}_2 = \{\text{id}\}$ et $\mathfrak{A}_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, pour tout groupe G, $< x^2, x \in G >$ est caractéristique dans G, ainsi $\mathfrak{A}_n \sqsubset \mathfrak{S}_n$, pour $n \leq 5$, $\mathfrak{A}_n$ est simple, cor : sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$, groupes dérivés, exemple de $D(\mathfrak{A}_4) \cong V_4$, sous-groupes d'indice n, **dev** automorphismes de $\mathfrak{S}_n$.

4. Groupe diédral. — (Ulmer) Définition comme le groupe des isométries qui préserve un polygone régulier, s et r engendrent D_n, relations vérifiées, présentation par générateurs et relations, $< r >$ d'ordre n et distingué, groupe dérivé. (Ortiz) Centre, classes de conjugaison.

5. Groupe linéaire. —

5.1. Groupe linéaire et groupe spécial linéaire. — (Perrin) Définition de $\text{GL}(E)$, $\text{SL}(E)$, définition-proposition par équivalences des dilatations et transvections, comportement par conjugaison, calcul des centres, définition de $\text{PGL}(E)$, $\text{PSL}(E)$, transvections engendrent $\text{SL}(E)$, transvections et dilatations engendrent $\text{GL}(E)$, app groupes dérivés.

5.2. Groupe orthogonal. — (Perrin) Définition du groupe orthogonal euclidien $O(E)$, $SO(E)$, définition des symétries, réflexions, renversements, caractérisations des symétries orthogonales, centre de $O(E)$, $SO(E)$, les réflexions orthogonales engendrent $O(E)$, les renversements orthogonaux engendrent $SO(E)$, app : groupes dérivés. (Caldero-Germoni) **dev** : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

Leçon 110 - Structure et dualité des groupes abéliens finis. Applications.

Références : Peyré, Cormen-Leiserson-Rivest-Stein.

Développements : théorème de structure des groupes abéliens finis, formule de Poisson discrète.

Introduction : la transformée de Fourier sur les groupes finis à de nombreuses applications : multiplication de polynômes et d'entiers, mais aussi traitement d'images, du signal, décodage en codes correcteurs, EDP. La FFT c'est ce qu'on fait de mieux pour la multiplication en algorithmique. Dans un cadre plus théorique on montre le théorème de structure des groupes abéliens finis sans utiliser la théorie des modules. On peut citer en application l'utilisation pour la classification des groupes finis de petit ordre.

Cadre : soit G un groupe abélien fini d'ordre n.

1. Dual d'un groupe abélien fini. —

1.1. Définitions et dual d'un groupe cyclique. — (Peyré) Définition des caractères de G, remarquer qu'ils sont à valeurs dans $\mathbb{U}_n$ et conséquences, définition du dual $\widehat{G}$ de G, structure de groupe, c'est un groupe fini. Dual d'un groupe cyclique, remarquer qu'il y a donc un isomorphisme (non canonique) $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1.2. Cas général d'un groupe abélien fini. — (Peyré) **dev** Prolongement des caractères, théorème de structure des groupes abéliens finis. Applications : détermination des groupes abéliens d'ordre $8, 9$ et 10. Isomorphisme $\widehat{G} \cong G$, remarquer qu'il n'est pas canonique, définition du bidual de G, isomorphisme canonique entre G et son bidual.

1.3. Caractères d'un corps finis. — (Peyré) Définition des caractères additifs et multiplicatifs d'un corps fini $\mathbb{F}_q$, détermination des caractères multiplicatifs, caractère additif canonique, détermination des caractères additifs. Exemple du caractère quadratique.

2. Transformée de Fourier. —

2.1. L'algèbre $\mathbb{C}[G]$. — (Peyré) Définition de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[G]$, produit scalaire, base canonique. Orthonormalité des caractères, ainsi ils forment une base orthonormale de $\mathbb{C}[G]$, relation duale de la relation d'orthogonalité. Table de caractères, exemples de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Définition du produit sur $\mathbb{C}[G]$ et du produit de convolution, qui donnent à $\mathbb{C}[G]$ deux structure d'algèbre.

2.2. Transformée de Fourier sur $\mathbb{C}[G]$. — (Peyré) Définition de la transformée de Fourier de $f \in \mathbb{C}[G]$, formule d'inversion, c'est un isomorphisme, formule de Plancherel, transformée de Fourier et convolution. Application au calcul du déterminant circulant et aux marches aléatoires sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. **dev** Formule de Poisson.

2.3. Sommes de Gauss. — (Peyré) Définition des sommes de Gauss, interprétation comme transformée de Fourier multiplicative, prolongement des caractères multiplicatifs, interprétation des sommes de Gauss comme transformée de Fourier additive, formule d'inversion dans ce cadre, propriétés des sommes de Gauss, calcul des sommes de Gauss. Remarque sur l'application à la réciprocité quadratique.

3. Transformée de Fourier rapide. —

3.1. Transformée de Fourier discrète. — (Peyré) Définition de l'échantillon d'un signal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, transformée de Fourier discrète, lien avec la transformée de Fourier sur un groupe fini, formule d'inversion dans ce contexte, corollaire sur la bijectivité, formule de Plancherel dans ce contexte. Définition du produit de convolution sur $\mathbb{C}^N$, lien avec la transformée de Fourier discrète.

3.2. Transformée de Fourier rapide. — (Cormen-Leiserson-Rivest-Stein) Algorithme rapide de calcul de la TFD, coût en $O(N\ln(N))$, remarquer que la méthode naïve est en $O(N^2)$, et que la TFD inverse ressemble à la TFD et donc qu'on a aussi un algorithme de calcul en $O(N\ln(N))$ (Peyré).

3.3. Multiplication rapide de polynômes. — (Cormen-Leiserson-Rivest-Stein) Représentation des polynômes par les coefficients, la TFD c'est l'évaluation d'un polynôme en les racines n-ème de l'unité, principe de l'algorithme de multiplication rapide de polynômes.

Leçon 120 - Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

Références : Perrin, Combes, Demazure, Peyré, Gozard, *secondaires :* Ortiz, Gourdon, Serre.

Développements : théorème de Sophie Germain, théorème des deux carrés.

Cadre : soit $n \geq 2$ un entier. Si p est premier on note $\mathbb{F}_p$ le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1. Structures de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. —

1.1. Structure de groupe. — (Combes) Définition du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, tout groupe cyclique est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, exemple de $\mathbb{U}_n$. Ordre des éléments, générateurs, exemple des racines primitives de l'unité, indicatrice d'Euler, valeur pour p^s, p premier. Morphismes entre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, homomorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et groupe quotient (Ortiz). (Perrin) Nombres d'éléments d'ordre d, $n = \sum \varphi(d)$, corollaire : cyclicité de $\mathbb{F}_q^*$. Théorème de structure des groupes abéliens finis, groupes abéliens d'ordre 24. (Serre) Tables de caractères des groupes abéliens finis.

1.2. Structure d'anneau. — (Perrin) Structure d'anneau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, groupe des inversibles, c'est l'ensemble des générateurs. Automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Théorème des restes chinois, exemple de résolution d'un système de congruence, le morphisme induit un morphisme de groupes entre les groupes des inversibles, corollaire sur la multiplicativité de l'indicatrice d'Euler et formule explicite. Groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z}$. Groupes d'ordre pq. (Combes, p. 199) Idéaux et idéaux maximaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1.3. Structure de corps. — $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi n est premier. (Gozard) Existence et unicité d'un corps fini de cardinal p^n comme corps de décomposition sur $\mathbb{F}_p$ de $X^{p^n} - X$. Morphisme de Frobenius, groupe des automorphismes de $\mathbb{F}_{p^n}$. **dev** Théorème de Sophie Germain. On a $\mathbb{F}_{p^n} \cong \mathbb{F}_p[X]/(\pi)$ π irréductible de degré n, ainsi il existe des polynômes irréductibles de tout degré sur $\mathbb{F}_p$. Cardinal des polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$.

2. Arithmétique. —

2.1. Nombres premiers. — (Demazure) Théorème d'Euler : $a^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$ si $a \wedge n = 1$, petit théorème de Fermat. Chiffrement RSA. Critère de Fermat, nombres de Carmichael, exemple de 561 qui est le plus petit, critère de Miller-Rabin, théorème de Rabin, algorithme de Miller-Rabin.

2.2. Carrés et sommes de carrés. — (Gozard) Nombre de carrés dans $\mathbb{F}_q$, dans $\mathbb{F}_q^*$, caractérisation des carrés, app : -1 est un carré ssi $q \equiv 1 \mod 4$, cor : il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k+1$. Il existe des solutions dans $\mathbb{F}_p$ à $ax^2 + by^2 = 1$, application à la classification des formes quadratiques sur un corps finis. **dev** Théorème des deux carrés de Fermat (Perrin). Définition du symbole de Legendre, formule générale, pour -1, multiplicativité, loi de réciprocité quadratique, $(\frac{2}{p}) = (-1)^{p^2-1/8}$, $x^2 + 59y = 23$ n'a pas de solutions. (Gourdon) 5 est un carré dans $\mathbb{F}_p$ ssi $p \equiv \pm 1 \mod 10$, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $10n - 1$.

3. Applications de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. —

3.1. Polynômes irréductibles sur $\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{Q}$. — (Perrin) Irréductibles de $\mathbb{Z}[X]$, critère d'Eisenstein, exemple de $X^{p-1} + \cdots + 1$ irréductible sur $\mathbb{Z}$, critère de réduction modulo p, exemple de $X^p - X - 1$, c-ex de $X^4 + 1$.

3.2. Transformée de Fourier discrète. — (Peyré) Groupe dual de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, transformée de Fourier de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, transformée de Fourier discrète et transformée de Fourier inverse. Remarque sur la multiplication rapide de polynômes en $O(N\ln(N))$.

Leçon 121 - Nombres premiers. Applications.

Références : Gourdon, Perrin, Gozard, Ulmer, Demazure.

Développements : loi de réciprocité quadratique, théorème de Sophie Germain, *théorème des deux carrés de Fermat.*

Introduction : les nombres premiers sont beaucoup utilisés en cryptographie, avec RSA par exemple, on s'intéresse donc à savoir en trouver des grands, puisqu'il en existe une infinité. On connait d'ailleurs leur répartition. Ils apparaissent également en théorie des corps puisque les corps finis sont construits avec les anneaux $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, ainsi qu'en théorie des groupes, puisque leur apparition dans l'ordre d'un groupe a des conséquences intéressantes.

1. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$. —

1.1. Nombres premiers, premiers entre eux. — (Gourdon) Définition d'un nombre premier, de nombres premiers entre eux, si $p \nmid a$ alors $p \wedge a = 1$, théorème de Bézout, théorème de Gauss, **dev** théorème de Sophie Germain, $p \mid \binom{p}{k}$ pour tout $1 \leq k \leq p-1$, décomposition en facteurs premiers, expression du pgcd et du ppcm en conséquence, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6k-1$.

1.2. Répartition des nombres premiers. — Crible d'Eratosthène. (Gourdon) Il existe une infinité de nombres premiers, théorème de Dirichlet faible et fort (admis), (Gourdon p. 282 ou Amar-Matheron) la série $\sum \frac{1}{p}$ diverge, théorème des nombres premiers (admis).

1.3. Fonctions arithmétiques. — (Perrin) Définition d'une fonction arithmétique, d'une fonction multiplicative. Définition de l'indicatrice d'Euler φ, valeur sur les premiers, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$, définition de la fonction de Möbius μ, φ et μ sont multiplicatives, conséquence pour φ, formule d'inversion de Möbius, conséquence pour φ.

2. Corps finis. —

2.1. Théorie élémentaire des corps finis. — (Perrin) Définition de la caractéristique, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi n est premier, un corps fini est de caractéristique $p > 0$, il est alors de cardinal p^n, le Frobenius est un automorphisme de corps, c'est l'identité sur $\mathbb{F}_p$. Existence et unicité des corps finis comme corps de décomposition, $\mathbb{F}_q^\times \cong \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$, existence d'un polynôme irréductible de degré n, écriture des corps finis comme corps de rupture, dénombrement des polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$. Sous corps de $\mathbb{F}_{p^n}$.

2.2. Carrés dans $\mathbb{F}_p$. — (Perrin ou Gozard) Nombre de carrés dans $\mathbb{F}_q$, dans $\mathbb{F}_q^*$, caractérisation des carrés, app : -1 est un carré ssi $q \equiv 1 \mod 4$, cor : il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k+1$, **dev** théorème des deux carrés de Fermat. (Gozard) Définition du symbole de Legendre, formule générale, pour -1, multiplicativité, **dev** loi de réciprocité quadratique, $(\frac{2}{p}) = (-1)^{p^2-1/8}$, $x^2+59y = 23$ n'a pas de solutions. (Gourdon) 5 est un carré dans $\mathbb{F}_p$ ssi $p \equiv \pm 1 \mod 10$, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $10n-1$.

2.3. Critères d'irréductibilité. — (Perrin) Critère d'Eisenstein, application à $X^{p-1} + \cdots + 1$ pour p premier et $X^n - a$ avec a possédant au moins un facteur premier simple. Critère modulo p, application à $X^p - X - 1$ pour p premier et $X^3 + 628X^2 + 327X + 1981$.

3. Théorie des groupes. —

3.1. p-groupes. — (Ulmer) Définition d'un p-groupe fini, si G est un p-groupe agissant sur X, $|X^G| \equiv |X| \mod (p)$, théorème de Cauchy, caractérisation des p-groupes, le centre d'un p-groupe non trivial n'est pas trivial, un p-groupe d'ordre non premier n'est pas simple, un groupe d'ordre p^2 est abélien.

3.2. Théorème de Sylow. — (Perrin) Définition d'un p-Sylow, théorème de Sylow, cor : il existe un unique p-Sylow ssi il est distingué dans G, un groupe d'ordre 195 n'est pas simple, groupes d'ordre pq.

4. Conséquences du théorème d'Euler. —

(Demazure) Théorème d'Euler : $a^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$ si $a \wedge n = 1$, petit théorème de Fermat. Chiffrement RSA. Critère de Fermat, nombres de Carmichael, exemple de 561 qui est le plus petit, critère de Miller-Rabin, théorème de Rabin, algorithme de Miller-Rabin.

Leçon 122 - Anneaux principaux. Applications.

Références : Perrin, Gourdon, Beck-Malick-Peyré, Duverney, *secondaires :* Calais (Th. des anneaux), FGN algèbre 1, FG.

Développements : théorème des deux carrés, un anneau principal non euclidien.

Introduction : l'intérêt principal de la principalité est l'étude des modules sur un anneau principal. La principalité d'un anneau peut fournir des théorèmes d'existence : polynôme minimal, pgcd et ppcm. On a en arithmétique des résultats meilleurs que ceux avec les anneaux factoriels : théorème de Bézout. Les anneaux euclidiens permettent de calculer explicitement. Citer l'utilisation pour les équations diophantiennes avec les anneaux d'entiers.

Cadre : soit A un anneau intègre, et K un corps.

1. Anneaux principaux, exemples. —

1.1. Idéaux et anneaux principaux. — (Perrin) Définition d'un idéal principal, d'un anneau principal, c-ex de $\mathbb{Z}[X]$ avec $(X,2)$ non principal, ex de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{C}[X,Y]/(Y-X^2)$ (Francinou-Gianella). Définition d'un anneau noethérien, un anneau principal est noethérien. (Calais (Th. des anneaux)) Définition du localisé, le localisé d'un anneau principal est principal, application à l'anneau des décimaux qui est principal.

1.2. Exemple des anneaux euclidiens. — (Perrin) Définition d'un anneau euclidien, algorithme de division euclidienne, un anneau euclidien est principal, **dev** c-ex de la réciproque : $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right]$. Exemple de $K[X]$, $A[X]$ est principal ssi A est un corps, exemple des séries formelles (Francinou-Gianella).

2. Arithmétique dans les anneaux principaux. —

2.1. Divisibilité. — (Perrin) Définition de $a|b$, caractérisation en termes d'idéaux, relation d'associativité (en terme de divisibilité et en terme d'idéaux), définition d'un élément irréductible, d'un élément premier, dans A principal : p irréductible $\Leftrightarrow$ (p) maximal $\Leftrightarrow$ (p) premier, irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, (Francinou-Gianella) irréductibles de $K[|X|]$.

2.2. Héritage de la factorialité. — (Perrin) Définition du pgcd, du ppcm, éléments premiers entre-eux, définition d'une anneau factoriel, principal implique factoriel, c-ex de $K[X,Y]$, existence du pgcd et du ppcm dans un anneau factoriel, caractérisation par les idéaux dans un anneau principal (théorème de Bézout), appl : lemme des noyaux (Gourdon), c-ex de $(X)+(Y)=(X,Y)\neq(1)$, algorithme d'Euclide, lemme de Gauss. Théorème Chinois dans un anneau principal, résolution d'un système de congruence.

2.3. Polynôme minimal. — (Perrin) Lorsque B est une K-algèbre, définition du polynôme minimal de $\alpha \in B$ sur K avec le morphisme d'évaluation $\varphi : K[X] \to B$, exemple pour une extension de corps de K : $\alpha \in L$ est algébrique sur K ssi $K(\alpha)=K[\alpha]$ ssi $[K(\alpha):K]=\deg \pi_\alpha$. (Gourdon) Exemple pour $\mathcal{L}(E)$ où E est un K-ev de dimension finie : $K[u]\cong K[X]/(\pi_u)$, les racines de π_u sont les valeurs propres de u, u est diagonalisable ssi π_u est scindé à racine simples, cor : u est diagonalisable ssi $K[u]\cong K^r$, u est semi-simple ssi π_u est sans facteurs carrés ssi u diagonalise dans une extension finie de K.

3. Anneaux des entiers d'un corps quadratique. —

3.1. Définition et premières propriétés. — (Duverney) Définition d'un corps quadratique, définition de la norme, multiplicativité, définition de l'anneau des entiers, forme en fonction de d, caractérisation des unités de cet anneau, étude dans le cas $d>0$ et résolution de l'équation de Pell $x^2-dy^2=1$.

3.2. Anneau des entiers de Gauss et anneau $\mathbb{Z}[j]$. — (Duverney) Inversibles de l'anneau des entiers de Gauss, **dev** théorème des deux carrés, remarque sur le théorème des quatre quarrés. Inversibles de $\mathbb{Z}[j]$, équation de Mordell pour $k=-1$, équation de Fermat pour $n=3$

4. Modules sur les anneaux principaux. —

(Beck-Malick-Peyré) Définition d'un module libre, d'un module de type fini, remarquer qu'un module libre de type fini est isomorphe à A^r, théorème de la base adaptée, exemple avec $M=\mathbb{Z}^2$ et $N=(4,2)\mathbb{Z}$, théorème de décomposition des modules de type fini sur un anneau principal.

Leçon 123 - Corps finis. Applications.

Références : Gozard, Perrin, Demazure, Caldero-Germoni, *secondaire :* Beck-Malick-Peyré, Gourdon.

Développements : loi de réciprocité quadratique, polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$, *algorithme de Berlekamp.*

Cadre : soit K un corps fini, p un nombre premier.

1. Construction et structure. —

1.1. Premières propriétés, existence et unicité. — (Perrin) Définition de la caractéristique, la caractéristique d'un corps est nulle ou un nombre premier, si K est un corps fini elle est non nulle, alors $|K| = p^n$. Existence et unicité d'un corps fini de cardinal p^n comme corps de décomposition sur $\mathbb{F}_p$ de $X^{p^n} - X$. Exemple de construction de $\mathbb{F}_4$. Théorème de Wedderburn.

1.2. Le groupe $\mathbb{F}_q^*$. — (Perrin) Le groupe multiplicatif $\mathbb{F}_q^*$ est cyclique d'ordre $q-1$ donc isomorphe à $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$. (Gozard) Tout générateur α de $\mathbb{F}_q^*$ vérifie $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[\alpha] = \mathbb{F}_p(\alpha)$, mais la réciproque n'est pas vraie.

1.3. Structure de $\mathbb{F}_q$. — (Gozard) Théorème de la base télescopique, degrés des extensions. Sous-corps de $\mathbb{F}_{p^n}$, exemple du treillis d'extension de $\mathbb{F}_{2^{12}}$. Définition du Frobenius, c'est un morphisme de corps, c'est l'identité sur $\mathbb{F}_p$, groupe des automorphismes de $\mathbb{F}_{p^n}$ (ou Francinou-Gianella).

2. Carrés dans $\mathbb{F}_q$. —

2.1. Généralités. — (Perrin) Définition de $\mathbb{F}_q^2$, $\mathbb{F}_q^{*2}$, $\mathbb{F}_q^2 = \mathbb{F}_q$ pour $p = 2$, cardinalité sinon, caractérisation des carrés, corollaire sur -1, cor : il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k+1$.

2.2. Formes quadratiques sur les corps finis. — (Caldero-Germoni) Définition d'une forme quadratique, définition du rang et du discriminant réduit. Classification des formes non dégénérées, ainsi, deux formes quadratiques sont équivalentes ssi elles ont même rang et même discriminant réduit, remarque sur l'utilisation dans la loi de réciprocité quadratique.

2.3. Symbole de Legendre. — (Gozard) Définition du symbole de Legendre, formule générale, pour -1, multiplicativité, **dev** loi de réciprocité quadratique, $(\frac{2}{p}) = (-1)^{(p^2-1)/8}$, exemple de $(\frac{23}{59})$, $x^2 + 59y = 23$ n'a pas de solutions. (Gourdon) 5 est un carré dans $\mathbb{F}_p$ ssi $p \equiv \pm 1 \mod 10$, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $10n - 1$.

3. Polynômes dans $\mathbb{F}_q$. —

3.1. Clôture algébrique. — (Gozard) $\mathbb{F}_{p^n}$ n'est pas algébriquement clos car $X^{p^n} - X + 1$ n'a pas de racines, clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$, c'est celle de $\mathbb{F}_{p^n}$.

3.2. Polynômes irréductibles. — (Gozard) On a $\mathbb{F}_{p^n} \cong \mathbb{F}_p[X]/(\pi)$ π irréductible de degré n, ainsi il existe des polynômes irréductibles de tout degré sur $\mathbb{F}_p$. **dev** cardinal des polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$. (Beck-Malick-Peyré) Algorithme de Berlekamp et cas des facteurs multiples.

3.3. Critères d'irréductibilité. — (Perrin) critère de réduction modulo p, P est irréductible sur k de degré n ssi P n'a pas de racines dans les extensions de degré $\leq n/2$, ex de $X^4 + 1$, si P est irréductible sur k de degré n alors il est irréductible dans toutes les extensions de degré $m \wedge n = 1$, exemple.

3.4. Polynômes cyclotomiques. — (Perrin) définition des polynômes cyclotomiques sur un corps finis (dans sa clôture algébrique), on peut étudier seulement ceux dans les $\mathbb{F}_p$, $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$, $\Phi_{n,\mathbb{F}_p} = \pi(\Phi_n)$. (Demazure) si $q \wedge n = 1$, les facteurs irréductibles de Φ_n sur $\mathbb{F}_p$ sont tous de degré l'ordre multiplicatif de q dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, en particulier puisque $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ n'est en général pas cyclique, Φ_n n'est en général pas irréductible sur $\mathbb{F}_q$.

4. Application des corps finis. —

4.1. Groupe linéaire d'un corps fini. — (Perrin) Cardinal du groupe linéaire d'un corps fini, existence d'un p-Sylow et théorèmes de Sylow.

4.2. Codes correcteurs. — (Demazure) Définition d'un code correcteur linéaire, du poids, de la distance de Hamming, principe du maximum de vraisemblance, théorème de la borne du singleton, matrice génératrice, matrice de contrôle, décodage par syndrome. Codes de Hamming, exemple du code de Hamming $k = 3$. Définition des codes cycliques, représentation polynômiale d'un code, polynôme générateur d'un code cyclique. Diviseurs de $X^n - 1$.

Leçon 125 - Extensions de corps. Exemples et applications.

Références : Gozard, Perrin, *secondaire :* Demazure, Duverney, Szpirglas, Jeanneret-Lines.

Développements : théorème d'Artin, polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$.

Cadre : soit K, L des corps.

1. Notion d'extension de corps. —

1.1. Extensions de corps et degré. — (Gozard) Définition d'une extension de corps L/K, exemple de $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, définition du sous-corps premier et de la caractéristique, c'est 0 ou p, donc le sous-corps premier est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$, ainsi tout corps est extension de $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_p$, exemple de $\mathbb{R}$. Degré $[L : K]$ d'une extension, extension finie, théorème de la base télescopique, exemple de $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$, $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = +\infty$. Corps intermédiaire, corps engendré par K et une partie de L, extension de type finie, monogène, exemple de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, contre-exemple de $\mathbb{F}_p(X)$ sur le fait qu'elle soit finie.

1.2. Extensions algébriques. — (Perrin) Définition d'un élément transcendant, algébrique, de son polynôme minimal, exemple de i, $\sqrt{2}$ et polynômes minimaux, exemples de e et π. (Szpirglas) Utilisation du résultant pour calculer le polynôme minimal de $\alpha\beta$ et $\alpha + \beta$, exemples. (Perrin) L'élément α est algébrique ssi $K(\alpha) = K[\alpha]$ ssi $[K(\alpha) : K] < +\infty$. L'ensemble des éléments algébriques de L/K est un corps intermédiaire. (Gozard) Définition d'un corps quadratique, description, remarque sur l'utilisation en arithmétique (Duverney). Notion d'extension algébrique, exemple de $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, équivalence entre L/K algébrique de type fini et L/K de degré fini, contre exemple sans l'hypothèse de type fini.

1.3. Corps cyclotomiques. — (Gozard) Définition d'un corps cyclotomique, des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$, factorisation de $X^n - 1$, ils sont dans $\mathbb{Z}[X]$, irréductibilité, conséquence sur le degré de l'extension.

2. Adjonction de racines. —

2.1. Corps de rupture. — (Gozard) Définition du corps de rupture d'un polynôme irréductible, existence (et forme) et unicité, degré, exemple de $\mathbb{C}$ corps de rupture de $X^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$, exemple de $\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$, $P \in k[X]$ de degré n est irréductible ssi P n'a pas de racine dans toute extension L de degré $[L : K] \leq n/2$, app (Perrin) $X^4 + X + 1$ irréductible sur $\mathbb{F}_2$, si P est irréductible dans K de degré n, alors P est irréductible dans tout extension de K de degré m premier à n.

2.2. Corps de décomposition. — (Gozard) Définition d'un corps de décomposition d'un polynôme, existence et unicité, exemple de $\mathbb{R}[j]$ corps de décomposition de $X^3 - 1$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ corps de décomposition de $X^2 + 2$ sur $\mathbb{Q}$.

2.3. Corps finis. — (Gozard) Tout corps fini est de cardinal la puissance d'un nombre premier, existence et unicité d'un corps de cardinal p^n, théorème de l'élément primitif pour les corps finis, écriture de $\mathbb{F}_q$ comme corps de rupture d'un polynôme irréductible sur $\mathbb{F}_p$, existence de polynômes irréductibles de tout degré sur $\mathbb{F}_p$, **dev** polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$. Sous corps d'un corps fini. Définition des polynômes cyclotomiques sur un corps quelconque, ils sont obtenus par projection du polynôme cyclotomique sur $\mathbb{Q}$, à coefficients dans le sous-corps premier. (Demazure) Décomposition des polynômes cyclotomiques sur un corps fini.

2.4. Clôture algébrique. — (Gozard) Définition d'un corps algébriquement clos, exemple de $\mathbb{C}$, contre-exemple de $\mathbb{R}$, un corps algébriquement clos est infini, description des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$, définition de la clôture algébrique d'un corps, existence et unicité de la clôture algébrique d'un corps, exemple de la clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$.

3. Morphismes d'extensions de corps. —

(Gozard) Groupe de Galois d'une extension L/K, exemples du groupe de Galois de K/K_0 où K_0 est le sous-corps premier de K, d'une extension quadratique, d'une extension monogène, d'une extension cyclotomique, d'une extension de corps finis. Définition de la correspondance de Galois. (Jeanneret-Lines) **dev** Théorème d'Artin.

Leçon 126 - Exemples d'équations diophantiennes.

Références : Duverney, Combes, *secondaires :* Cohen, De Koninck-Mercier, Beck-Malick-Peyré.

Développements : théorème des deux carrés, théorème de Sophie Germain.

Introduction : la question de la résolution de ces équations est très anciennes, elles doivent leurs nom à Diophante d'Alexandrie, mathématicien grec auteur d'*Arithmétique*. On peut citer l'exemple des équations de Fermat, dont la résolution complète a demandé plus de 300 ans.

Cadre : on cherche à trouver les solutions entières des équations du type $P(x_1, \ldots, x_r) = 0$ où $P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_r]$. Équation de Fermat : $x^n + y^n = z^n$.

1. Équations diophantiennes linéaires. —

1.1. Équations linéaire à une et deux variables. — (Combes) $ax = b$ admet une solution ssi $a \mid b$ et solution, $ax + by = c$ admet une solution ssi $d = a \wedge b \mid c$ et les solutions sont les $(x_0 + bk/d, y_0 - ak/d)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ où (x_0, y_0) est une solution particulière, et on peut trouver une solution particulière par l'algorithme d'Euclide. Exemples de $15x + 9y = 6$ de solutions $(4 + 3k, -2 - 5k)$ et $15x + 9y = 5$ n'admet pas de solutions.

1.2. Systèmes d'équations diophantiennes. — (Beck-Malick-Peyré) Forme normale de Smith, algorithme de calcul, résolution à partir de la forme normale de Smith, exemple (sans référence).

1.3. Systèmes de congruence. — (Cohen) Théorème des restes chinois, algorithme de calcul, exemple (Combes).

2. Quelques méthodes de résolution. —

2.1. Réduction modulo p. — Principe : on réduit le polynôme P modulo un premier q bien choisi et on étudie l'équation dans $\mathbb{F}_q$. Si elle n'a pas de solution l'équation dans $\mathbb{Z}$ n'a pas de solution, sinon on essaye de déduire les solutions dans $\mathbb{Z}$. (De Koninck-Mercier) Exemples : $x^3 + 5 = 117y^3$, $x^2 + y^2 = 4z + 7$, $x^3 + y^3 + z^3 = 4$, $x^2 + y^2 = 8z + 7$ n'ont pas de solutions. (FGN Algèbre 1) **dev** Théorème de Sophie Germain. (Duverney) Définition du symbole de Legendre, multiplicativité, loi de réciprocité quadratique, exemple, application à la résolution de $x^2 + 7x = 2[31]$ et $2x^2 + 7x = 1[37]$. (Sans référence) De manière générale, cela permet de déterminer lorsqu'une équation du type $x^2 + py = a$ n'a pas de solution.

2.2. Paramétrisation rationnelle d'une courbe. — (Combes) Principe de la méthode, paramétrisation rationnelle du cercle et application à l'équation de Fermat pour $n = 2$ $x^2+y^2 = z^2$, paramétrisation rationnelle du folium de Descartes et application à l'équation $x^3 + y^3 = xyz$.

2.3. Descente infinie. — (Combes) Principe de la méthode, exemple de $x^4 + y^4 = z^4$, $x^4 + y^4 = z^2$ et $x^2 + y^2 = pz^2$ où $p \equiv 3[4]$ qui n'ont pas de solutions non triviales.

3. Représentation par des formes quadratiques. —

(Duverney) Définition de n est représenté (proprement) par une forme quadratique définie positive, définition de l'équivalence de formes quadratiques définies positives, deux formes quadratiques équivalentes ont même discriminant et représentent (proprement) les mêmes nombres. Forme réduite, existence et unicité d'un forme réduite équivalente à une forme quadratique définie positive, algorithme de réduction. Il n'existe qu'un nombre fini de forme quadratiques réduites de discriminant $D < 0$ donné, caractérisation de ce nombre. Condition pour qu'un entier soit représenté proprement par une forme quadratique de discriminant D.

4. Anneaux des entiers d'un corps quadratique. —

4.1. Définition et premières propriétés. — (Duverney) Définition d'un corps quadratique, définition de la norme, multiplicativité, définition de l'anneau des entiers, forme en fonction de d, caractérisation des unités de cet anneau, étude dans le cas $d > 0$ et résolution de l'équation de Pell $x^2 - dy^2 = 1$.

4.2. Anneau des entiers de Gauss et anneau $\mathbb{Z}[j]$. — (Duverney) Inversibles de l'anneau des entiers de Gauss, **dev** Théorème des deux carrés, remarque sur le théorème des quatre quarrés. Inversibles de $\mathbb{Z}[j]$, équation de Mordell pour $k = -1$, équation de Fermat pour $n = 3$

5. Annexe. —

Algorithme de calcul de la forme normale de Smith, de calcul des restes chinois, de réduction d'une forme quadratique.

Leçon 141 - Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Références : Perrin, Gozard, FG, Beck-Malick-Peyré.

Développements : irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$, algorithme de Berlekamp, *polynômes irréductibles sur* $\mathbb{F}_q$.

Introduction : les polynômes irréductibles sont fortement liés aux éléments algébriques et à l'adjonction de racines. Les corps de rupture et de décomposition ont de nombreuses applications, notamment la construction des corps finis.

Cadre : soit K un corps et A un anneau intègre.

1. Irréductibilité. —

1.1. Définition et premières propriétés. — (Perrin) Définition d'un polynôme irréductible. (Gozard) Tout polynôme irréductible n'a pas de racine, réciproque partielle, c-ex, les polynômes de degré 1 sont irréductibles. (Perrin) Si A est factoriel, définition du contenu $c(P)$ de $P \in A[X]$, multiplicativité de contenu, irréductibles de $A[X]$, si A est factoriel, $A[X]$ est factoriel. Exemple et c-ex.

1.2. Critères d'irréductibilité. — (Perrin) Critère d'Eisenstein, application à $X^{p-1} + \cdots + 1$ pour p premier et $X^n - a$ avec a possédant au moins un facteur premier simple. Critère de réduction abstrait, remarque avec modulo p, application à $X^p - X - 1$ pour p premier et $X^3 + 628X^2 + 327X + 1981$.

1.3. Éléments algébriques et polynômes minimaux. — (Perrin) Extension de corps, théorème de la base télescopique. Définition d'un élément transcendant, algébrique, du polynôme minimal d'un élément algébrique. Exemple de e et π (admis) sur $\mathbb{Q}$, de $\sqrt{2}$ et i sur $\mathbb{Q}$, et de leurs polynômes minimaux. α est algébrique ssi $K[\alpha] = K(\alpha)$ ssi $\dim_K K[\alpha] < +\infty$ et dans ce cas $[K(\alpha) : K] = \deg \pi_\alpha$.

2. Adjonction de racines. —

2.1. Corps de rupture. — (Perrin) Définition d'un corps de rupture, existence, forme, unicité à K-isomorphisme près. Exemple de $\mathbb{C}$ corps de rupture de $X^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$, construction d'un corps à 4 éléments, cor 1 : $P \in K[X]$ de degré n irréductible ssi P n'a pas de racine dans toute extension L de degré $[L : K] \leq n/2$. $X^4 + X + 1$ irréductible sur $\mathbb{F}_2$, et $X^4 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$ et réductible dans $\mathbb{F}_p$ pour tout p. Si P est irréductible dans K de degré n, alors P est irréductible dans tout extension de K de degré m premier à n. Exemple et c-ex.

2.2. Corps de décomposition. — (Perrin) Définition, existence, unicité. Exemple de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$ corps de décomposition sur $\mathbb{Q}$ de $X^3 - 2$, app : construction d'un corps à p^r éléments comme le corps de décomposition sur $\mathbb{F}_p$ de $X^{p^r} - X$, remarque que si P est irréductible de degré r sur $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{F}_{p^r} \cong \mathbb{F}_p[X]/(P)$.

2.3. Clôture algébrique. — (Gozard) Définition proposition d'un corps algébriquement clos, exemple de $\mathbb{C}$, contre-ex de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, définition de la clôture algébrique, existence et unicité (admis), exemple de $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{C} = \overline{\mathbb{R}}$, clôture algébrique de $\mathbb{F}_{p^r}$.

3. Familles particulières de polynômes irréductibles. —

3.1. Polynômes irréductibles sur un corps fini. — (Gozard) Pour tout p, n, $\mathbb{F}_{p^n} \cong \mathbb{F}_p[X]/(\pi)$ avec π irréductible de degré n. Cor : pour tout p, n il existe un polynôme irréductible de degré n sur $\mathbb{F}_p$, et un tel polynôme divise $X^{p^n} - X$ dans $\mathbb{F}_p[X]$ et est donc scindé dans $\mathbb{F}_{p^n}$ qui est donc en plus d'être son corps de rupture son corps de décomposition. **dev** Facteurs irréductibles de $X^{p^n} - X$ sur $\mathbb{F}_p$, cardinal de l'ensemble des polynômes irréductibles de degré n sur $\mathbb{F}_p$, équivalent. (Beck-Malick-Peyré) **dev** Algorithme de Berlekamp, remarque sur le cas d'un facteur multiple.

3.2. Polynômes cyclotomiques. — (Perrin) Pour $n \wedge \mathrm{car}(K) = 1$, définition de $\Phi_{n,K}$ Remarque que l'on peut supposer $K = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_p$. On a $\Phi_{n,K}$ unitaire, $\deg \Phi_n = \varphi(n)$, $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$, liste des premiers polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$, $\Phi_{n,K}(X) = \sigma(\Phi_{n,\mathbb{Q}}(X))$ où $\sigma : \mathbb{Z} \to K$. **dev** sur $\mathbb{Q}$, Φ_n est à coefficients entiers, irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ donc dans $\mathbb{Q}[X]$. Ainsi, le polynôme minimal de ζ une racine n-ième de l'unité sur $\mathbb{Q}$ est Φ_n, donc $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$, si $m \wedge n = 1$ et α, β racines n, m-ièmes de l'unité, $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}$. (Demazure) si $q \wedge n = 1$, les facteurs irréductibles de Φ_n sur $\mathbb{F}_p$ sont tous de degré l'ordre multiplicatif de q dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, critère d'irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur les corps finis.

Leçon 142 - PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

Références : Calais (Th. des anneaux), Cohen, Perrin, Demazure, Beck-Malick-Peyré, Combes, Szpirglas, Duverney.

Développements : algorithme de Berlekamp, théorème de Sophie Germain.

Cadre : Soit A un anneau intègre, $\mathbb{K}$ un corps. Tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires.

1. Cadre théorique : anneaux factoriels et principaux. —

1.1. Définition et premières propriétés, cadre des anneaux principaux. — (Calais (Th. des anneaux)) Définition du pgcd, du ppcm, unicité à un inversible près, exemples, relation entre pgcd et ppcm, caractérisations du pgcd et ppcm en termes d'idéaux, c-ex de $(X)+(Y)=(X,Y)\neq(1)$ dans $\mathbb{K}[X,Y]$, anneaux à pgcd, éléments premiers entre eux, théorème de Gauss. Existence et caractérisation dans un anneau principal, théorème de Bézout, exemples.

1.2. Existence dans les anneaux factoriels. — (Calais (Th. des anneaux)) Principal $\Rightarrow$ factoriel, existence et forme du pgcd et du ppcm dans un anneau factoriel. (ou Perrin) Définition du contenu de $f\in A[X]$, multiplicativité du contenu, théorème de Gauss et description des irréductibles.

2. Anneaux euclidiens : algorithmes de calcul. —

2.1. Conséquences de la division euclidienne. — (Calais (Th. des anneaux)) Euclidien $\Rightarrow$ principal, exemple de $\mathbb{Z},\mathbb{Z}[i]$ et $A[X]$ euclidien ssi A est un corps. Algorithme d'Euclide, exemple de $\mathrm{pgcd}(4+7i,8-i)=1-2i$. (Cohen) Complexité de l'algorithme d'Euclide, algorithme binaire, algorithme d'Euclide étendu, remarque sur le binaire étendu, remarque sur l'inversion modulo n, dans un corps fini. Théorème Chinois, algorithme effectif.

2.2. Anneaux de polynôme. — (Cohen) Algorithme d'Euclide sur $A[X]$, A euclidien. (Beck-Malick-Peyré) Réduction sans carré sur $\mathbb{F}_p[X]$, **dev** algorithme de Berlekamp.

3. Applications du PGCD. —

3.1. Résultant. — (Szpirglas) Définition du résultant de deux polynômes sur un anneau factoriel, le résultant est nul ssi ils ont un facteur commun. Application à l'élimination. (Cohen) Algorithme de calcul.

3.2. Matrices sur un anneau. — (Cohen) Forme normale de Hermite, algorithme de calcul, application à la détermination d'une base de l'image d'une matrice, du noyau, algorithme. (Beck-Malick-Peyré) Forme normale de smith, algorithme de calcul, application au théorème de la base adaptée, invariants de similitudes, réduction de Frobenius.

3.3. Équations diophantiennes. — (Combes) $ax+by=c$ admet une solution ssi $d=a\wedge b\mid c$ et les solutions sont les $(x_0+bk/d, y_0-ak/d)$ pour $k\in\mathbb{Z}$ où (x_0,y_0) est une solution particulière, et on peut trouver une solution particulière par l'algorithme d'Euclide. Exemples de $15x+9y=6$ de solutions $(4+3k,-2-5k)$ et $15x+9y=5$ n'admet pas de solutions. Application de la forme normale de Hermite à la résolution d'un système d'équation diophantiennes. **dev** Théorème de Sophie Germain. (Duverney) Équation de Fermat pour $n=3$.

4. Annexe. —

Algorithme d'Euclide, binaire, d'Euclide étendu, théorème chinois effectif, d'Euclide sur $A[X]$, de calcul du résultant, forme normale de Hermite, du calcul du noyau d'une matrice, forme normale de Smith.

Leçon 144 - Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

Références : Ramis-Deschamps-Odoux Tome 1, Gozard, Amar-Matheron, Mérindol, Szpirglas, Beck-Malick-Peyré, *secondaires :* FGN Algèbre 1 et 2.

Développements : borne de Bézout, irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$.

Introduction : la recherche des racines d'un polynôme apparait notamment en réduction, indiquer le lien entre les deux notions. Concept important : adjonction de racines.

Cadre : soit k un corps, A un anneau, et P un élément de $k[X]$.

1. Racines d'un polynôme, adjonction de racines. —

1.1. Définition et premières propriétés. — (Ramis-Deschamps-Odoux tome 1) Définition de a racine de P : $X - a \mid P$, exemple de i et $X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}$, équivalence avec $P(a) = 0$, définition équivalence sur les racines multiples, caractérisation avec les dérivées en caractéristique nulle, contre exemple de $(X + 1)^p$ dans $\mathbb{F}_p[X]$, dans un corps P a moins de racines que son degré, contre-exemple de X^3-3X+2 dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}[X]$ qui a quatre racines. (Gozard) Définition d'un polynôme irréductible, les polynômes de degré 1 le sont, un polynôme de degré > 1 irréductible n'a pas de racines, contre-exemple de $(X^2 + 1)^2$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

1.2. Éléments algébriques et polynômes minimaux. — (Perrin) Définition d'un élément transcendant, algébrique, du polynôme minimal d'un élément algébrique. Exemple de e et π (admis) sur $\mathbb{Q}$, de $\sqrt{2}$ et i sur $\mathbb{Q}$, et de leurs polynômes minimaux. α est algébrique ssi $K[\alpha] = K(\alpha)$ ssi $\dim_K K[\alpha] < +\infty$ et dans ce cas $[K(\alpha) : K] = \deg \pi_\alpha$. **dev** irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$.

1.3. Corps de rupture, corps de décomposition. — (Gozard) Définition d'un corps de rupture d'un polynôme irréductible, existence (et forme) et unicité, exemple de $\mathbb{F}_4$ corps de rupture de $X^2 + X + 1$ sur $\mathbb{F}_2$, Définition d'un corps de décomposition d'un polynôme, existence et unicité, exemple de $\mathbb{R}[j]$ corps de décomposition de $X^3 - 1$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ corps de décomposition de $X^2 - 2$ sur $\mathbb{Q}$. Existence et unicité d'un corps de cardinal p^n.

1.4. Clôture algébrique. — (Gozard) Définition d'un corps algébriquement clos, exemple de $\mathbb{C}$, contre-exemple de $\mathbb{R}$, un corps algébriquement clos est infini, description des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$, définition de la clôture algébrique d'un corps, existence et unicité de la clôture algébrique d'un corps, exemple de la clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$.

2. Polynômes symétriques. —

(Ramis-Deschamps-Odoux tome 1) Définition de l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $A[X_1, \dots, X_n]$, $P \mapsto \sigma(P)$ est un automorphisme d'algèbre, définition des polynômes symétriques, structure de A-algèbre, exemple de $X^2+3XY+Y^2+1$, définition des polynômes symétriques élémentaires, exemple pour $n = 3$. Relations coefficients-racines. Théorème de structure des polynômes symétriques, exemple de $X^2+3XY+Y^2+1$, remarque sur l'algorithme de détermination de Q. (FGN Algèbre 1) Théorème de Kronecker.

3. Dénombrement des racines. —

(Amar-Matheron) Théorème de Rouché, application : si $|P(z)| < 1$ lorsque $|z| = 1$, alors $P(z) - z^n$ a exactement n zéros comptés avec multiplicité dans $D(0, 1)$, autres exemples.

4. Résultant. —

4.1. Définition et lien avec les racines. — (Szpirglas) Définition du résultant comme déterminant de l'application de Sylvester, forme explicite, les résultant est nul ssi les deux polynômes ont un facteur commun, remarque sur le cas des corps algébriquement clos, expression en fonctions des racines dans le cas de polynômes scindés. Définition du discriminant, expression en fonction des racines, le discriminant est nul ssi le polynôme a un facteur multiple, cas scindé. (Beck-Malick-Peyré) Application pour montrer que les matrices diagonalisable à racines simples sont denses dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

4.2. Applications à la géométrie. — (Mérindol) Définition d'une courbe affine plane, **dev** théorème de la borne de Bézout. Détermination de l'équation d'une courbe paramétrée. (Szpirglas) Théorie de l'élimination.

5. Réduction et applications à la localisation des racines. —

(Beck-Malick-Peyré) Les valeurs propres d'un endomorphisme sont les racines de son polynôme caractéristique, équivalences pour la diagonalisation, équivalences pour la trigonalisation, remarque sur les corps algébriquement clos, définition de la matrice compagnon de P, remarquer que son polynôme caractéristique est P, remarque sur le lien réduction - recherche de racines. (FGN Algèbre 2) Lemme de Hadamard, disques de Gershgörin, remarque sur l'application à la localisation de racines.

Leçon 150 - Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Références : Caldero-Germoni, Beck-Malick-Peyré, Gourdon, *secondaires :* Perrin, Arnaudiès-Fraysse, Ciarlet, FGN Algèbre 2, Mneimné-Testard.

Développements : invariants de similitude, étude de $O(p,q)$.

Introduction : (cf avant propos de H2G2). De nombreux concepts d'algèbre linéaire et bilinéaire se traduisent en terme d'actions de groupes sur des espaces de matrices : systèmes linéaire équivalents, changements de base(s), équivalence de formes bilinéaires ou de formes quadratiques, d'où l'intérêt de les étudier. Le but peut-être de se ramener à une forme plus simple tout en conservant l'essence pour résoudre des problèmes : esprit de la réduction des systèmes linéaires, des endomorphismes et des formes quadratiques. On cherche souvent à ce que cette forme simple soit caractéristique de l'orbite. Parler de l'ouverture sur la forme normale de Smith.

Cadre : Soit K un corps et soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Action par translation. —

(Caldero-Germoni) Définition de l'action par translation à gauche, à droite, définition d'être échelonnée réduite en ligne, en colonne, caractérisation d'être dans la même orbite par l'image, le noyau, et les matrices échelonnées réduites. (Beck-Malick-Peyré) Définition des opérations de transvections, dilatations, et de transpositions et matrices correspondantes, générateurs de $\mathrm{SL}_n(K)$ et $\mathrm{GL}_n(K)$ (preuve par opérations élémentaires : Arnaudiès-Fraysse). (Ciarlet) Algorithme du Pivot de Gauss, complexité.

2. Action par équivalence. —

2.1. Orbites et rang. — (Beck-Malick-Peyré) Définition de l'action par équivalence, interprétation en termes de bases, théorème du rang. Les matrices J_r sont des représentants des classes de similitude, corollaire : $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, {}^tA$. Le rang est invariant par extension du corps de base, ainsi, deux matrices équivalentes sur K le sont sur $k \subset K$.

2.2. Topologie des orbites. — Ici $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (Caldero-Germoni) Adhérence des orbites, remarquer qu'on retrouve que $\mathrm{GL}_n(K)$ est un ouvert dense, intérieur des orbites, semi-continuité inférieure du rang. (Mneimné-Testard) Connexité des orbites.

3. Action par conjugaison. —

3.1. Généralités. — (Gourdon) Définition de l'action par conjugaison et des classes de similitude, interprétation par changement de base, définition de diagonalisable et trigonalisable en termes de cette action. Le déterminant, le rang, le polynôme caractéristique sont des invariants par cette action.

3.2. Classification des orbites. — (Caldero-Germoni) Les classes de similitude des matrices diagonalisables sont caractérisées par le polynôme caractéristique (c'est-à-dire le spectre, compté avec multiplicité), contre-exemple pour le polynôme minimal. Pour $K = \mathbb{C}$, A est diagonalisable ssi sa classe de similitude est fermée. Noyaux itérés, diagramme de Young d'une matrice nilpotente, N est semblable à une forme réduite de Jordan dont la taille des blocs est donnée par le diagramme de Young, classification des orbites d'une matrice nilpotente. Forme réduite de Jordan et caractérisation des classes de similitude des endomorphismes trigonalisables. (FGN Algèbre 2) N est nilpotente ssi 0 est dans l'adhérence de sa classe de similitude. (Gourdon) Définition du polynôme minimal en x π_x, sous-espace cyclique E_x associé, existence de x tel que $\pi_x = \pi_u$, **dev** théorème de décomposition de Frobenius, version matricielle, corollaire : deux endomorphismes sont semblables ssi ils ont les même invariants de similitude.

3.3. Action de $O_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$. — (Gourdon) Définition de l'action obtenue par restriction, définition d'une matrice normale, réduction sur E hermitien des endomorphismes normaux, cas réel, version pour les endomorphismes unitaires, hermitiens, anti-hermitien. (Caldero-Germoni) Application : connexité de $SO_n(\mathbb{R})$, simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$. Décomposition polaire.

4. Action par congruence. —

4.1. Définition et classification des orbites. — (Caldero-Germoni) Définition de l'action par congruence, remarquer que cela revient à l'équivalence de forme bilinéaires ou de formes quadratiques. Classification des orbites sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$, interprétation en terme de forme quadratique, méthode de Gauss, application à la classification des coniques (Grifone), classification sur les corps finis. Loi de réciprocité quadratique.

4.2. Étude de quelques stabilisateurs. — (Perrin) Définition de $O_n(\mathbb{R})$, générateurs. **dev** Étude de $O(p,q)$.

Remarques : on peut dénombrer les matrices de rang r dans un corps finis, cf H2G2. On peut ouvrir sur la forme normale de Smith dans la partie action par équivalence. Dans la partie action par conjugaison, on peut aussi faire le plan : 1) sur les matrices diagonalisables, 2) sur les matrices nilpotentes et trigonalisables, 3) réduction de Frobenius, 4) réduction des endomorphismes normaux, en coupant où il faut.

Leçon 151 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Références : Grifone, Gourdon, Papini-Wolfmann, Perrin, *secondaires :* Beck-Malick-Peyré, Mneimné-Testard.

Développements : théorème d'Artin, invariants de similitude.

Introduction : la dimension est une notion fondamentale en algèbre linéaire, reliée au concept de base, qui marche très bien avec des corps (cf modules), ça sert tout le temps. Résultat fondamental : théorème de la base incomplète et toutes les bases ont même cardinal. Théorème du rang et le fait que ce soit un représentant des classes d'équivalences. Les deux applications utilisent la dimension. Citer trois théorèmes qui l'utilisent : extrema liés, invariants de similitude et d'Artin.

Cadre : soit K un corps et E un K-espace vectoriel.

1. Théorie de la dimension. —

1.1. Familles libres, familles génératrices, bases. — (Grifone) Définition d'une famille génératrice, libre, exemples, contre-exemples, proposition sur les sur/sous familles, définition d'être de dimension finie (à partir de maintenant, les espaces sont supposés de dimension finie), contre-exemple de $K[X]$, définition d'une base, exemple, caractérisation avec la décomposition unique de tout vecteur dans cette base, bijection avec K^n, théorème de la base incomplète.

1.2. Dimension d'un espace vectoriel. — (Grifone) Dans un e.v. engendré par n éléments, tout famille de plus de n éléments est liée, ainsi toutes les bases ont le même cardinal, définition de la dimension, exemple de K^n, $\mathcal{M}_n(K)$, de $K_n[X]$, de l'espace des solutions de $y'' + ay' + by = 0$, dimension d'un produit, toute famille libre (resp. liée) à $n = \dim E$ éléments est une base.

1.3. Sous-espaces vectoriels et dimension. — (Grifone) Si F est un s.e.v. de E, $\dim F \leq \dim E$ et $\dim F = \dim E$ ssi $F = E$, bases d'une somme directe, existence d'un supplémentaire, caractérisation avec $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2$, $\dim E + F = \dim E + \dim F - \dim E \cap F$, cas d'une somme directe de r s.e.v.. Application à la caractérisation de la diagonalisabilité.

2. Applications linéaires, dimension et rang. —

2.1. Applications linéaires et dimension. — (Grifone) L'image d'une famille libre (resp. une famille génératrice, une base) par une application linéaire injective (resp. surjective, bijective) est une famille libre (resp. une famille génératrice, une base), deux espaces vectoriels sont isomorphes ssi ils sont de même dimension.

2.2. Rang, théorème du rang. — (Grifone) Définition du rang d'une application linéaire, si g surjective et h injective, $\mathrm{rg}(f \circ g) = \mathrm{rg}(h \circ f) = \mathrm{rg}(f)$, théorème du rang, corollaire : si les dimensions de départ et d'arrivée sont égales, f est injective ssi elle est surjective ssi elle est bijective, contre exemple de $P \mapsto P'$ dans $K[X]$, application du théorème du rang à $E = \ker p \oplus \mathrm{Im}\, p$ pour un projecteur p. Définition du rang d'une famille de vecteur, d'une matrice, le rang de f est le rang de sa matrice dans une base quelconque.

2.3. Rang et action de groupes. — (Grifone) Le rang est invariant par opérations sur les lignes et les colonnes, méthode du pivot de Gauss en $O(n^3)$. (Gourdon) A est de rang r ssi elle est semblable à J_r, deux matrices sont donc équivalentes ssi elles ont le même rang, le rang est la taille de la plus grande matrice extraite inversible de A, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$. Théorème des extréma liés. (Beck-Malick-Peyré) Le rang est invariant par extension du corps de base, ainsi, deux matrices équivalentes sur K le sont sur $k \subset K$ et les polynômes minimaux sur K et sur k sont égaux. (Mneimné-Testard) Si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'ensemble des matrices de rang r est connexe.

3. Dualité et dimension. —

3.1. Dualité. — (Gourdon) Base duale, dimension du dual, matrice de changement de bases duales en fonction de la matrice de changement de bases. Isomorphisme canonique $E \cong E^{**}$, base antéduale, matrice de changement de bases antéduales en fonction de la matrice de changement de bases duales. Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan, exemple de la trace.

3.2. Orthogonalité. — (Gourdon) Orthogonal d'une partie A de E, d'une partie B de E^*, renversement des inclusions, relations entre les dimensions. Définition de la transposée, égalité du rang. **dev** Invariants de similitude et réduction de Frobenius.

4. Applications. —

4.1. Extensions de corps et dimension. — (Perrin) Définition du degré d'une extension finie de corps, exemple de $[\mathbb{C} : \mathbb{R}]$, application pour montrer qu'un corps finis est de cardinal la puissance d'un nombre premier, théorème de la base télescopique. **dev** Théorème d'Artin. Définition d'un élément algébrique, de son polynôme minimal, et de $K(\alpha)$. α est algébrique sur K ssi $[K(\alpha) : K] < +\infty$ et alors $[K(\alpha) : K] = \deg \pi_\alpha$.

4.2. Codes correcteurs linéaires. — Ici K est un corps fini. (Papini-Wolfmann) Définition d'un code correcteur $[n, k]$, poids d'un mot, distance de Hamming, matrice génératrice d'un code, caractérisation avec le rang, forme normalisée, existence et unicité, théorème de la borne de singleton, exemple des codes de Hamming.

Leçon 152 - Déterminant. Exemple et applications.

Références : Gourdon, Grifone, Mérindol, Szpirglas, *secondaires :* Rouvière, Briane-Pagès, Beck-Malick-Peyré.

Développements : ellipsoïde de John-Loewner, théorème de Bézout faible.

Introduction : le déterminant apparait très souvent en algèbre linéaire. La CNS d'inversibilité avec le déterminant est très pratique et donc souvent utilisée. Le déterminant trouve de nombreuses application, notamment en réduction, où il est au cœur de la méthode pratique de réduction.

Cadre : K un corps et E un K-espace vectoriel.

1. Définition du déterminant. —

1.1. Formes n-linéaires alternées. — (Gourdon) Définition d'une forme k-linéaire *alternée*, l'ensemble des formes n-linéaires alternées est un espace vectoriel de dimension 1 et il existe une unique forme n-linéaire alternée qui vaut 1 sur un base donnée de E, c'est le déterminant. Forme explicite avec les permutations, formule de changement de bases, une famille de vecteur est liée ssi le déterminant de cette famille dans une certaine base est nul ssi le déterminant de cette famille dans toute base est nul. Dire qu'on peut le définir de la même manière sur un module libre de type fini, et adapter les résultats de la suite.

1.2. Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice. — (Gourdon) Si $f \in \mathrm{End}(E)$, le déterminant de $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ ne dépend pas de la base $(e_i)_i$ choisie, c'est le déterminant de f. Le déterminant d'une matrice est le déterminant de l'endomorphisme induit. Exemple du déterminant de l'identité, $\det f \circ g = \det f \det g$ et $\det MN = \det M \det N$, $\det {}^tM = \det M$, f est inversible ssi $\det f \in K^*$, on a ainsi un morphisme surjectif $\det : \mathrm{GL}(E) \to K^*$ dont le noyau est noté $\mathrm{SL}(E)$, décomposition $\mathrm{GL}(E) = \mathrm{SL}(E) \rtimes K^*$.

1.3. Interprétation géométrique. — (Grifone) Volume d'un parallélépipède en fonction du déterminant. Définition de l'orientation d'une base. (Gourdon) Inégalité de Hadamard. Matrice et déterminant de Gram, distance à un sous-espace vectoriel.

2. Méthodes de calcul du déterminant. —

2.1. Mineurs, cofacteurs et comatrice. — (Gourdon) Définition des mineurs, des cofacteurs, des mineurs principaux, de la comatrice. Le rang de M est le plus grand r tel qu'il existe un mineur de taille r non nul. Développement par rapport à une ligne, une colonne, le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des valeurs diagonales, formule $M\,{}^t\mathrm{Com}(M) = {}^t\mathrm{Com}(M)M = \det(M)I$. Si f inversible formule de l'inverse, forme explicite pour les matrices 2×2.

2.2. Pivot de Gauss et quelques déterminants particuliers. — (Gourdon) Le déterminant est inchangé par ajout à une colonne d'une combinaison linéaire des autres, idem pour les lignes, méthode du pivot de Gauss pour calculer le déterminant, complexité. Déterminant de Vandermonde, déterminant de Vandermonde généralisé, déterminant d'une matrice circulante, déterminant de Cauchy.

3. Applications en algèbre. —

3.1. Systèmes linéaires. — (Gourdon, preuves : Grifone) Système de Cramer, CNS pour avoir une solution et expression de la solution. Cas général : déterminant principal, déterminants caractéristiques, théorème de Rouché-Fontené.

3.2. Polynôme caractéristique. — (Gourdon) Définition du polynôme caractéristique, forme dans le cas 2×2, théorème de Cayley-Hamilton, les valeurs propres de A sont les racines de χ_A, polynôme caractéristique d'une matrice compagnon. Éventuellement, théorème de réduction avec le polynôme caractéristique.

3.3. Résultant. — (Szpirglas) Définition du résultant comme déterminant de l'application de Sylvester, forme explicite, les résultant est nul ssi les deux polynômes ont un facteur commun. Définition du discriminant, le discriminant est nul ssi le polynôme a un facteur multiple, cas scindé. (Beck-Malick-Peyré) Application pour montrer que les matrices diagonalisable à racines simples sont denses dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. (Szpirglas) Théorie de l'élimination. Détermination du polynôme minimal de la somme et du produit de deux éléments algébriques. (Mérindol) Détermination de l'équation d'une courbe paramétrée. Définition d'une courbe affine plane, **dev** théorème de la borne de Bézout.

4. Occurrences en analyse. —

4.1. Régularité du déterminant. — Ici $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (Beck-Malick-Peyré) Le déterminant est polynomial en les coefficients de la matrice, ainsi $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe. L'application déterminant est $\mathcal{C}^\infty$, ainsi $\mathrm{GL}_n(K)$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(K)$, $\mathrm{SL}_n(K)$ est fermé, corollaire : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, l'ensemble des matrices de rang $\leq r$ est fermé. (Gourdon) Formule de Liouville pour le Wronskien, caractérisation du fait qu'une famille est une base de solutions avec le wronskien.

4.2. Formule de changement de variables. — (Briane-Pagès) Formule de changement de variables, application aux coordonnées polaires, calcul de $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$. **dev** Ellipsoïde de John-Loewner.

Leçon 153 - Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Références : Beck-Malick-Peyré, Gourdon, Ramis-Deschamps-Odoux, *secondaire :* Méthodix algèbre, Demailly.

Développements : décomposition de Dunford, invariants de similitude.

Cadre : soit K un corps, E un K-ev de dimension n, et u un endomorphisme de E.

1. Polynômes d'endomorphismes. —

1.1. L'algèbre $K[u]$. — (Beck-Malick-Peyré) Définition de $P(u)$, de $\Phi : K[X] \to \mathcal{L}(E)$, de $K[u]$ comme son image, existence d'un élément non nul dans le noyau, définition du polynôme minimal π_u comme l'unique générateur unitaire de cet idéal, isomorphisme $K[X]/(\pi_u) \cong K[u]$, théorème chinois dans ce contexte, dimension de $K[u]$, générateurs, exemple d'un projecteur non trivial, d'une involution non triviale.

1.2. Polynôme annulateur et propriété de π_u. — (Beck-Malick-Peyré) Définition d'un polynôme annulateur, lemme des noyaux pour un polynôme annulateur, remarquer qu'un polynôme est annulateur ssi il divise le polynôme minimal. Invariance de π par similitude, c-ex de la réciproque. Si F stable par u, $\pi_{u|_F} | \pi_u$, si $E = F_1 \oplus F_2$ stables par u et $\pi_1 := \pi_{u|_{F_1}}, \pi_2 := \pi_{u|_{F_2}}$, alors $\pi_u = \mathrm{ppcm}(\pi_1, \pi_2)$, si $\pi_u = PQ$ avec P, Q unitaires, alors $F := \mathrm{Ker}(P(u))$ est stable par u et $\pi_{u|_F} = P$.

1.3. Polynôme caractéristique et valeurs propres. — (Ramis-Deschamps-Odoux tome 1) Définition d'une valeur propre, polynôme caractéristique χ_A d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$, invariance par similitude, polynôme caractéristique χ_u d'un endomorphisme u, les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u, si P annule u, alors les valeurs propres sont racines de P, ainsi les racines de π_u sont les valeurs propres de u. Si F stable par u, $\chi_{u|_F} | \chi_u$, app : encadrement de la multiplicité géométrique entre 1 et la multiplicité algébrique pour une valeur propre. Théorème de Cayley Hamilton.

2. Endomorphismes diagonalisables. —

2.1. Critère de diagonalisabilité. — (Beck-Malick-Peyré) Définition de diagonalisable, suite d'équivalences avec u diagonalisable, si χ_u est scindé à racines simple alors u est diagonalisable, réduction des projecteurs et des involutions, critère de diagonalisation dans les corps finis. u est diagonalisable ssi $K[u] \cong K^l$.

2.2. Diagonalisation simultanée. — (Beck-Malick-Peyré) Diagonalisation simultanée (preuve : Gourdon), (exercices) $\mathrm{GL}_n(K) \cong \mathrm{GL}_m(K) \Leftrightarrow m = n$, tout sous-groupe abélien fini de $\mathrm{GL}_n(K)$ (K algébriquement clos) est conjugué à un sous groupe du groupe des matrices diagonales.

2.3. Réduction des endomorphismes normaux. — Ici, E est un espace hermitien. (Gourdon) Définition d'un endomorphisme normal, exemple des unitaires, hermitiens, antihermitiens, théorème de réduction des endomorphismes normaux, cas euclidien, application dans le cas hermitien aux unitaires, hermitiens et antihermitiens.

2.4. Endomorphismes semi-simples. — (Gourdon) Définition, M est semi-simple ssi π_M est sans facteurs carrés ssi M diagonalise dans une extension de K.

3. Endomorphismes trigonalisables et réductions plus fines. —

3.1. Critère de trigonalisation. — (Beck-Malick-Peyré) Définition de trigonalisable, suite d'équivalences avec u trigonalisable, dans un corps algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable, $\det \circ \exp = \exp \circ \mathrm{Tr}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, trigonalisation simultanée. Si u est trigonalisable $\mathrm{spec}(P(u)) = P(\mathrm{spec}(u))$.

3.2. Décomposition de Dunford. — (Gourdon) **dev** décomposition de Dunford. (Beck-Malick-Peyré) Surjectivité de l'exponentielle $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Décomposition de Dunford de $\exp(u)$, u est diagonalisable ssi $\exp(u)$ l'est.

3.3. Décomposition de Frobenius. — (Gourdon) Définition du polynôme minimal en x π_x, sous-espace cyclique E_x associé, il existe x tel que $\pi_x = \pi_u$, définition d'un endomorphisme cyclique, caractérisation avec $\pi_u = \chi_u$, **dev** théorème de décomposition de Frobenius, version matricielle, corollaire : deux endomorphismes sont semblables ssi ils ont les même invariants de similitude. Réduction de Jordan.

4. Applications. —

4.1. Calcul de puissances et d'inverses. — (Méthodix algèbre) Méthode de calcul de puissances et d'inverse à l'aide d'un polynôme annulateur.

4.2. Calcul d'exponentielle. — (Méthodix algèbre) Rappel de la décomposition de Dunford de l'exponentielle, application au calcul de l'exponentielle, remarquer qu'il faut Dunford et que c'est compliqué, méthode plus rapide (Gourdon). (Demailly) Remarque sur le forme de Jordan pour calculer l'exponentielle, forme des solutions.

Leçon 154 - Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Références : Mansuy-Mneimné, Gourdon, Beck-Malick-Peyré, Ulmer, *secondaire :* Colmez, FGN Algèbre 3.

Développements : invariants de similitude, décomposition de Dunford.

Introduction : la recherche de sous-espaces stables, et encore mieux d'une décomposition en sous-espaces stables est tout l'objet de la réduction des endomorphismes, et cette leçon s'intéresse donc à la réduction sous cet angle. Le lemme des noyaux est le résultat central, il fait le lien entre décomposition en sous-espaces stables et polynômes annulateurs. Le comportement des sous-espaces stables vis-à-vis de la commutation est ce qui fait marcher la diagonalisation et trigonalisation simultanée, ainsi que la réduction des endomorphismes normaux.

Cadre : soit K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Sous-espace stables. —

1.1. Définition, base adaptée. — (Mansuy-Mneimné) Définition, exemples du noyau et de l'image, si tous les sous-espaces sont stables f est une homothétie. Définition de l'endomorphisme restreint à un sous-espace stable. Propriétés avec $f+g$, $f \circ g$, $g \circ f \circ g^{-1}$. Forme de la matrice dans une base adaptée à la somme directe de sous-espaces stables. Exemple des rotations, des projecteurs, des endomorphismes nilpotents d'indice maximum, de $M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)I_n$.

1.2. Sous-espaces stables et dualité. — (Gourdon) Définition de l'orthogonale, de la transposée, F est stable par f ssi $F^\perp$ est stable par ${}^tf$, remarque sur le fait que trouver un hyperplan stable c'est trouver une droite stable (un vecteur propre) par le transposée.

2. Sous-espaces stables et réduction. —

2.1. Sous-espaces propres. — (Gourdon) Définition d'une valeur propre, ce sont les racines du polynôme caractéristique, définition des sous-espaces propres et des sous-espaces caractéristiques qui sont des sous-espaces stables.

2.2. Lemme des noyaux. — (Beck-Malick-Peyré) Lemme des noyaux, ainsi f est diagonalisable ssi annulé par un polynôme scindé à racines simples, et f trigonalisable ssi annulé par un polynôme scindé. Définition des endomorphismes semi-simples, caractérisation avec le polynôme caractéristique, contre-exemple des nilpotents non nuls.

2.3. Réduction de Frobenius. — (Gourdon) Définition de E_x, $\pi_{f,x}$. Définition d'un endomorphisme cyclique, caractérisation avec $\pi_f = \chi_f$, la matrice d'un endomorphisme cyclique dans une bonne base est une matrice compagnon. **dev** Théorème de réduction de Frobenius, forme matricielle. Les invariants de similitudes caractérisent les classes de similitudes. On retrouve la réduction de Jordan pour les endomorphismes nilpotents, théorème de Jordan général.

3. Sous-espaces stables et commutation. —

3.1. Réduction simultanée. — (Gourdon) Si f et g commutent, le noyau et l'image de g sont stables par f, théorème de diagonalisation simultanée, théorème de trigonalisation simultanée. **dev** Décomposition de Dunford. (Beck-Malick-Peyré) Applications : si U et V sont diagonalisables et commutent, $M \mapsto UM - MV$ est diagonalisable, en caractéristique impaire $\mathrm{GL}_n(K) \cong \mathrm{GL}_m(K)$ ssi $n = m$.

3.2. Réduction des endomorphismes normaux. — (Gourdon) Définition, si u est normal et F stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u, réduction sur E hermitien des endomorphismes normaux, cas réel, théorème spectral, réduction des isométries, des endomorphismes antisymétriques. (FGN Algèbre 3 p.65) L'exponentielle de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ dans $SO_n(\mathbb{R})$ est surjective.

4. Application en théorie des représentations. —

(Ulmer) Définition d'une représentation, d'une sous-représentation, exemple de V^G, définition d'une représentation irréductible, complètement réductible, exemple des représentations de degré 1. (Colmez) Il existe un produit scalaire sur V invariant sous l'action de G, théorème de Maschke. (Ulmer) Exemple de la décomposition de la représentation par permutation de $\mathfrak{S}_3$.

Leçon 155 - Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Références : Gourdon, Beck-Malick-Peyré, *secondaire :* Caldero-Germoni, FGN Algèbre 2 et 3, Ulmer.

Développements : décomposition de Dunford, l'exponentielle induit un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Introduction : cf Beck-Malick-Peyré. Le but de la réduction est d'écrire l'espace E en somme de sous-espaces sur lequel u est plus simple : ici sur lequel u est une homothétie. On cherche alors à savoir à quelles conditions c'est possible. Outils très puissants : les polynômes annulateurs et le lemme des noyaux. On en déduit un théorème de caractérisation précis.

Cadre : soit K un corps, E un K-espace vectoriel de dimension finie n, et u un endomorphisme de E.

1. Outils de réduction. —

1.1. Vecteurs propres, espaces propres. — (Gourdon) Définition des valeurs propres, du spectre, des vecteurs propres, des espaces propres, ils sont en somme directe, exemple des projecteurs. Définition d'être diagonalisable pour un endomorphisme, pour une matrice, interprétation en terme de similitude.

1.2. Polynômes d'endomorphismes. — (Beck-Malick-Peyré) Définition d'un polynôme annulateur comme élément du noyau de $K[X] \to K[u]$, polynôme minimal. (Gourdon) Toute valeur propre est racine de tout polynôme annulateur, les racines de π_u sont les valeurs propres de u. Définition du polynôme caractéristique de u, ses racines sont les valeurs propres de u, théorème de Cayley-Hamilton. Lemme de noyaux, application : il existe $x \in E$ tel que $\pi_u = \pi_{u,x}$ où $\pi_{u,x}$ est le polynôme minimal de $u(x)$.

2. Diagonalisation. —

2.1. Critères de diagonalisabilité. — (Beck-Malick-Peyré) CNS de diagonalisabilité, exemple des projecteurs, des symétries, c-ex des rotations de $\mathbb{R}^2$, la matrice compagnon de P est diagonalisable ssi P est scindé à racines simples sur K. CNS sur les corps finis. (Ulmer) Pour toute représentation ρ et tout g, $\rho(g)$ est diagonalisable de valeurs propres dans $\mathbb{U}_n$. Application : le noyau d'un caractère est le noyau de la représentation. (Beck-Malick-Peyré) Si u est diagonalisable alors sa restriction à tout sous-espace stable de E l'est aussi.

2.2. Résultats topologiques. — Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (Beck-Malick-Peyré) L'adhérence des matrices diagonalisables à valeurs propres simples est l'ensemble des matrices trigonalisables, l'intérieur des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres simples. Conséquences dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}$ l'ensemble des matrices trigonalisables est fermé. Application à la non continuité de l'opérateur qui à A associe sa partie diagonalisable dans la décomposition de Dunford. (FGN Algèbre 2) u est diagonalisable ssi sa classe de similitude est fermée.

2.3. Endomorphismes semi-simples. — (Beck-Malick-Peyré) Définition de la semi-simplicité, u est semi-simple ssi π_u est sans facteurs carrés, u est semi-simple ssi u est diagonalisable dans une extension de $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3. Diagonalisation et commutation. —

3.1. Diagonalisation simultanée. — (Gourdon) Si u et v commutent ils stabilisent leurs espaces propres respectifs, théorème de diagonalisation simultanée. (Beck-Malick-Peyré) Applications : si U et V sont diagonalisables et commutent, $M \mapsto UM - MV$ est diagonalisable, en caractéristique impaire, $\mathrm{GL}_n(K) \cong \mathrm{GL}_m(K)$ ssi $n = m$, sous-groupes abéliens finis G de $\mathrm{GL}_n(K)$. (Ulmer) Un groupe est abélien ssi toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1.

3.2. Endomorphismes normaux. — (Gourdon) Définition, si u est normal et F stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u, réduction sur E hermitien des endomorphismes normaux, cas réel, théorème spectral, réduction des isométries, des endomorphismes antisymétriques. (FGN Algèbre 3 p.65) L'exponentielle de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ dans $SO_n(\mathbb{R})$ est surjective. (Caldero-Germoni) Connexité de $SO_n(\mathbb{R})$, simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$. Décomposition polaire, **dev** l'exponentielle induit un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

4. Décomposition de Dunford. —

4.1. Décomposition. — (Gourdon) **dev** Décomposition de Dunford. (Beck-Malick-Peyré) Surjectivité de exp : $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, décomposition de Dunford de l'exponentielle, u est diagonalisable ssi $\exp(u)$ l'est.

4.2. Puissance, exponentielle et équations différentielles linéaires. — (Gourdon) Calcul de puissances, d'exponentielle grâce à Dunford. (Gourdon (Analyse)) Application à la résolution d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Leçon 156 - Exponentielle de matrices. Applications.

Références : Grifone, Caldero-Germoni, Mneimné-Testard, FGN Algèbre 2, Zavidovique, *secondaires :* Rouvière, Beck-Malick-Peyré.

Développements : différentielle de l'exponentielle de matrices, l'exponentielle induit un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, *étude de* $O(p,q)$.

Cadre : soit $n \geq 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme d'algèbre $||.||$.

1. Définition et premières propriétés. —

1.1. Exponentielle matricielle. — (Grifone) La série qui définit l'exponentielle converge pour toute matrice et majoration de sa norme. Exemple de l'exponentielle d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente, qui est unipotente. L'exponentielle de A est un polynôme en A qui dépend de A (Mneimné-Testard). On a $\exp(P^{-1}MP) = P^{-1}\exp(M)P$, si A et B commutent, $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$, corollaire sur l'inversibilité de l'exponentielle et son inverse, contre-exemple[(1)]. On a aussi $\det \circ \exp = \exp \circ \operatorname{Tr}$ et ${}^t\exp A = \exp {}^tA$

1.2. Exponentielle et réduction. — (Grifone) Exponentielle d'une matrice diagonale par blocs, remarque sur l'application au calcul avec la réduction de Jordan, exponentielle d'un bloc de Jordan. (Gourdon) Dire que la décomposition de Dunford facilite le calcul, donner la méthode explicite avec les projecteurs. (Beck-Malick-Peyré) Décomposition de Dunford de l'exponentielle, $\exp A$ est diagonalisable ssi A l'est, et $\exp A = I$ ssi A est diagonalisable de spectre inclus dans $2i\pi\mathbb{Z}$.

2. Étude de l'application exponentielle. —

2.1. Topologie et exponentielle. — (Mneimné-Testard) L'exponentielle est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme entre un voisinage de 0 et un voisinage de l'identité, application : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits, définition du logarithme, convergence sur $B(\mathrm{Id},1)$, sur cette boule, $\exp \circ \log = \mathrm{id}$, l'exponentielle réalise un homéomorphisme des matrices nilpotentes dans les matrices unipotentes d'inverse le logarithme. (Caldero-Germoni) **dev** L'exponentielle réalise un homéomorphisme entre les matrices symétriques (resp. hermitiennes) et les matrices symétriques (resp. hermitiennes) définies positives, **dev** Étude de $O(p,q)$.

2.2. Injectivité et surjectivité. — (Caldero-Germoni) Rappeler que $\exp(2ik\pi J) = I_2$, donc non injectivité. (Zavidovique) Surjectivité de l'exponentielle matricielle complexe, image de l'exponentielle matricielle réelle, exemple du Caldero-Germoni.

3. Applications en calcul différentiel. —

3.1. Groupes matriciels à un paramètre. — (FGN Algèbre 2) Tout morphisme de groupe continu de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\times)$ est de la forme $t \mapsto \exp tA$, A quelconque. Exemple de $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$. Application à la détermination des morphisme de groupes continus de $(\mathbb{S}_1,\times)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\times)$.

3.2. Équations différentielles. — (Demailly) Solution d'une EDO linéaire à coefficients constants, remarque sur l'application à $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ lorsque les matrices commutent (Pommellet), **dev** différentielle de l'exponentielle matricielle (Rouvière). (Demailly) Remarque sur le forme de Jordan pour calculer l'exponentielle, forme des solutions. Stabilité des points d'équilibre d'un système linéaire. (Rouvière) Théorème de Liapounov.

[(1)] $\exp\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \neq \exp\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$

Leçon 157 - Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Références : Beck-Malick-Peyré, Gourdon, Caldero-Germoni, *secondaire :* Demailly.

Développements : décomposition de Dunford, méthode itératives de résolution d'un système linéaire, *invariants de similitude.*

Cadre : soit K un corps, soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, et soit u un endomorphisme de E.

1. Endomorphismes trigonalisables. —

1.1. Outils de trigonalisation. — (Gourdon) Valeur propre, espace propre, polynôme minimal, polynôme caractéristique, théorème de Cayley-Hamilton, λ vecteur propre ssi λ racine de χ, lemme des noyaux.

1.2. Définition et caractérisation. — (Beck-Malick-Peyré) Définition d'une matrice trigonalisable, d'un endomorphisme trigonalisable, critère de trigonalisation avec χ et π, remarque sur les corps algébriquement clos, exemple d'une matrice trigonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$, $\det \circ \exp = \exp \circ \det$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (Gourdon), formule de la trace et du déterminant avec les valeurs propres pour K algébriquement clos, spectre de $P(u)$ pour $P \in K[X]$ pour K alg. clos. **dev** Méthodes itératives de résolution d'un système linéaire.

1.3. Trigonalisation simultanée. — (Gourdon) Théorème de cotrigonalisation. Contre-exemple de matrices cotrigonalisables qui ne commutent pas (des matrices triangulaires qui ne commutent pas). (Beck-Malick-Peyré) Si U et V sont trigonalisables et commutent, $M \mapsto UM - MV$ est trigonalisable.

1.4. Résultats topologiques. — $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (Beck-Malick-Peyré) L'adhérence des matrices diagonalisables à valeurs propres simples est l'ensemble des matrices trigonalisables, l'ensemble des matrices trigonalisables sur $\mathbb{R}$ est fermé. Application à Cayley-Hamilton.

2. Endomorphismes nilpotents. —

2.1. Définition et caractérisation. — (Beck-Malick-Peyré) Définition d'un nilpotent, exemple de $f \mapsto u \circ f$ dans le cas où u est nilpotent, de l'opérateur de dérivation dans $K_n[X]$, $\mathcal{N}(E)$ est l'ensemble des nilpotents, indice de nilpotence, polynôme minimal et indice de nilpotence inférieur ou égal à n, autres caractérisation de la nilpotence, si u est nilpotent d'indice p, il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ soit libre.

2.2. Cône de nilpotence. — (Beck-Malick-Peyré) $\mathcal{N}(E)$ est un cône, exemple en dimension 2 pour justifier la dénomination, c-ex de la somme de deux nilpotents, si u et v sont nilpotents et commutent, $u+v$ est nilpotent, en caractéristique nulle, $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}(E)) = \ker(\mathrm{Tr})$. (Caldero-Germoni 2) Cardinal de $\mathcal{N}(\mathbb{F}_q^d)$.

2.3. Endomorphismes cycliques. — (Beck-Malick-Peyré) Définition d'un endomorphisme cyclique, remarque qu'un nilpotent d'indice n est cyclique, caractérisation des endomorphismes cycliques.

3. Réduction. —

3.1. Réduction de Dunford. — (Gourdon) **dev** décomposition de Dunford. (Beck-Malick-Peyré) Surjectivité de l'exponentielle $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Décomposition de Dunford de l'exponentielle. Non continuité de l'opérateur qui à A associe sa partie diagonalisable dans la décomposition de Dunford. (Gourdon) Méthode pour calculer la décomposition de Dunford.

3.2. Réduction de Jordan. — (Caldero-Germoni) Pour u nilpotent, définition des noyaux itérés, de la partition λ, propriétés, définition du tableau de Young associé, du tableau dual et théorème d'existence d'une forme réduite de Jordan, deux matrices nilpotentes sont semblables ssi elles ont la même forme réduite de Jordan (et donc ssi elles ont même λ), dénombrement des orbites de nilpotence. (Gourdon) Décomposition de Jordan générale, deux matrices sont semblables ssi elles ont la même forme réduite de Jordan. (Gourdon) Exponentielle d'un bloc de Jordan, exponentielle d'une décomposition de Jordan. (Demailly) Application à la résolution d'équations différentielles linéaires.

3.3. Réduction de Frobenius. — (Gourdon) Définition du polynôme minimal en x π_x, sous-espace cyclique E_x associé, il existe x tel que $\pi_x = \pi_u$, lien avec endomorphismes cycliques, **dev** théorème de décomposition de Frobenius, version matricielle, corollaire : deux endomorphismes sont semblables ssi ils ont les même invariants de similitude.

Leçon 158 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Références : Caldero-Germoni, Gourdon, Grifone, *secondaires :* Perrin, FGN Algèbre 3, Rouvière, Hiriart-Urruty.

Développements : l'exponentielle induit un homéomorphisme entre $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, ellipsoïde de John-Loewner, *étude de* $O(p,q)$.

Cadre : soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Matrices symétriques et endomorphismes autoadjoints. —

1.1. Matrices symétriques et hermitiennes. — (Gourdon) Définition d'une matrice symétrique, définie, définie positive, antisymétrique, dimension des sev associés et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, exemples. Définition d'une matrice hermitienne, définie, définie positive, c'est un $\mathbb{R}$-ev mais pas un $\mathbb{C}$-ev, dimension, $\mathcal{H}_n = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus i\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, exemples.

1.2. Endomorphismes autoadjoints et réduction. — (Gourdon) Définition de l'adjoint d'un endomorphisme, matrice dans une base orthonormée, définition d'un endomorphisme autoadjoint, remarquer alors qu'il est autoadjoint ssi sa matrice dans une base orthonormée est symétrique (resp. hermitienne). Théorème spectral. Remarquer que A est (définie) positive ssi ses valeurs propres sont (strictement) positives. (Caldero-Germoni) Existence et unicité de la racine carré d'une matrice symétrique (hermitienne) définie positive.

1.3. Décomposition polaire. — (Caldero-Germoni) Décomposition polaire, norme et rayon spectral, $O_n(\mathbb{R})$ est compact maximal et tout sous-groupe compact maximal est conjugué à $O_n(\mathbb{R})$, **dev** $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme, $\exp : \mathcal{H}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme, application à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cong O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cong U_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}$.

2. Action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{H}_n$ par congruence. —

2.1. Lien avec les formes quadratiques et hermitiennes. — (Gourdon) Définition d'une forme bilinéaire et sesquilinéaire, représentation matricielle. Définition d'une forme bilinéaire symétrique, hermitienne, c'est le cas ssi les matrices associées sont symétriques, hermitiennes. Effet du changement de base sur les matrices. Définition d'une forme quadratique, hermitienne. Définition d'une forme (définie) positive, expression matricielle.

2.2. Orbites et stabilisateurs. — (Grifone) Définition d'une base orthogonale, orthonormée, existence d'une telle base, méthode de Gauss, exemple. Théorème d'inertie de Sylvester et classification des orbites sur $\mathbb{R}$, définition de la signature, caractérisation du caractère défini positif, classification sur $\mathbb{C}$. (Perrin) Définition de $O(q)$, isomorphisme avec $O(p,q)$. (Caldero-Germoni) **dev** $O(p,q) \cong O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$.

2.3. Pseudo réduction simultanée. — (Gourdon) Pseudo réduction simultanée, version forme quadratique. (FGN Algèbre 3) **dev** Log-concavité du déterminant, ellipsoïde de John-Loewner.

3. Applications. —

3.1. Classification des coniques et quadriques. — (Grifone) Définition d'une conique, classification, dessins. Définition d'une quadriques, classification, dire qu'on utilise la pseudo réduction simultanée.

3.2. Extrema. — (Gourdon) La Hessienne est une forme bilinéaire symétrique, conditions d'optimalité du second ordre. (Rouvière) Position relative d'une surface et de son plan tangent, lemme de Morse, remarquer qu'on peut retrouver le résultat précédent. (Hiriart-Urruty) Lemme de Kantorovich, méthode du gradient à pas optimal.

Leçon 159 - Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Références : Gourdon, Audin, *secondaires :* Beck-Malick-Peyré, Perrin, FGN Algèbre 1, Cognet, Laamri.

Développements : théorème des extrema liés, invariants de similitude.

Cadre : soit K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Formes linéaires et hyperplans. —

1.1. Formes linéaires. — (Gourdon) Définition d'une forme linéaire sur E, du dual E^* de E, du bidual E^{**}, exemple de la projection $(x, y, z) \mapsto x$, de la différentielle d'une fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. (Beck-Malick-Peyré) Théorème de Riesz, $\dim E^* = \dim E$, application à l'existence du gradient, théorème de Hahn-Banach géométrique, enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ (FGN Algèbre 3). (De Seguins Pazzis) Définition b_d pour une forme bilinéaire b, définition, c'est un isomorphisme ssi b est non dégénérée. (Gourdon) $A \mapsto \big(M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)\big)$ est un isomorphisme entre $(\mathcal{M}_n(K))^*$ et $\mathcal{M}_n(K)$, application : l'ensemble des $f \in (\mathcal{M}_n(K))^*$ tels que $f(MN) = f(NM)$ est $K \cdot \mathrm{Tr}$.

1.2. Hyperplans. — (Gourdon) Définition d'un hyperplan, l'ensemble des hyperplans est l'ensemble des noyaux d'une forme linéaire. (Perrin) Définition des transvections, des dilatations avec leur hyperplan, les transvections engendrent $\mathrm{SL}(E)$ et les transvections et les dilatations engendrent $\mathrm{GL}(E)$. (FGN Algèbre 1) Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

2. Dualité. —

2.1. Bases duales. — (Gourdon) Définition des formes linéaires coordonnées d'une base, c'est une base du duale, appelée base duale. (Laamri) La base duale de $(1, X-a), \ldots, (X-a)^n)$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ est (φ_k) où $\varphi_k(P) = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$. (Gourdon) Matrice de changement de bases duales en fonction de la matrice de changement de bases.

2.2. Bidual et bases antéduales. — (Gourdon) Isomorphisme canonique $E \cong E^{**}$, base antéduale, matrice de changement de bases antéduales en fonction de la matrice de changement de bases duales. (Cognet) Application à l'interpolation de Lagrange.

3. Orthogonalité et transposée. —

3.1. Orthogonalité. — (Gourdon) Orthogonal d'une partie A de E, d'une partie B de E^*, renversement des inclusions, stabilité par Vect, orthogonal d'un hyperplan, relations entre les dimensions, équations d'un sev. **dev** Théorème des extrema liés, applications. Dualité entre la somme et l'intersection. (Cognet) $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p) : E \to K^p$ est surjective ssi $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ est libre, applications. (De Seguins Pazzis) Relation entre l'orthogonal d'espaces vectoriels et l'orthogonal pour les formes bilinéaires, remarque sur l'utilité dans les preuves.

3.2. Application transposée. — (Gourdon) Définition de la transposée, égalité du rang, dualité noyau image, la transposition est contravariante, F est stable par u ssi $F^\perp$ est stable par ${}^t u$, version matricielle. Application à la réduction des endomorphismes normaux. **dev** Invariants de similitude et réduction de Frobenius.

Leçon 160 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Références : Gourdon, Grifone, Perrin, *secondaire :* FGN Algèbre 3.

Développements : simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$, l'exponentielle induit un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, *étude de* $O(p,q)$.

Cadre : soit $(E, < .,. >)$ un espace euclidien de dimension n, et soit f un endomorphisme de E.

1. Adjoint d'un endomorphisme. —

1.1. Définition et premières propriétés. — (Grifone) Définition de f^* l'adjoint de f, l'adjoint est involutif, linéaire et contravariant, le rang et le déterminant de f et f^* sont les mêmes. Dans une base orthonormée la matrice de f^* est la transposée de celle de f, ainsi, si ${}^tAA = 0$ alors $A = 0$.

1.2. Adjoints remarquables. — (Sans référence) Définition d'un endomorphisme orthogonal, ils forment un groupe pour la composition, vision matricielle, exemple des symétries orthogonales, définition des endomorphismes autoadjoints, lien avec les matrices symétriques, exemple des projections orthogonales, définition des endomorphismes normaux, exemple des endomorphismes déjà cités. Contre-exemple d'un endomorphisme non normal.

2. Réduction des endomorphismes normaux. — (Gourdon) Si f est normal $||f(x)|| = ||f^*(x)||$, si F est stable par f alors $F^\perp$ est stable par f^*, ainsi l'orthogonale de tout sous-espace propre de f est stable par f. Théorème de réduction des endomorphismes normaux dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$, application à la réduction des matrices antisymétriques.

3. Étude des endomorphismes orthogonaux. —

3.1. Endomorphismes orthogonaux. — (Grifone) f est orthogonal ssi c'est une isométrie ssi sa matrice vérifie ${}^tAA = I$, f est orthogonale ssi elle transforme toute base orthonormée en une base orthonormée, la matrice de passage entre deux bases orthonormées est orthogonale. Si f est orthogonale ses valeurs propres sont ± 1 et son déterminant est ± 1. Définition de $SO(E)$ et $SO_n(\mathbb{R})$, ce sont des sous-groupes de $O(E)$ et $O_n(\mathbb{R})$. (Gourdon) Théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux. (FGN Algèbre 3, 1.36) L'application $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \to SO_n(\mathbb{R})$ est surjective.

3.2. Application en dimension 2 et 3. — (Grifone) Étude en dimension 2 (attention pour $O_2^-(\mathbb{R})$ c'est plus simple que ce qui est annoncé) et 3, trace des rotations en dimension 3. Remarque sur le calcul de l'angle d'une rotation en dimension 3 et application sur un exemple.

3.3. Propriétés algébriques et topologiques. — (Perrin) $O_n(\mathbb{R})$ est compact, $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe, centres. Définition des symétries, réflexions, renversements, générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$, **dev** $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

4. Endomorphismes autoadjoints. —

4.1. Propriétés et réduction. — (Gourdon) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, théorème spectral, définition d'un endomorphisme symétrique (défini) positif, pseudo réduction simultanée et application à l'ellipsoïde de John-Loewner.

4.2. Décomposition polaire. — (Caldero-Germoni) Décomposition polaire, norme et rayon spectral, $O_n(\mathbb{R})$ est compact maximal et tout sous-groupe compact maximal est conjugué à $O_n(\mathbb{R})$, **dev** $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme, **dev** $O(p,q) \cong O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$.

Leçon 161 - Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.

Références : Mercier, Perrin, *secondaire :* Combes, Caldero-Germoni, Audin.

Développements : simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$, table de caractères de $\mathfrak{S}_4$.

Cadre : soit E un espace affine euclidien de dimension finie n et de direction V.

1. Généralités. —

1.1. Définition et premières propriétés. — (Mercier) Définition d'une isométrie affine, c'en est une ssi elle est affine de partie linéaire orthogonale, ainsi une isométrie est bijective, exemple des translations et des symétries orthogonales (Audin), définition du sous-groupe $\mathrm{Is}(E)$ du groupe affine, du sous-groupe $\mathrm{Is}^+(E)$.

1.2. Écriture canonique d'une isométrie. — (Mercier) Définition de $\mathrm{Is}_O(E)$, isomorphisme entre $\mathrm{Is}_O(E)$ et $O(E)$, écriture d'une isométrie comme la composée d'une translation et d'une isométrie de $\mathrm{Is}_O(E)$, définition de $\mathrm{Inv}\, g$ où g est orthogonale, écriture canonique d'une isométrie, corollaire : si $\mathrm{Inv}\, L(f) = \{0\}$ alors f admet un unique point invariant et le centre du groupe des isométries est trivial. Existence et unicité d'une isométrie envoyant un repère affine sur un bon $(n+1)$-uplet de points, corollaire : une isométrie est entièrement déterminée par l'image de $n+1$ points.

2. Le groupe orthogonal. —

2.1. Étude de $O(V)$. — (Perrin) Isomorphisme entre $O(V)$ et $O_n(\mathbb{R})$ via le choix d'une base. Définition d'un renversement, d'une réflexion, caractérisation des symétries orthogonales. $O(V)$ est engendré par les réflexions orthogonales et tout élément s'écrit comme la composée d'au plus n réflexions, $SO(V)$ est engendré par les renversements orthogonaux et tout élément s'écrit comme la composée d'au plus n renversements.

2.2. Réduction des isométries orthogonales et conséquences. — (Perrin) Réduction des éléments de $O(V)$. Ainsi, $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, **dev** simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$. (Caldero-Germoni) Décomposition polaire, $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe compact maximal et tout sous-groupe compact maximal est conjugué à $O_n(\mathbb{R})$.

3. Classification des isométries en dimension 2 et 3. —

3.1. Classification en dimension 2. — (Mercier et Combes) Définition d'une rotation affine, description des déplacements en dimension 2, définition d'une symétrie glissée, description des anti-déplacements en dimension 2. Tableau résumant la classification en fonction du sous-espace des points invariants.

3.2. Classification en dimension 3. — (Mercier) Définition d'un vissage, description des déplacements en dimension 3, d'une réflexion glissée et d'une symétrie rotation, description des anti-déplacements en dimension 3. Tableau résumant la classification en fonction du sous-espace des points invariants.

4. Isométries conservant une partie. —

(Mercier) Définition de $\mathrm{Isom}(P)$ pour $P \subset E$, de $\mathrm{Isom}^+(P)$ et $\mathrm{Isom}^-(P)$, bijection entre les deux.

4.1. Isométries conservant une partie du plan. — (Mercier) Groupe d'isométrie d'un triangle non isocèle, d'un triangle isocèle non équilatéral, d'un losange. Définition par équivalences d'un polygone régulier $\mathcal{P}_n$, description de $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{P}_n)$ et de $\mathrm{Isom}^-(\mathcal{P}_n)$, définition du groupe diédral D_n, cardinal et description par générateurs et relations.

4.2. Isométries conservant une partie de l'espace. — (Caldero-Germoni) Groupe d'isométries (directes) du cube, **dev** table de caractères de $\mathfrak{S}_4$, groupe d'isométries (directes) du tétraèdre.

Leçon 162 - Systèmes d'équations linéaires; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Références : Grifone, Gourdon, Caldero-Germoni, Beck-Malick-Peyré, Dìaz-Toca-Lombardi-Quitté, Ciarlet, Allaire, Hiriart-Urruty, *secondaire :* Mneimné-Testard.

Développements : théorème d'Artin, méthodes itératives de résolution d'un système matriciel.

Introduction : question naturelle lorsqu'on étudie les matrices, pour résoudre un système linéaire, mais aussi pour inverser par exemple. On a des résultats théoriques d'existence, d'aucune utilité en pratique, puis des méthodes directes (basées sur la simplification du problème) et itératives. Parler du choix de Smith par rapport à Hermite. Dire que ça amène des résultats théoriques importants moins en lien avec la leçon : théorème de la base adaptée, engendrement de $\mathrm{GL}_n(K)$, $\mathrm{SL}_n(K)$.

Cadre : soit K un corps.

1. Systèmes linéaires. —

1.1. Définition. — (Grifone) Définition d'un système linéaire, expression matricielle, notion de système compatible, définition du rang du système.

1.2. Système de Cramer. — (Grifone) Définition d'un système de Cramer, existence et unicité de la solution, expression comme déterminant, complexité (et dire que c'est trop), exemple.

1.3. Cas général. — (Gourdon) Déterminant principal du système, déterminants caractéristiques, théorème de Rouché-Fontené, exemple d'applications.

1.4. Systèmes homogènes. — (Grifone) Définition, compatibilité, espace de solutions $\ker A$, dimension par le théorème du rang. **dev** Théorème d'Artin.

1.5. Stabilité numérique. — (Allaire) Définition du conditionnement, théorème d'erreur.

2. Méthodes de résolution directes. —

2.1. Opérations élémentaires. — (Beck-Malick-Peyré) Définition des opérations de transvections, dilatations, et de transpositions et matrices correspondantes. Les transvections engendrent $\mathrm{SL}_n(k)$ et les transvections et les dilatations engendrent $\mathrm{GL}_n(K)$. (Mneimné-Testard) Résultats de connexité sur $\mathrm{GL}_n(K)$ et $\mathrm{SL}_n(K)$ pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.2. Méthode du Pivot de Gauss. — (Caldero-Germoni) Position du problème : on cherche une matrice plus simple dans l'orbite de A pour l'action à gauche de $\mathrm{GL}_n(K)$, et même une forme normale qui caractérise les orbites, équivalence matricielle des systèmes : $AX = Y \Leftrightarrow PAX = PY$, les opérations élémentaires sur les lignes correspondent à la multiplication à gauche par les matrices correspondantes. Définition d'une matrice échelonnée, échelonnée réduite. A est équivalente à $\begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ par des transvections, il existe une unique matrice échelonnée réduite dans l'orbite de A. Complexité de l'algorithme du pivot de Gauss (Ciarlet).

2.3. Sur un anneau principal. — (Beck-Malick-Peyré) Théorème des facteurs invariants, dire que c'est algorithmique sur un anneau où l'on sait calculer les coefficients de Bézout, complexité. (Dìaz-Toca-Lombardi-Quitté) Théorème de résolution à partir de la forme normale de Smith, exemple. Remarque sur les nombreuses conséquences théoriques (Beck-Malick-Peyré).

2.4. Décomposition LU et QR. — (Allaire) Décomposition LU, remarquer que les matrices S.D.P. vérifient les hypothèses du théorème, coût, remarque sur l'utilisation au calcul d'inverses et de déterminants. (Ciarlet) Matrice de Householder, décomposition QR, remarquer que cela donne une base orthonormée, mais c'est numériquement mieux que Gram-Schmidt.

3. Méthodes itératives de résolution. —

3.1. Méthodes de splitting. — (Allaire) Principe de la méthode, **dev** théorème de convergence, méthode de Jacobi, Gauss-Seidel, relaxation et leurs convergences.

3.2. Méthodes du gradient. — (Hiriart-Urruty) Mentionner le but : résolution de $Ax = b$ avec minimisation d'une bonne fonctionnelle. Méthode du gradient à pas optimal, inégalité de Kantorovich sur le reste.

Remarques : on a mis Smith au lieu de Hermite parce que la résolution à partir de cette forme est beaucoup plus facile, il faut savoir le justifier à l'oral (cf poly forme normale de Smith).

Leçon 170 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Références : De Seguins Pazzis, Caldero-Germoni, Grifone, Rouvière, *secondaire :* Gourdon.

Développements : ellipsoïde de John-Loewner, loi de réciprocité quadratique, *étude de $O(p,q)$.*

Cadre : soit K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Formes quadratiques et formes bilinéaires. —

1.1. Définition et premières propriétés. — (De Seguins Pazzis) Définition d'une forme bilinéaire, d'une forme quadratique, de la forme polaire associée à q, formule de polarisation, exemple de correspondance avec la forme polynômiale (Gourdon), exemple du produit de deux formes linéaires, de $\mathrm{Tr}(A\,{}^tB)$, définition de $\mathcal{Q}(E)$ l'espace vectoriel des formes quadratiques sur E.

1.2. Représentation matricielle. — (De Seguins Pazzis) Définition de la représentation matricielle de q dans une base donnée, exemple, cela donne un isomorphisme $\mathcal{Q}(E) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, corollaire sur la dimension de $\mathcal{Q}(E)$. Si A représente q, $b(x,y) = {}^tXAY$, formule de changement de bases, ainsi les matrices représentant q forment une classe de congruence de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1.3. Lien avec la dualité. — (De Seguins Pazzis) Définition du noyau d'une forme quadratique comme le noyau de $b_g : x \mapsto b(x,\cdot)$, le noyau de $(X,Y) \mapsto {}^tXAY$ est $\ker A$. Le rang de A associée à q est égale au rang de b_g et est le rang de q. Définition de non dégénérée, dégénérée, exemples. Théorème de Riesz. Partie régulière de q. Déterminant d'une forme quadratique.

2. Orthogonalité et isotropie. —

2.1. Orthogonalité. — (De Seguins Pazzis) Définition de l'orthogonalité entre deux vecteurs, orthogonale d'une partie de E, quelques petites propriétés, exemple de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{Tr}(XY)$, $\dim A + \dim A^\perp = \dim E$ dans le cas non dégénéré.

2.2. Isotropie. — (De Seguins Pazzis) Définition du cône isotrope, c'est un cône, il contient $\ker q$, mais n'est pas forcément égal : contre-exemple de $x^2 - y^2$. Définition d'un espace isotrope : $A \cap A^\perp \neq \emptyset$, anisotrope : $A \cap A^\perp = \emptyset$, lorsque A est anisotrope, $E = A \oplus A^\perp$.

3. Classification des formes quadratiques. —

3.1. Équivalence de formes quadratiques. — (De Seguins Pazzis) Définition de l'équivalence de formes quadratiques, remarquer que cela revient à la congruence des matrices associées, invariance du rang et du déterminant par équivalence.

3.2. Réduction sous forme diagonale. — (De Seguins Pazzis) Définition d'une base orthogonales, forme de q et de A dans cette base, existence d'une base orthogonale, algorithme de Gauss analytique, exemple.

3.3. Classification sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$. — Remarquer que sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$, la matrice de passage dans une base orthogonale peut être choisie orthogonale, d'après le théorème spectral. (De Seguins Pazzis) Classification sur $\mathbb{C}$, toute forme quadratique non dégénérée admet une base orthonormée, classification sur $\mathbb{R}$, signature. Définition d'une forme quadratique positive, signature, définie positive, signature, existence d'une base orthonormée, inégalité de Cauchy-Schwarz, de Minkowski, théorème d'inertie de Sylvester. Définition d'une ellipsoïde, **dev** ellipsoïde de John-Loewner.

3.4. Classification sur les corps finis. — (Caldero-Germoni) Classification des formes non dégénérées, ainsi, deux formes quadratiques sont équivalentes ssi elles ont même rang et même discriminant réduit, **dev** loi de réciprocité quadratique.

4. Groupe orthogonal. —

4.1. Notion de groupe orthogonal. — (De Seguins Pazzis) Définition du groupe orthogonal $O(q)$, cas de la norme euclidienne, identification matricielle, si $u \in O(q)$ $\det u = \pm 1$, définition de $SO(q)$, notations $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$.

4.2. Décomposition polaire. — (Caldero-Germoni) Décomposition polaire, maximalité du groupe orthogonal, l'exponentielle induit un homéomorphisme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, **dev** décomposition de $O(p,q)$.

4.3. Générateurs. — (Caldero-Germoni) Définition des réflexions et retournements orthogonaux, $SO_n(\mathbb{R})$ est engendré par les retournement orthogonaux, $O_n(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions orthogonales, $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

5. Applications. —

5.1. En calcul différentiel. — (Rouvière) Lorsque f est $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ alors sa différentielle seconde est une forme quadratique, Hessienne. Lemme de Morse. Conditions nécessaires ou suffisantes d'existence d'extremum local ou global.

5.2. Coniques. — (Grifone) Définition d'une conique, classification. Dessins en annexe.

Leçon 171 - Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Références : De Seguins Pazzis, Caldero-Germoni, Grifone, Rouvière, Boyer, *secondaire :* Gourdon.

Développements : ellipsoïde de John-Loewner, étude de $O(p,q)$.

Cadre : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Formes quadratiques et formes bilinéaires. —

1.1. Définition et premières propriétés. — (De Seguins Pazzis) Définition d'une forme bilinéaire, d'une forme quadratique, de la forme polaire associée à q, formule de polarisation, exemple du produit de deux formes linéaires, de $\mathrm{Tr}(A\,{}^tB)$, définition de $\mathcal{Q}(E)$ l'espace vectoriel des formes quadratiques sur E.

1.2. Représentation matricielle. — (De Seguins Pazzis) Définition de la représentation matricielle de q dans une base donnée, exemple, cela donne un isomorphisme $\mathcal{Q}(E) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, corollaire sur la dimension de $\mathcal{Q}(E)$. Si A représente q, $b(x,y) = {}^tXAY$, formule de changement de bases, ainsi les matrices représentant q forment une classe de congruence de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1.3. Lien avec la dualité. — (De Seguins Pazzis) Définition du noyau d'une forme quadratique comme le noyau de $b_g : x \mapsto b(x,\cdot)$, le noyau de $(X,Y) \mapsto {}^tXAY$ est $\ker A$. Le rang de A associée à q est égale au rang de b_g et est le rang de q. Définition de non dégénérée, dégénérée, exemples. Théorème de Riesz.

2. Orthogonalité et isotropie. —

2.1. Orthogonalité. — (De Seguins Pazzis) Définition de l'orthogonalité entre deux vecteurs, orthogonale d'une partie de E, quelques petites propriétés, exemple de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{Tr}(XY)$, $\dim A + \dim A^\perp = \dim E$ dans le cas non dégénéré.

2.2. Isotropie. — (De Seguins Pazzis) Définition du cône isotrope, c'est un cône, il contient $\ker q$, mais n'est pas forcément égal : contre-exemple de $x^2 - y^2$. Définition d'un espace isotrope : $A \cap A^\perp \neq \emptyset$, anisotrope : $A \cap A^\perp = \emptyset$, lorsque A est anisotrope, $E = A \oplus A^\perp$.

3. Classification des formes quadratiques. —

3.1. Équivalence de forme quadratique. — (De Seguins Pazzis) Définition de l'équivalence de formes quadratiques, remarquer que cela revient à la congruence des matrices associées, invariance du rang et du déterminant par équivalence.

3.2. Réduction sous forme diagonale. — (De Seguins Pazzis) Définition d'une base orthogonales, forme de q et de A dans cette base, existence d'une base orthogonale, algorithme de Gauss analytique, exemple.

3.3. Classification sur $\mathbb{R}$. — Remarquer que sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$, la matrice de passage dans une base orthogonale peut être choisie orthogonale, d'après le théorème spectral.(De Seguins Pazzis) Classification sur $\mathbb{R}$, signature. Définition d'une forme quadratique positive, signature, définie positive, signature, existence d'une base orthonormée, inégalité de Cauchy-Schwarz, de Minkowski, théorème d'inertie de Sylvester. Définition d'une ellipsoïde, **dev** ellipsoïde de John-Loewner.

4. Groupe orthogonal. —

4.1. Notion de groupe orthogonal. — (De Seguins Pazzis) Définition du groupe orthogonal $O(q)$, cas de la norme euclidienne, identification matricielle, si $u \in O(q)$ $\det u = \pm 1$, définition de $SO(q)$, notations $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$.

4.2. Décomposition polaire. — (Caldero-Germoni) Décomposition polaire, maximalité du groupe orthogonal, l'exponentielle induit un homéomorphisme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, **dev** décomposition de $O(p,q)$.

4.3. Générateurs. — (Caldero-Germoni) Définition des réflexions et retournements orthogonaux, $SO_n(\mathbb{R})$ est engendré par les retournement orthogonaux, $O_n(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions orthogonales, $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

5. Applications en calcul différentiel. —

(Rouvière) Lorsque f est $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ alors sa différentielle seconde est une forme quadratique, Hessienne. Lemme de Morse. Conditions nécessaires ou suffisantes d'existence d'extremum local ou global.

6. Coniques. —

6.1. Coniques dans un espace affine. — (Boyer) Définition barycentrique d'une conique. Définition d'une conique affine comme lignes de niveaux, définition du foyer, d'une directrice, de l'axe focal et de l'excentricité, types de coniques en fonction de e et directions asymptotiques, caractérisation des coniques affines. (Grifone) Écriture d'une conique comme $q + \varphi + k$, classification des coniques.

6.2. Coniques projectives. — (Boyer) Définition d'une conique projective, point d'une conique, conique comme lignes de niveaux, intersection d'une conique avec une droite, tangentes d'une conique. Action de $\mathrm{PGL}(E)$ sur les coniques projectives, équivalences, classification des coniques projectives. Conique affine, hyperbole, parabole, ellipse.

Remarques : plutôt se concentrer sur le côté "réel" : aller vite sur la première partie et plutôt ne pas faire la deuxième.

Leçon 190 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Références : De Biasi, Perrin, Ulmer, Tauvel (Th. des corps), *secondaire :* Saux Picart, Caldero-Germoni.

Développements : loi de réciprocité quadratique, polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$.

Cadre : soit E, F deux ensembles finis.

1. Quelques outils de dénombrement. —

1.1. Ensembles finis. — (De Biasi) Définition du cardinal : E est de cardinal n s'il est en bijection avec $[|1, n|]$, si E et F sont en bijections alors $|E| = |F|$. Formule du crible, cas disjoints, application au nombre de nombres de trois chiffres contenant $0, 3, 7, 9$, cardinal d'un produit, de l'ensemble des fonctions de E dans F, n tirages avec remise de p boules, application au cardinal de l'ensemble des parties de E, application à l'alphabet braille. Principe des bergers, interprétation avec les moutons.

1.2. Arrangements et permutations. — (De Biasi) Définition d'un p arrangement de E $|E| = n$, remarquer que c'est le nombre d'injections de $[|1, p|]$ dans E, définition du nombre d'arrangements A_n^p, $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$, application à n-tirages de p boules sans remise. Nombre de permutations de E, remarquer que c'est le nombre de bijections de E, application aux nombres obtenus par permutation de 1,2,3,4,5,6.

1.3. Combinaisons. — (De Biasi) Définition d'une combinaison, de leur nombre $\binom{n}{p}$, $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, remarque sur le principe de double dénombrement très puissant, application au nombre de combinaisons avec répétitions, formules $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$, triangle de Pascal, $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$, formule du binôme de Newton, application au calcul des $S_{n,p} := \sum_{k=0}^{n} k^p$. Principe des tiroirs : si k ensembles contiennent au total n éléments, alors au moins l'un d'eux en contient $\lceil \frac{n}{k} \rceil$, interprétation avec les tiroirs, (Perrin) l'équation $ax^2 + by^2 = 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$, application à la réduction des formes quadratiques non dégénérées sur un corps finis (Caldero-Germoni).

2. Dénombrement en théorie des groupes et sur les corps finis. —

2.1. Utilisation en théorie des groupes. — (Perrin) Théorème de Lagrange, nombre de carrés sur $\mathbb{F}_p$. (Ulmer) Relations orbite-stabilisateur, formule des classes, app : (Perrin) théorème de Wedderburn, **dev** loi de réciprocité quadratique, formule de Burnside, application au nombre moyen de points fixes d'une permutation de $\mathfrak{S}_n$, point fixes d'un p-groupe, théorème de Cauchy.

2.2. Dénombrement sur les corps finis. — (Perrin) Cardinaux des groupes et sous-groupes linéaires sur $\mathbb{F}_q$, isomorphismes exceptionnels, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ admet un p-Sylow (le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures strictes), théorème de Sylow. (Caldero-Germoni) Cardinal des grassmanniennes.

3. Fonctions multiplicatives. —

3.1. Indicatrice d'Euler. — (Tauvel (Th. des corps)) Définition, définition de la multiplicativité, φ est multiplicative, expression de $\varphi(p^a) = p^{a-1}(p-1)$, expression explicite. (Perrin) $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$, $\mathbb{F}_q^*$ est cyclique.

3.2. Inversion de Möbius. — (Tauvel (Th. des corps)) Définition de la fonction de Möbius, elle est multiplicative, calcul de $\sum_{d|n} \mu(d)$, probabilité que deux entiers soient premiers entre eux (FGN Algèbre 1), formule d'inversion de Möbius. **dev** polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$.

4. Utilisation des séries génératrices. —

(Saux Picart) Définition, nombres de Catalan. (FGN Algèbre 1) Nombres de Bell, nombre de dérangements.

Leçon 201 - Espaces de fonctions. Exemples et applications.

Références : Hirsch-Lacombe, Zuily-Queffélec, Brezis, Bony, Amar-Matheron, Briane-Pagès, *secondaires :* Rudin.

Développements : théorème de Lax-Milgram et application, théorème de Riesz-Fischer, *espace de Bergman*, *théorème de Fourier-Plancherel*, *équation de Schrödinger*, *densité des polynômes orthogonaux.*

Introduction : on se pose souvent des questions de nature topologique sur un ensemble de fonctions, cette leçon y répond en partie, en effet on s'intéresse principalement aux propriétés topologiques des espaces et moins aux propriétés des points qui le constitue. Espaces H^1 vont un peu plus loin, espace de Bergman mix entre plusieurs espaces (intersection de deux). Les théorèmes de complétude sont très importants : donne de l'existence, nombreuses conséquences. Lorsque ce sont des espaces de Hilbert encore mieux. Discuter le choix sur les fonctions régulières.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Espaces de fonctions régulières. — Soit (X, d) un espace métrique compact et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert.

1.1. Espaces $\mathcal{C}^0(X)$. — (Hirsch-Lacombe) Définition de l'algèbre $\mathcal{C}^0(X)$, norme associée, cela en fait une algèbre de Banach. Théorème de Stone-Weierstrass réel et complexe, application aux fonctions lipschitziennes, aux polynômes sur un compact, aux polynômes trigonométriques, remarque sur l'existence de suites explicites dans les deux cas. Définition de l'équicontinuité d'une famille de $\mathcal{C}^0(X)$, théorème d'Ascoli, application pour montrer qu'un opérateur à noyau continu est compact.

1.2. Espaces $\mathcal{C}^k(\Omega)$. — (Zuily-Queffélec) Définition de $\mathcal{C}^k(\Omega)$, topologie de la convergence uniforme sur tout compact et distance associée, $\mathcal{C}^k(\Omega)$ est complet pour cette distance. Non normabilité de la topologie.

1.3. Espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. — (Bony) Définition de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, de la famille de semi-normes associées et de la distance induite, cela en fait un espace de Fréchet, exemple de la gaussienne et $\mathcal{C}_c^\infty$ est une partie dense de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Stabilité par dérivation, produit par un polynôme, inclusion dans L^1 et majoration de $||x^\alpha \partial^\beta \varphi||_1$. Définition de la transformée de Fourier, petites propriétés, c'est un isomorphisme continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui même, expression de son inverse. Équation de Schrödinger sur $\mathbb{R}$.

2. Espaces L^p. — Soit $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ un espace mesuré avec X localement compact.

2.1. Définition et premières propriétés. — (Hirsch-Lacombe ou Briane-Pagès) Définition de $L^p(\mu)$, de $||.||_p$, inégalités de Hölder et de Minkowski, $||.||_p$ est une norme sur L^p, **dev** théorème de Riesz-Fischer, convergence presque partout à une sous-suite près dans le cas d'une convergence en norme $||.||_p$, contre-exemples des implications. Inclusion topologique des L^p dans le cas d'une mesure finie. Densité dans L^p, $p < \infty$ de $L^1 \cap L^\infty$. (Beck-Malick-Peyré) Densité de $\mathcal{C}_c^0$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ (admis), application à $\tau_a f \to f$ dans L^p, densité de $\mathcal{C}_c^\infty$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, application à Riemann-Lebesgue.

2.2. Cas particulier de $L^2(X)$. — (Hirsch-Lacombe) Définition du produit scalaire sur L^2 qui est donc un Hilbert. Densité de $L^1 \cap L^2$ dans L^2 (on ne dit rien, c'est $\mathcal{C}_c^0 \subset L^1 \cap L^2$), application : **dev** théorème de Fourier-Plancherel (Rudin). Théorème de Riesz dans L^2 et application au théorème de Radon-Nikodym. (Beck-Malick-Peyré) **dev** Base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$ et base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ avec les polynômes orthogonaux.

2.3. Espaces de Sobolev $H^1(I)$ et $H_0^1(I)$. — (Brezis) Définition de $H^1(I)$, exemple de la valeur absolue sur $[-1, 1]$, définition du produit scalaire de H^1 qui en fait un espace de Hilbert, existence d'un représentant continu, injection continue dans $\mathcal{C}^0(\overline{I})$. Définition de H_0^1, c'est un Hilbert, caractérisation comme l'ensemble des fonctions de $H^1(I)$ nulles au bord, inégalité de Poincaré. **dev** Théorème de Lax-Milgram et résolution de problèmes elliptiques.

3. Espaces des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. —

3.1. Définition et premières propriétés. — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. (Amar-Matheron) Définition de $\mathcal{H}(\Omega)$, exemples de exp et log, formule de Cauchy, conséquences : $\mathcal{H}(\Omega)$ est stable par dérivation, et les fonctions holomorphes sont analytiques. Topologie de la convergence uniforme sur tout compact et distance associée, inégalités de Cauchy, théorème de Weierstrass ($\mathcal{H}(\Omega)$ est fermé et $f \mapsto f'$ est continue) et théorème de Montel (les bornés de $\mathcal{H}(\Omega)$ sont relativement compacts).

3.2. Espace de Bergman $B^2(\mathbb{D})$. — **dev** Définition, c'est un Hilbert pour la norme L^2, base hilbertienne.

Leçon 202 - Exemples de parties denses et applications

Références : Hirsch-Lacombe, Gourdon, Pommellet, Beck-Malick-Peyré, Briane-Pagès, *secondaire :* Rouvière.

Développements : densité des polynômes orthogonaux, théorème de Fourier-Plancherel, *espace de Bergman.*

Introduction : les parties denses sont un outil de démonstration importants puisqu'elles permettent de démontrer une propriété sur une partie puis de l'étendre à son adhérence. On peut aussi de cette manière construire des objets : intégrale de Riemann, transformée de Fourier, par prolongement de fonctions. Un aspect très important sont les bases hilbertiennes, elles étendent les bases en dimension finie. On a omis le critère de densité qui se déduit du théorème de Hahn-Banach.

Cadre : soit (E, d) un espace métrique, $A \subset E$, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Parties denses en dimension finie. —

1.1. Définition et premiers exemples dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. — (Gourdon) Définition d'une partie dense générale, définition séquentielle dans un espace métrique, exemple de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ denses dans $\mathbb{R}$, application à la détermination des morphismes de groupes de $\mathbb{R}$ (Pommellet), exemple de $\mathbb{Q}[i]$ dense dans $\mathbb{C}$. Description des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$, conditions pour que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ soit dense dans $\mathbb{R}$, application aux valeurs d'adhérence de $(\sin(n))_{n\geq 0}$ et à la densité de $\{e^{2i\pi n\theta} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ pour θ irrationnel (Pommellet).

1.2. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. — (Gourdon) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, application à $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ et à la différentielle du déterminant (Rouvière). (Beck-Malick-Peyré) Résultats de densité pour les matrices diagonalisables et trigonalisables, application à la non continuité de l'application qui à une matrice associe sa partie diagonalisable de la décomposition de Dunford, théorème de Cayley-Hamilton dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Parties denses dans les espaces métriques généraux. —

2.1. Prolongement de fonctions. — (Pommellet) Théorème de prolongement des application uniformément continues définies sur un espace dense à valeurs dans un espace complet, application à la construction de l'intégrale de Riemann sur les fonctions réglées (Hirsch-Lacombe), remarque sur l'utilisation pour montre l'unicité du complété d'un espace métrique.

2.2. Théorème de Baire. — (Gourdon) Énoncé, si f est dérivable alors f' est continue sur une sous-espace dense, densité des fonctions continues nulle part dérivable.

3. Parties denses dans les espaces de fonctions. —

3.1. Espace des fonctions continues sur un compact. — (Hirsch-Lacombe) Densité des fonctions étagées. Théorème de Stone-Weierstrass réel, applications aux fonctions lipschitziennes et aux polynômes, contre-exemple sur $\mathbb{R}$: une limite uniforme de polynômes est un polynôme (Gourdon), remarque sur l'existence d'une suite explicite, application : si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ vérifie $\int_0^1 f(t)t^n dt = 0$ pour tout n, $f = 0$ (Gourdon). Théorème de Stone-Weierstrass cas complexe, application aux polynômes trigonométriques, remarque sur le théorème de Fejér : suite explicite. (Dym-McKean) Équation de la chaleur sur le cercle.

3.2. Espaces L^p. — (Briane-Pagès) Densité des fonctions étagées intégrables dans $L^p(\mu)$, $p < +\infty$, densité des fonctions en escalier à support compact et des fonctions continues à support compact dans $L^p(\mathbb{R})$, application à $\tau_a f \to f$ dans L^p, remarquer que $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2. **dev** Théorème de Fourier Plancherel. Densité des fonctions étagées dans L^∞. Dans le cas de la mesure de Lebesgue, séparabilité de L^p, $p < \infty$ et non séparabilité de L^∞. (Beck-Malick-Peyré) Densité de $\mathcal{C}_c^\infty$ dans L^p. Application au lemme de Riemann Lebesgue.

4. Espaces de Hilbert. —

(Hirsch-Lacombe) Théorème du supplémentaire orthogonal, critère de densité. Définition d'une base hilbertienne, théorème de Bessel-Parseval, expression d'un vecteur dans une base hilbertienne. (Beck-Malick-Peyré) Exemple des polynômes trigonométriques dans L^2, formule de Parseval. Définition de l'espace L^2 à poids $L^2(I, \rho)$ et des polynômes orthogonaux, **dev** c'est une base hilbertienne sous certaines conditions, exemple des polynômes de Hermite, conséquence pour une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. Définition de $B^2(\mathbb{D})$, de $(e_n)_n$, **dev** $B^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert et $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de cet espace (sans référence).

Leçon 203 - Utilisation de la notion de compacité

Références : Gourdon, Hirsch-Lacombe, Zuily-Queffélec, Brézis, Pommellet, *secondaire :* Nourdin.

Développements : théorème de Hadamard-Lévy, optimisation dans un Hilbert.

Introduction : de nombreux résultats utilisent la compacité dans le cadre général. La compacité sur un espace métrique est une notion forte puisqu'elle fournit l'existence d'un élément : une limite à sous-suite près, c'est pourquoi on cherche à caractériser les parties compactes. Dans un EVN de dimension fini cela se comporte bien, en dimension finie beaucoup moins (Riesz), mais on a des résultats sur les espaces de fonctions notamment.

Cadre : Soit (X, d) un espace métrique.

1. Définition et premières propriétés. —

1.1. Définition. — (Gourdon) Définition avec la propriété de Borel-Lebesgue, $\mathbb{R}$ n'est pas compact, exemples et contre-exemples (Queffélec), un compact vérifie la propriété des fermés emboités, 1er théorème de Dini. (Queffélec) Théorème de Mercer.

1.2. Théorème de Bolzano-Weierstrass et conséquences. — (Gourdon) Théorème de Bolzano-Weierstrass, les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés. **dev** Théorème de Hadamard-Lévy. (Nourdin) $(x_n)_n$ converge ssi e^{itx_n} converge, donc la limite en loi d'une v.a. gaussienne est une v.a. gaussienne. (Pommellet) Graphe fermé compact. (Hirsch-Lacombe) Procédé d'extraction diagonale et Tychonoff dénombrable avec la distance produit.

2. Fonctions continues sur un compact. —

2.1. Problèmes d'extremums. — (Gourdon) L'image continue d'un compact est un compact, c-ex de sin, si $f : X \to Y$ est bijective continue sur X compact c'est un homéomorphisme, f continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. Ellipsoïde de John-Loewner. Équivalence des normes en dimension finie et corollaires. Théorème de Rolle, des accroissements finis, de Darboux. Si K est compact et F fermé disjoint de K, il existe $x \in K$ tel que $\mathrm{d}(x, F) = \inf \mathrm{d}(y, F) = \mathrm{d}(K, F)$, en particulier la distance entre un fermé et un compact disjoints est non nulle. (Gourdon algèbre p. 244) Diagonalisation en base orthonormée des endomorphismes autoadjoints. (Demailly) Théorème de sortie de tout compact.

2.2. Théorème de Heine. — (Gourdon) Théorème de Heine, conséquence pour les fonctions périodiques, de limite finie en $\pm\infty$, second théorème de Dini : une suite de fonctions continues croissantes qui converge simplement vers une fonction continue converge uniformément. (Zuily-Queffélec) Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein. (Pommellet) Une fonction continue sur un segment est limite uniforme de fonctions affines par morceaux.

2.3. Théorèmes de point fixe. — (Rouvière) Théorème du point fixe avec $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ lorsque X est compact, c-ex lorsque X n'est pas compact, cas $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ avec hypothèse de convexité, c-ex des rotations.

2.4. Théorème de Stone-Weierstrass. — (Hirsch-Lacombe) Partie séparante, partie réticulée, densité d'une partie séparante réticulée contenant les constantes, Stone Weierstrass cas réel, Stone-Weierstrass cas complexe, densité des polynômes, des fonctions lipschitziennes, des polynômes trigonométriques, application (Gourdon p.286) : si $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ vérifie $\int_0^1 f(t)t^n dt = 0$ pour tout n, $f = 0$.

3. Compacité dans les evn de dimension infinie. —

(Hirsch-Lacombe) Théorème de Riesz, définition de l'equicontinuité, théorème d'Ascoli, exemple des fonctions α-hölderiennes. (Zuily-Queffélec) Théorème de Cauchy-Arzela-Peano. (Demailly) Exemple de $y' = 3|y|^{2/3}$. (Zuily-Queffélec) Théorème des familles normales de Montel, application au théorème de Cartan. **dev** Optimisation dans un Hilbert.

Leçon 204 - Connexité. Exemples et applications.

Références : Queffélec, Gourdon, Caldero-Germoni, Gonnord et Tosel 1996, Rudin, Amar-Matheron, *secondaires :* Zuily-Queffélec, Zavidovique, Mneimné-Testard, Rouvière.

Développements : théorème de Hadamard-Lévy, simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$.

Introduction : La connexité est une notion géométrique qui a un intérêt fort en analyse, puisqu'elle permet le passage du local au global. Il y a des notions plus fortes que la connexité : connexité par arcs, simple connexité, étoilé, convexité. On verra aussi une application pour montrer que $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

1. Espaces connexes. — (Queffélec)

1.1. Connexité. — Définition-équivalence avec les ouverts, les fermés, et les parties ouvertes et fermées, exemple du vide et des singletons, équivalence avec $f : X \to \mathbb{Z}$ continue $\Rightarrow f$ constante, définition d'une partie connexe, $[0, 1]$ est connexe, les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe, lemme du passage des douanes.

1.2. Stabilité. — Stabilité par union dans le cas d'un point d'intersection, c-ex de deux segments disjoints de $\mathbb{R}$, stabilité par union dans le cas d'une chaine, c-ex d'une intersection de connexes non connexe (cercle et segment). L'image par une application continue d'un connexe est connexe, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes. Équivalence entre $X = \prod_i X_i$ connexe et X_i connexe $\forall i$, exemple d'un produit de segments dans $\mathbb{R}^n$, si A connexe et $A \subset B \subset \overline{A}$ alors B connexe.

1.3. Composantes connexes. — Définition par classes d'équivalences, écriture comme l'union des connexes contenant x, les composantes connexes sont fermées, si X s'écrit comme l'union disjointe d'ouverts connexes non vides, alors les ouverts sont les composantes connexes de X, un homéomorphisme envoie une composante connexe sur une composante connexe. Théorème de Jordan (admis).

1.4. Connexité par arc. — Définition, connexe par arc $\Rightarrow$ connexe, c-ex de $(x, sin(1/x))$, réciproque vraie pour les ouvert des evn. Exemple de convexe $\Rightarrow$ étoilé $\Rightarrow$ connexe par arc. Exemple de $\mathbb{S}^n$.

2. Passage du local au global. —

2.1. Calcul différentiel. — (Zuily-Queffélec) **dev** Théorème de Hadamard-Lévy. (Rouvière) Si f est localement constante sur X connexe, alors f est constante sur X (sans référence), si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est C^1, Ω ouvert connexe et $df = 0$ en tout point, alors f est constante sur Ω, c-ex de $\arctan(x) + \arctan(1/x)$ constante sur les deux composantes connexes de $\mathbb{R}^*$, app : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$ admet une dérivée n-ième nulle alors f est une fonction polynomiale.

2.2. Analyse réelle. — (Queffélec) Théorème des valeurs intermédiaires, théorème de Brouwer en dimension 1, c-ex pour l'image inverse avec $x \mapsto x^2$. (Gourdon) Théorème de Darboux, exemples de $x^2 \sin(1/x)$.

2.3. Analyse complexe. — (Rudin) Théorème des zéros isolés, principe du prolongement analytique. (Amar-Matheron) Prolongement sur $\mathbb{C}\backslash -\mathbb{N}$ de la fonction Γ, prolongement de ζ sur $\mathbb{C}$. Principe du maximum. Théorème de d'Alembert-Gauss.

3. Connexité dans les espaces de matrices. — Ici $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1. Connexité en algèbre linéaire. — (Caldero-Germoni) Connexité par arcs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, composantes connexes de l'espace des projecteurs. (Zavidovique) Surjectivité de l'exponentielle matricielle sur $\mathbb{C}$, cas réel.

3.2. Groupes topologiques. — (Caldero-Germoni) Définition d'un groupe topologique, $\mathrm{GL}_n(K)$ est un groupe topologique, cor sur les sous-groupes classiques : $\mathrm{SL}_n(K), O_n(K)$ et $SO_n(K)$, si G est un groupe topologique et $H < G$ tel que H et G/H sont connexes, alors G est connexe, app : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$ est connexe, composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, remarquer qu'on peut retrouver la connexité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ par la même méthode, connexité de $SO_n(K)$. (Mneimné-Testard) connexité de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. (Caldero-Germoni) **dev** engendrement de $SO_3(\mathbb{R})$, simplicité.

Leçon 205 - Espaces complets. Exemples et applications.

Références : Gourdon, Queffélec, Brézis, Hirsh-Lacombe, Rouvière, *secondaires :* Zuily-Queffélec, Saint-Raymond, Wagschal.

Développements : théorème de Riesz-Fischer, théorème de Lax Milgram et application, *espace de Bergman*, *optimisation dans un Hilbert.*

Introduction : l'un des principaux intérêts de la complétude est qu'elle fournit l'existence d'éléments, grâce à l'existence d'une limite d'une suite de Cauchy. On peut ainsi citer les théorèmes de prolongement, de point fixe, de Riesz. Le plan s'articule ainsi : on présente les propriétés topologiques des espaces complets, puis quelques théorème et leurs conséquences. On s'attardera également sur des espaces à la structure particulière qui sont complets et aux résultats que cela apporte : espaces de Banach et de Hilbert, dans ces derniers, le théorème d'existence de Riesz fournit l'existence de solutions d'équations aux dérivées partielles dans certains espaces.

Cadre : soit (X, d) un espace métrique.

1. Définition et premières propriétés. —

1.1. Suite de Cauchy. — (Saint Raymond et Gourdon) Définition, une suite de Cauchy est bornée, une suite convergente est de Cauchy, une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge, l'image par une application uniformément continue d'une suite de Cauchy est une suite de Cauchy. Contre-exemple d'une suite de Cauchy qui ne converge pas, et dont l'image pas une application continue n'est pas de Cauchy.

1.2. Espaces complets : premières propriétés. — (Saint Raymond et Gourdon) Définition, théorème des fermés emboités, un produit fini de complets est complet, les sous-espaces complets d'un complet sont les fermés, métrique compact implique complet, exemple de $\mathbb{R}$ et contre-exemple de $\mathbb{Q}$, existence d'un complété. (Queffélec) Exemple avec arctan pour montrer que c'est une notion métrique. (Zuily-Queffélec) Exemple de $\mathcal{C}_b^k(\Omega)$. (Saint Raymond) Exemples des fonctions holomorphes.

1.3. Exemple des espaces de Banach. — (Saint Raymond et Gourdon) Définition, caractérisation pas la convergence absolue des séries, exemple des ev de dim finie, exemple de $\mathcal{L}_c(E, F)$ lorsque F est un Banach, inverse de $\mathrm{Id} - u$ lorsque $||u|| < 1$, $\mathrm{GL}(E)$ est ouvert. (Brezis) Exemple des L^p : **dev** théorème de Riesz-Fischer, exemple des l^p.

2. Théorèmes fondamentaux. —

2.1. Théorème de prolongement. — (Pommellet) Énoncé du théorème de prolongement. Définition de l'intégrale de Riemann sur les fonctions continues, unicité du complété d'un espace métrique. (Rudin) Théorème de Fourier-Plancherel. (Willem) Application au calcul de $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{sinc}^2(x)\, dx = \pi$.

2.2. Théorème du point fixe. — (Rouvière) Théorème du point fixe de Banach-Picard, c-ex pour tester les hypothèses, reste vrai quand une itérée est contractante. Théorème de Cauchy-Lipschitz. Théorème d'inversion locale, théorème des fonction implicites, remarque sur l'application au théorème des sous-variétés.

2.3. Théorème de Baire. — (Gourdon) Énoncé, si f est dérivable alors f' est continue sur une sous-espace dense, densité des fonctions continues nulle part dérivable, un evn à base dénombrable n'est pas complet, exemple de $\mathbb{R}[X]$, théorème de Banach Steinhaus et application aux séries de Fourier. Théorème de l'application ouverte, de l'isomorphisme de Banach. (Brezis) Théorème du graphe fermé, (Wagschal) un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(0, 1)$ contenu dans $\mathcal{C}^1([0, 1])$ est de dimension finie.

3. Espaces de Hilbert. —

3.1. Définition, exemples. — (Hirsch-Lacombe) Définition, exemple de L^2, théorème de projection sur un convexe fermé. (Beck-Malick-Peyré) Polynômes de meilleure approximation, existence de l'espérance conditionnelle. Théorème du supplémentaire orthogonal, caractérisation des s.e.v. denses, théorème de Riesz. **dev** Optimisation dans un Hilbert. Définition d'une base hilbertienne, exemple de $l^2(\mathbb{N})$, **dev** espace de Bergman.

3.2. Résolution d'équations différentielles. — (Brezis) Définition de H^1, c'est un Hilbert, définition de H_0^1, c'est un Hilbert. **dev** (Hirsch-Lacombe) Théorème de Lax-Milgram. (Brezis) application à la résolution d'une EDPE.

Remarques : on aurait pu parler de bases hilbertiennes, mais ce n'est pas spécifique à la complétude.

Leçon 207 - Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

Références : Rombaldi (Analyse réelle), Pommellet, Zuily-Queffélec, Brézis, Demailly, Beck-Malick-Peyré, *secondaires :* Amar-Matheron, Willem, Rudin, Rouvière, Hauchecorne.

Développements : théorème de Fourier-Plancherel, densité des polynômes orthogonaux.

1. Aspect topologique. —

1.1. Prolongement par continuité. — (Rombaldi (Analyse réelle)) Théorème de prolongement par continuité, exemples de $x\sin(1/x)$ et $\sin(x)/x$ en 0, contre-exemple de $\sin(1/x)$ en 0.

1.2. Prolongement par densité. — (Rudin) Continuité de l'opérateur de translation de $\mathbb{R}$ dans L^p. (Pommellet) Théorème de prolongement des applications uniformément continues définies sur un sous-espace dense, application à l'intégrale de Riemann des fonctions réglées, et à l'unicité à isométrie près du complété d'un espace métrique. (Rudin) **dev** Théorème de Fourier Plancherel. (Willem) Application au calcul de $\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sinc}^2(x)\,dx = \pi$.

1.3. Prolongement sur des fermés. — (Zuily-Queffélec) Théorème de prolongement de Tietze, application : si toute fonction continue de X dans $\mathbb{R}$ est bornée, alors X est compact.

1.4. Prolongement de formes linéaires. — (Brezis) Théorème de Hahn-Banach (cas séparable), prolongement des applications linéaires continues, norme d'un vecteur avec les formes linéaires continues, critère de densité.

2. Prolongement et différentiabilité. —

2.1. Prolongement des fonctions régulières. — (Pommellet) Théorème de prolongement de la dérivée, contre-exemple sans continuité. Application à $\exp(-1/x^2)$, existence de fonctions plateaux. (Rouvière) Théorème de Borel et application au prolongement des applications $\mathcal{C}^\infty$ sur un segment.

2.2. Prolongement et équations différentielles. — (Demailly) Définition d'une équation différentielle, solution, prolongement de solution, solution maximale. Toute solution admet un prolongement maximal. Théorème de Cauchy-Lipschitz local. Théorème de sortie de tout compact. (Zuily-Queffélec) Critère de prolongement pour un intervalle borné, exemple. (Pommellet) Si $y(t_1) = y(t_2)$ la solution est globale périodique.

3. Prolongement et analyticité. —

3.1. Principe du prolongement analytique. — (Beck-Malick-Peyré) Théorème des zéros isolés, principe du prolongement analytique. Les fonctions holomorphes sont analytiques. Prolongement de ζ à $\{\Re(z) > 0\}$ (Amar-Matheron). Il existe une unique fonction holomorphe telle que $f(1/n) = 1/n$, contre-exemple qui suit. Prolongement méromorphe de Γ. Transformée de Fourier de la gaussienne. **dev** Densité des polynômes orthogonaux. (Amar-Matheron) Formule des compléments, prolongement de ζ à $\mathbb{C}$.

3.2. Prolongement des séries entières. — (Hauchecorne) Contre-exemples pour le convergence sur le disque de convergence. (Gourdon) Théorème d'Abel angulaire et Taubérien faible, application à $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}/n = \log(2)$. (Zuily-Queffélec) Définition des points singuliers, réguliers, il existe un moins un point singulier, 1 est singulier pour les séries à termes positifs.

Leçon 208 - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Références : Saint Raymond, Gourdon, Hirsch-Lacombe, Pommellet, Hauchecorne, *secondaires :* Brézis, Zuily-Queffélec, Farault, Wagschal.

Développements : espace de Bergman, optimisation dans un Hilbert, *théorème de Riesz-Fischer*, *théorème de Fourier-Plancherel*.

Introduction : de nombreux espaces usuels en mathématiques sont des EVN, tels que les l^p, L^p, et d'autres espaces de fonctions notamment. Lorsque les EVN sont complets pour la norme on a beaucoup de résultats d'existence. En dimension finie ca se passe très bien, en dimension infinie moins, ex théorème de Riesz. Caractérisation simple de la continuité pour les applications linéaires. La structure préhilbertienne et la complétude pour la norme induite donne des résultats fondamentaux : th. de Riesz, Lax-Milgram.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. Définition et premières propriétés. —

1.1. Espaces vectoriels normés. — (Saint Raymond) Définition d'une norme, d'un espace vectoriel normé, remarquer que ça définit une distance, exemple des normes 1, 2 et ∞ sur $\mathbb{K}^n$, de la norme infinie sur $\mathcal{C}(K)$, K compact, contre-exemples de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ (Zuily-Queffélec). Définition de normes équivalentes, elles définissent alors la même topologie, exemple de $||.||_1$ et $||.||_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. (Hauchecorne) Contre exemple de normes non équivalentes, non comparables.

1.2. Applications linéaires continues. — (Saint Raymond) Équivalences sur la continuité d'une application linéaire f, espace $\mathcal{L}_c(E,F)$. (Pommellet) Exemple de $\Phi : f \mapsto \int fg$ sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, de $f \mapsto (c_n(f))_n$ pour f continue 2π périodique, (Hauchecorne) contre exemple d'une application linéaire non continue. Définition de la norme subordonnée, c'est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$, expression comme un sup sur la boule unité, (Pommellet) exemple de $||\Phi||$, (Hauchecorne) exemple d'une application continue dont la norme n'est pas atteinte. La norme est sous-multiplicative, application à la convergence de la suite récurrente $X_{n+1} = AX_n$ lorsque $||A|| < 1$, théorème de Hahn-Banach, application à l'expression de $||x||$. (Gourdon) Définition du dual topologique, caractérisation avec le noyau fermé, exemple de l'identification de $(l^1)'$ avec l^∞.

1.3. Cas de la dimension finie. — (Gourdon) Équivalence des normes en dimension finie, ainsi (et contre exemples du Hauchecorne), toute application linéaire sur E de dimension finie est continue, tout e.v.n. de dimension finie est complet, tout sous-espace de dimension finie d'un e.v.n. est fermé, en dimension finie les compacts sont les fermés bornés, théorème de Riesz.

2. Espaces de Banach. —

2.1. Définition et premières propriétés. — (Saint Raymond) Définition d'un espace de Banach, si F est un Banach, $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un Banach, donc tout E' est un Banach, exemples de $l^p(\mathbb{N})$ avec la norme $||.||_p$, de $\mathcal{C}(K)$, K compact avec la norme infinie, de $c_0(\mathbb{N})$ les suites tendant vers 0 muni de la norme infinie. Caractérisation avec la convergence normale des séries, application à la définition de l'exponentielle, cor : l'ensemble des inversibles est un ouvert et l'inverse est continue. (Pommellet) Théorème de prolongement des applications linéaires continues définies sur un sous-espace dense. **dev** Théorème de Fourier-Plancherel. (Hirsch-Lacombe) Application à la définition de l'intégrale de Riemann de fonctions réglées sur $[a,b]$ à valeurs dans un Banach.

2.2. Théorie de Baire. — (Gourdon) Théorème de Baire, un evn à base dénombrable n'est pas complet, exemple de $\mathbb{R}[X]$, théorème de Banach Steinhaus et application aux séries de Fourier, la limite simple d'applications linéaires continues sur un Banach est linéaire et continue. Théorème de l'application ouverte, de l'isomorphisme de Banach. (Brezis) Théorème du graphe fermé, (Wagschal) un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(0,1)$ contenu dans $\mathcal{C}^1([0,1])$ est de dimension finie.

2.3. Exemple : espaces L^p. — (Hirsch-Lacombe) Définition de L^p, L^∞, des normes $||.||_p$, inégalité de Hölder, de Minkowski, $||.||_p$ définit une norme sur L^p, **dev** théorème de Riesz-Fischer.

3. Espaces de Hilbert. —

3.1. Espaces préhilbertiens. — (Hirsch-Lacombe) Définition d'un espace pré-hilbertien, exemple de $\mathbb{K}^n$, inégalité de Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme, théorème de Pythagore.

3.2. Espaces de Hilbert. — (Hirsch-Lacombe) Définition d'un espace de Hilbert, exemples de $l^2(\mathbb{N})$, de L^2, de H_0^1, contre exemple de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})$, théorème de projection sur un convexe fermé. (Beck-Malick-Peyré) Polynômes de meilleure approximation, existence de l'espérance conditionnelle. (Hirsch-Lacombe) Théorème du supplémentaire orthogonal. Théorème de représentation de Riesz, définition de l'adjoint d'un opérateur, égalité $||T|| = ||T^*||$, remarque sur les opérateurs autoadjoints. Théorème de Lax-Milgram et application. **dev** Optimisation dans un Hilbert.

3.3. Bases hilbertiennes. — (Hirsch-Lacombe) Définition, caractérisation via Bessel, égalité $x = \sum_i (x|e_i)e_i$. (Farault)Application au calcul de sommes. Exemples des séries de Fourier, de quelques polynômes orthogonaux (Hirsch-Lacombe). **dev** Espace de Bergman.

Leçon 209 - Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

Références : Gourdon, Hirsch-Lacombe, Beck-Malick-Peyré, Demailly, Farault, *secondaires :* Rombaldi (Interpolation), Li, Dym-McKean.

Développements : densité des polynômes orthogonaux, équation de la chaleur.

Introduction : l'approximation a deux intérêts : la preuve de certains résultats théorique qui utilise une suite convergente de polynômes et en analyse numérique où on utilise l'interpolation. On approche par des polynômes parce qu'on sait facilement calculer avec. Remarque historique sur les séries de Fourier. Il y a différents type d'approximation : l'approximation, où on cherche un polynôme proche en un certain sens : approximation locale avec proximité locale, fonctions DSE : suite de polynômes qui convergent uniformément, on connait explicitement la suite et chaque terme est obtenu en rajoutant un monôme au précédent, approximation uniforme dans $\mathcal{C}^0$ avec résultat de densité, la aussi on connait des formes explicites : Bernstein, approximation L^2 dans les L^2 à poids. Il y a également l'interpolation : trouver un polynôme qui coïncide avec la fonction en certains points, application en ANUM. Attention, même pas de convergence simple (Runge). Enfin approximation par des polynômes trigo : nombreuses applications, historique, Eq de la chaleur.

Cadre : soit $f : I \to \mathbb{R}$ un fonction où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Approximation polynomiale. —

1.1. Approximation locale. — (Gourdon) Théorème de Taylor Young, réciproque vraie pour $n = 1$ et c-ex de $x \mapsto x^3 \sin(1/x)$, application au calcul de développements limités, théorème de Taylor reste intégral, théorème de Taylor Lagrange, remarque sur l'application aux DSE, app : inégalités de Kolmogorov : $||f^{(k)}||_\infty \leq 2^{\frac{k(n+1-k)}{2}} ||f||_\infty^{1-\frac{k}{n+1}} ||f^{(n+1)}||_\infty^{\frac{k}{n+1}}$.

1.2. Fonctions développables en série entière. — (Gourdon) Définition d'être développable en série entière autour d'un point : être somme d'une série entière. (Sans référence) critère : il existe $M, a \geq 0$, $\forall x \in]-R, R[$, $|f^{(n)}(x)| \leq Ma^n$. Dire qu'on est alors somme de sa série de Taylor, unicité du DSE, contre exemple de $x \mapsto e^{-1/x}$ pour montrer que la série de Taylor peut converger sans que f soit DSE. Caractère $\mathcal{C}^\infty$ et DSE de f' et F, application à la résolution d'EDO, exemple de $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$ de solution $\frac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2}$. Dire que les fonctions holomorphes sont DSE.

1.3. Densité dans $\mathcal{C}^0(I)$. — (Hirsch-Lacombe) Théorème de Stone-Weierstrass, théorème de Weierstrass, cas de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ $X \subset \mathbb{R}$ compact et des polynômes à n-variables. Polynômes de Bernstein (preuve Zuily-Queffélec). (Gourdon) Application : si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ vérifie $\int_0^1 f(t)t^n dt = 0$ pour tout n, $f = 0$.

1.4. Densité dans $L^2(I, \rho)$. — (Beck-Malick-Peyré) Définition de $L^2(I, \rho)$, c'est un espace de Hilbert, il existe une unique famille $(P_n)_n$ de polynômes orthogonaux, exemple des polynômes de Hermite et de Legendre, **dev** sous une bonne hypothèse ils forment une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$. (Demailly) Remarque sur l'utilisation en intégration numérique.

2. Interpolation polynomiale. — (Demailly)

2.1. Interpolation de Lagrange. — Existence et unicité d'un polynômes interpolateur, définition des polynômes d'interpolation de Lagrange et expression de l'interpolation polynomiale d'une fonction avec ceux-ci, formule d'erreur. Résultat de convergence uniforme dans le cas DSE de rayon de convergence suffisant, (Gourdon) phénomène de Runge, points de Tchebychev, convergence uniforme en les points de Tchebychev pour une fonction lipschitzienne.

2.2. Méthode de quadrature. — Définition de la méthode de Newton-Cotes élémentaire, composée, exemple de la méthode (élémentaire) des trapèzes, de Simpson (dessins en annexe), convergence quand $k \to +\infty$ (le nombre de compositions), erreur élémentaire (Rombaldi (Interpolation)), remarque sur la non convergence en générale lorsque $l \to +\infty$ (le degré d'interpolation) due au phénomène de Runge.

3. Approximation par des polynômes trigonométriques. — (Zuily-Queffélec)

3.1. Polynômes trigonométriques et séries de Fourier. — Définition d'un polynôme trigonométrique, les $(e_n)_n$ sont une famille orthogonale, des coefficients de Fourier d'une fonction $L^2(\mathbb{T})$, de D_N, forme de $D_N * f$, définition de K_N, forme de $K_N * f$.

3.2. Convergence uniforme. — Théorème de Fejér, application à : si la SdF de f converge alors elle converge simplement vers f, si f est $\mathcal{C}^1$ elle est somme de sa série de Fourier qui converge normalement, remarque sur la densité des polynômes trigonométriques, et (e_n) est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$. (Farault) Égalité de Parseval, applications au calcul de sommes. (Dym-McKean) **dev** Équation de la chaleur sur le cercle.

3.3. Convergence ponctuelle. — Théorème de Dirichlet, cas $\mathcal{C}^1$ par morceaux, application au calcul de $\sum_n \sin(n)/n$.

Leçon 213 - Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et application.

Références : Hirsch-Lacombe, Beck-Malick-Peyré, *secondaires :* FGN Algèbre 3, Farault, Amar-Matheron.

Développements : théorème de Lax-Milgram et application, optimisation dans un Hilbert, *espace de Bergman*, *densité des polynômes orthogonaux.*

Introduction : les espaces de Hilbert possèdent des propriétés très fortes qui proviennent du fait qu'il y a une géométrie dessus et que l'espace est complet pour la norme induite : beaucoup plus forts que des Banach ou des pré-hilbertiens. Central : théorème de projection : c'est un théorème d'existence, aux corollaires forts, comme le critère de densité. Autre théorème d'existence très important : le théorème de Riesz : application à la résolution d'EDP. Caractère très important des Hilbert (existe sans complétude) : les bases hilbertiennes, qui ressemblent à des bases finies.

Cadre : soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un espace pré-hilbertien et H un espace de Hilbert.

1. Espaces préhilbertiens et orthogonalité. — (Hirsch-Lacombe)

1.1. Espaces pré-hilbertien, espaces de Hilbert. — Définition d'un produit scalaire, d'une espace pré-hilbertien, exemple de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R},\mathbb{K})$ muni de $(f|g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx$, de $L^2(\mathbb{R})$ et $l^2(\mathbb{N})$. Inégalité de Cauchy-Schwarz, corollaire : $||f|| = \sqrt{(f|f)}$ définit une norme, identité du parallélogramme et de polarisation. Définition d'un espace de Hilbert, exemple de $L^2(\mathbb{R})$, $l^2(\mathbb{N})$, et de $H^1(0,1)$, contre-exemple de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R},\mathbb{K})$ et de $c_{00}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ les suites à support compact (sans référence).

1.2. Orthogonalité. — Définition de l'orthogonalité de deux vecteurs, famille orthogonale, orthonormée, théorème de Pythagore, remarquer d'une famille orthogonale est libre, procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schimdt, définition de l'orthogonale d'une partie A, c'est un sous-espace vectoriel fermé, $A^\perp = (\overline{A})^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$ et $\overline{A} \subset (A^\perp)^\perp$.

2. Théorème de projection et conséquences. —

2.1. Théorème de projection sur un convexe fermé. — (Hirsch-Lacombe) Théorème. (FGN Algèbre 3 p. 30) Minimisation en $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ de $\int_0^{+\infty} e^{-x}(1 + a_1x + \cdots + a_nx^n)^2\,dx$. (Beck-Malick-Peyré) Polynômes de meilleure approximation, existence de l'espérance conditionnelle. (Hirsch-Lacombe) Théorème du supplémentaire orthogonal et caractérisation de la densité avec l'orthogonal, conséquence : $\overline{F} = (F^\perp)^\perp$. Contre exemple des suites à support compact.

2.2. Théorème de Riesz. — (Hirsch-Lacombe) Théorème de Riesz, définition de l'adjoint, $(TS)^* = S^*T^*$, c'est une isométrie involutive, exemple dans $\mathbb{R}^n$ et des opérateurs à noyau. Définition de la convergence faible, la convergence forte implique la convergence faible, **dev** compacité faible et optimisation dans un Hilbert, stabilité de la convergence faible par opérateur continu. **dev** Théorème de Lax-Milgram et application.

3. Bases hilbertiennes, exemples. —

3.1. Définition et premières propriétés. — (Hirsch-Lacombe) Définition d'une base hilbertienne, H est séparable si et seulement si il admet une base hilbertienne au plus dénombrable, dans la suite, on considère H séparable, exemple de la base canonique dans $l^2(\mathbb{N})$, expression de la projection orthogonale dans ce cadre. Théorème de Bessel-Parseval, expression d'un vecteur dans une base hilbertienne.

3.2. Séries de Fourier dans $L^2(\mathbb{T})$. — (Beck-Malick-Peyré) Définition de $L^2(\mathbb{T})$, de $(e_n)_n$, de $c_n(f) = (e_n|f)$, les $(e_n)_n$ forment une famille orthonormale, théorème de Fejér, conséquence : la famille $(e_n)_n$ est totale et c'est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$. Corollaires : dans $L^2(\mathbb{T})$, $f = \sum_n c_n(f)e_n$ et formule de Parseval, (Farault) Application au calcul de certaines sommes.

3.3. Polynômes orthogonaux. — (Beck-Malick-Peyré) Définition de l'espace L^2 à poids $L^2(I,\rho)$, existence et unicité d'une famille de polynômes orthogonaux, **dev** c'est une base hilbertienne sous certaines conditions, exemple des polynômes de Hermite, autres exemples (Farault), conséquence pour une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

3.4. Espace de Bergman. — (Amar-Matheron) Définition de $B^2(\mathbb{D})$, de $(e_n)_n$, **dev** $B^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert et $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de cet espace.

Leçon 214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

Références : Rouvière, Mneimné-Testard, Lafontaine, Beck-Malick-Peyré, *secondaire :* Zavidovique.

Développements : théorème de Hadamard-Lévy, théorème des extrema liés.

Introduction : les applications principales de ces théorème sont en géométrie différentielle, avec les sous-variétés en particulier. On peut aussi citer le théorème des extrema liés.

Cadre : soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1. Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. —

1.1. Théorème d'inversion locale. — (Rouvière) Définition d'un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme, théorème d'inversion locale, reformulation en termes de solutions de $f(x) = y$ et/ou remarquer que cela revient à vérifier la non annulation du déterminant jacobien. Exemple d'application, contre-exemple sans l'hypothèse $\mathcal{C}^1$. Remarque sur l'extension au cas $\mathcal{C}^k$. Théorème d'inversion globale, contre-exemple de l'exemple précédent. **dev** Théorème de Hadamard-Lévy, exemple d'application (sans référence).

1.2. Théorème des fonctions implicites. — (Rouvière) Théorème des fonctions implicites, exemple du cercle, expression de la dérivée de la fonction implicite, exemple du cercle, version $\mathcal{C}^k$ du théorème. (Gourdon) Calcul d'un développement limité de φ. Remarque sur l'équivalence avec le théorème d'inversion locale. Application au folium de Descartes.

2. Applications des théorèmes. —

2.1. Applications en algèbre linéaire. — (Beck-Malick-Peyré) Existence d'une racine k-ème d'une matrice suffisamment proche de 0. (Mneimné-Testard) L'exponentielle est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme entre un voisinage de 0 et un voisinage de Id, application : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ n'a pas de sous-groupes arbitrairement petit et $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective (Zavidovique).

2.2. Application en géométrie différentielle. — (Rouvière) Lemme de Morse et application à la position relative d'une surface et de son plan tangent. Définition d'une immersion, d'une submersion, lemme de l'immersion, lemme de la submersion.

2.3. Fonctions implicites et régularité de solutions. — (Rouvière) Expression de x comme fonction régulière de p, q lorsque x est solution simple de $x^3 + px + q$. (Beck-Malick-Peyré) Régularité d'une racine simple d'un polynôme, application : l'ensemble des polynômes scindés à racines simples sur $\mathbb{R}$ est un ouvert.

3. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. —

3.1. Définition et premières propriétés. — (Lafontaine) Définition d'une sous-variété, théorème des sous-variétés, exemple de la sphère, du tore, c-ex du cône.

3.2. Espace tangent. — (Rouvière) Définition de l'espace tangent, c'est un espace vectoriel de dimension d, expression de l'espace tangent suivant la description de la sous-variété. **dev** Théorème des extrema liés. Applications : théorème spectral (Beck-Malick-Peyré), inégalité arithmético-géométrique, mise en boite optimale, inégalité de Hadamard.

3.3. Sous-variétés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. — (Rouvière) Exemple de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et de $O_n(\mathbb{R})$ avec leurs plans tangents en l'identité, exemple des matrices de rang fixé.

Leçon 215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Références : Rouvière, Gourdon, Beck-Malick-Peyré, Mneimné-Testard, Lafontaine.

Développements : théorème des extrema liés, théorème de Hadamard-Lévy, *différentielle de l'exponentielle de matrices.*

Introduction : la différentielle intervient dans l'étude des extrema, ainsi qu'en géométrie différentielle, et dans les formules de Taylor, qui approchent localement une fonction.

Cadre : soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to \mathbb{R}^p$.

1. Premières propriétés de la différentiabilité. —

1.1. Différentielle. — (Rouvière) Définition de la différentiabilité et de la différentielle en un point, sur U, exemple d'une fonction dérivable, d'une application linéaire, d'une application quadratique. Être différentiable implique d'être continu, linéarité de la différentielle, différentielle d'une application composée. Différentielle de l'inverse, de l'exponentielle matricielle, du déterminant. Définition du caractère $\mathcal{C}^1$, d'un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.

1.2. Dérivée partielle. — (Rouvière) Dérivée directionnelle, dérivée partielle, expression de la différentielle avec les dérivées partielles, f est $\mathcal{C}^1$ ssi ses dérivées partielles existent et sont continues, contre-exemple. Définition de la matrice jacobienne comme la matrice de la différentielle dans la base canonique, expression avec les dérivées partielles.

1.3. Inégalité des accroissements finis. — (Rouvière) Inégalité des accroissements finis dans le cas réel (Gourdon), inégalité des accroissements finis, applications : si $Df = 0$ sur un ouvert connexe alors f est constante sur cet ouvert, différentiabilité de la limite d'une suite de fonction, application à l'exponentielle matricielle, longueur d'un arc, application au périmètre du cercle.

1.4. Différentielle d'ordre supérieur et formules de Taylor. — (Rouvière) Définition de la différentielle d'ordre 2, d'ordre k, classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$, exemple de det, dérivées partielles secondes, Hessienne, expression de la différentielle seconde avec les dérivées partielles, lemme de Schwarz, interprétation : $D^2f(a)$ est symétrique. Formules de Taylor Young, de Taylor reste intégral. **dev** Différentielle de l'exponentielle, étude locale affine d'une surface.

2. Théorème d'inversion locale, des fonctions implicites, et application. —

2.1. Théorème d'inversion locale. — (Rouvière) Théorème d'inversion locale, exemple d'application, contre-exemple sans l'hypothèse $\mathcal{C}^1$. Remarque sur l'extension au cas $\mathcal{C}^k$. Théorème d'inversion globale, contre-exemple de l'exemple précédent. **dev** Théorème de Hadamard-Lévy, exemple d'application (sans référence). (Mneimné-Testard) L'exponentielle est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme entre un voisinage de 0 et un voisinage de Id, application : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ n'a pas de sous-groupes arbitrairement petit. (Rouvière) Lemme de Morse et application à la position relative d'une surface et de son plan tangent.

2.2. Théorème des fonctions implicites. — (Rouvière) Théorème des fonctions implicites, exemple du cercle, expression de la dérivée de la fonction implicite, exemple du cercle, version $\mathcal{C}^k$ du théorème. Remarque sur l'équivalence avec le théorème d'inversion locale. Application au folium de Descartes. (Beck-Malick-Peyré) Régularité d'une racine simple d'un polynôme, application : l'ensemble des polynômes scindés à racines simples sur $\mathbb{R}$ est un ouvert.

2.3. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. — (Lafontaine) Définition d'une sous-variété, théorème des sous-variétés, exemple de la sphère, du tore, c-ex du cône. (Rouvière) Définition de l'espace tangent, c'est un espace vectoriel de dimension d, expression de l'espace tangent suivant la description de la sous-variété, exemple de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et de $O_n(\mathbb{R})$ avec leurs plans tangents en l'identité.

3. Optimisation. —

3.1. Points critiques. — (Beck-Malick-Peyré) Définition d'un point critique, condition d'optimalité du premier ordre : un extremum est un point critique, c-ex de $x \mapsto x^3$ en 0. (Rouvière) f différentiable est convexe ssi $\forall x, y\ f(y) - f(x) \geq df(x)(y - x)$, ainsi, si f est convexe et différentiable sur un convexe, elle admet un minimum global en a ssi $df(a) = 0$.

3.2. Étude de la Hessienne. — (Beck-Malick-Peyré) Condition d'optimalité du second ordre : dans le cas d'un point critique, si c'est un extremum la Hessienne est positive/négative, et si elle est de plus définie, le point critique est un extremum local, c-ex de $(x, y) \mapsto x^2 - y^3$ pour le premier point et $(x, y) \mapsto x^2 + y^4$ pour le deuxième point. (Gourdon) Application : principe du maximum. (Rouvière) f deux fois différentiable est convexe ssi d^2f est une forme quadratique positive en tout point. Ainsi, si f est deux fois différentiable et $df(a) = 0$, $\forall x$, $\forall h$, $d^2f(x)(h, h) \geq 0$, alors a est un minimum global.

3.3. Optimisation sous contrainte. — (Rouvière) **dev** Théorème des extrema liés. Applications : théorème spectral (Beck-Malick-Peyré), inégalité arithmético-géométrique, mise en boite optimale, inégalité de Hadamard.

Leçon 218 - Applications des formules de Taylor.

Références : Plan de leçon Favreau-Grillet. Gourdon, Ouvrard II, Rouvière, Demailly, Rombaldi (An réelle), FGN Analyse 1.

Développements : méthode de Newton, fonction caractéristique et moments, *théorème central limite.*

Introduction : la formule de Taylor-Young a été démontré par Brook Taylor en 1715, mais l'expression explicite du reste n'est arrivée que bien plus tard. Ces formules consistent à exprimer localement toute fonction suffisamment régulière comme un polynôme ce qui permet d'étudier plus facilement son comportement. On a de nombreuses applications, notamment dans la recherche de limites, dans l'étude locale (des conditions d'extrema,..), ou encore en analyse numérique puisque les calculs étant beaucoup plus simple avec des polynômes (et même tout ce qu'un ordinateur sait faire) on utilise beaucoup ce type d'approximation.

Cadre : soit $f : I \to \mathbb{R}$ un fonction où I est un intervalle réel.

1. Formules de Taylor. —

1.1. Taylor-Young et développements limités. — (Gourdon) Définition d'un DL, Théorème de Taylor-Young, application aux développements limités, cf annexe avec DL usuels, lien entre DL et dérivabilité avec contre-exemples pour les ordres supérieurs.

1.2. Taylor Lagrange, Taylor reste intégral et développement en série entière. — (Gourdon) Théorème de Taylor Lagrange. Théorème de Taylor reste intégral, inégalités classiques (Rombaldi (Analyse réelle)). Si f est DSE, f est somme de sa série de Taylor, les deux formules permettent de montrer que f est DSE, ex de l'exponentielle, c-ex de $f(x) = e^{-1/x}\mathbb{1}_{x>0}$ dont la série de Taylor en 0 converge mais est différente de f.

1.3. Premières applications. — Inégalités de Kolmogorov (FGN Analyse 1 p. 274), méthode de Laplace (Gourdon) (admis), suites récurrentes, remarque sur le nombre d'or (Rouvière p. 149).

2. Applications à l'étude locale. —

2.1. Extrema locaux. — (Gourdon) Définition d'un extremum, un extremum est un point critique, c-ex de la réciproque, condition nécessaire sur la hessienne quand il y a un extremum, conditions suffisantes pour avoir un extremum, pour qu'il n'y en ai pas, et cas où l'on ne peut pas conclure. Dessins en annexe. Remarque sur les réciproques dans le cas d'une fonction convexe (Rouvière ou Beck-Malick-Peyré). (Rouvière) Notations de Monge, étude des extrema. Lemme de Morse.

2.2. Étude affine locale d'une surface. — (Rouvière p. 341) Énoncé, cf dessins en annexe.

3. Applications aux méthodes numériques. —

3.1. Calculs d'intégrales. — (Demailly) Définition de la méthode de Newton-Cotes élémentaire, composée, exemple de la méthode (élémentaire) des trapèzes, de Simpson (dessins en annexe), convergence quand $k \to +\infty$ (le nombre de compositions), erreur élémentaire (Rombaldi (Interpolation)).

3.2. Suites récurrentes. — (Rouvière) **dev** Méthode de Newton, application au calcul d'une racine, au meilleur calcul du nombre d'or.

4. Applications en probabilités. — (Ouvrard II) **dev** Théorème central limite, **dev** fonction caractéristique et moments. (Barbe-Ledoux) Critère d'analyticité, théorème des moments.

5. Annexe. — DL usuels en 0, dessins des extremums, position d'une surface par rapport à son plan tangent, méthodes des rectangles à gauche et du point milieu.

Leçon 219 - Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemple et applications.

Références : Gourdon, Beck-Malick-Peyré, Rouvière, Hirsch-Lacombe, Amar-Matheron, *secondaires :* Ciarlet, Brezis, FGN Algèbre 3, Hiriart-Urruty.

Développements : théorème des extrema liés, optimisation dans un Hilbert, *ellipsoïde de John-Loewner.*

Cadre : on considère une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ où E est un $\mathbb{R}$-ev.

1. Existence et unicité. —

1.1. Compacité. — (Gourdon) Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes, cor : équivalence des normes en dimension finie, théorème de point fixe sur un compact, la distance entre un fermé et un compact est strictement positive et atteinte. (Beck-Malick-Peyré) Si f est coercive alors elle est minorée et atteint son minimum, application. **dev** Ellipsoïde de John-Loewner.

1.2. Fonctions holomorphes. — (Amar-Matheron) Théorème de Liouville, théorème de d'Alembert-Gauss. Définition de le propriété de la moyenne, une fonction holomorphe vérifie la propriété de la moyenne, principe du maximum local, principe du maximum global, cor : si f est holomorphe non constante sur un ouvert connexe et qu'elle admet un minimum local alors celui-ci est nul, théorème de l'image ouverte.

1.3. Convexité. — (Beck-Malick-Peyré) Définition d'une fonction convexe, strictement convexe, si E est euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique définie positif, $x \mapsto < u(x), x >$ est strictement convexe, Dans le cas des fonctions convexes, un minimum local est global. Unicité du minimum d'une fonction strictement convexe. Existence et unicité du minimum de $x \mapsto < u(x), x >$.

1.4. Extrema dans un Hilbert. — (Hirsch-Lacombe) Théorème de projection dans un Hilbert, lipschitzianité de l'application de projection, linéarité et caractérisation du projeté dans le cas d'un s.e.v. fermé. (Beck-Malick-Peyré) Application aux polynômes de meilleure approximation et à l'existence de l'espérance conditionnelle. (Hirsch-Lacombe) Théorème de Lax-Milgram et (Brezis) résolution d'une EDP . (Ciarlet) **dev** Optimisation dans un Hilbert.

2. Extrema locaux et différentiabilité. —

2.1. Conditions d'optimalité du premier ordre. — (Beck-Malick-Peyré) Définition d'un point critique, condition d'optimalité du premier ordre : un extremum est un point critique, c-ex de $x \mapsto x^3$ en 0. (Gourdon) Application : théorème de Rolle, théorème de Darboux.

2.2. Conditions d'optimalité du second ordre. — (Beck-Malick-Peyré) Condition d'optimalité du second ordre : dans le cas d'un point critique, si c'est un extremum la Hessienne est positive/négative, et si elle est de plus définie, le point critique est un extremum local, c-ex de $(x, y) \mapsto x^2 - y^3$ pour le premier point et $(x, y) \mapsto x^2 + y^4$ pour le deuxième point. (Rouvière) Notations de Monge, étude des extrema. Lemme de Morse.

2.3. Fonctions convexes et optimisation. — (Rouvière) f différentiable est convexe ssi $\forall x, y\ f(y) - f(x) \geq df(x)(y - x)$, ainsi, si f est convexe et différentiable sur un convexe, elle admet un minimum global en a ssi $df(a) = 0$. f deux fois différentiable est convexe ssi d^2f est une forme quadratique positive en tout point. Ainsi, si f est deux fois différentiable et $df(a) = 0$, $\forall x$, $\forall h$, $d^2f(x)(h, h) \geq 0$, alors a est un minimum global.

2.4. Conditions d'optimalité sous contrainte. — (Rouvière) **dev** Théorème des extrema liés. Applications : théorème spectral (Beck-Malick-Peyré), inégalité arithmético-géométrique, mise en boite optimale, inégalité de Hadamard.

3. Recherche numérique d'extrema. —

3.1. Méthode de Newton. — (Rouvière) Méthode de Newton polynomiale, remarques : cela permet d'approcher par exemple des racines carrées, et d'approcher des points critiques. (Demailly) Méthode de Newton-Raphson, convergence. Remarque sur la méthode de la sécante.

3.2. Méthodes de gradient. — (Hiriart-Urruty) Mentionner le but : résolution de $Ax = b$ avec minimisation d'une bonne fonctionnelle. Méthode du gradient à pas optimal, inégalité de Kantorovich sur le reste, mentionner la méthode de gradient à pas conjugué.

Leçon 220 - Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études des solutions en dimensions 1 et 2.

Références : Gourdon, Demailly, Rouvière, FGN Analyse 4, *secondaire :* Zuily-Queffélec, Pommellet.

Développements : théorème de Hadamard-Lévy, nombre de zéros d'une équation différentielle.

Cadre : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On se donne $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ continue.

1. Théorie des équations différentielles. —

1.1. Solution d'une équation différentielle. — (Demailly) Définition d'un problème de Cauchy, remarque sur comment se ramener à une EDO d'ordre 1 à partir d'une EDO d'ordre p, solution maximale, solution globale, théorème de prolongement d'une solution locale, exemple de $y' = y^2$. Régularité de la solution. Lemme de Gronwall. (Zuily-Queffélec) Lemme de sortie de tout compact, application au cas où f est continue bornée, exemple. (Pommellet) Si $y(t_1) = y(t_2)$ la solution est globale périodique.

1.2. Existence et unicité des solutions. — (Demailly) Théorème de Cauchy-Arzela-Peano. Forme intégrale d'une solution d'un problème de Cauchy, théorème de Cauchy-Lipschitz local, existence et unicité d'une solution maximale, exemples de $Y' = AY$, contre-exemple de $y' = 3|y|^{2/3}$. **dev** Théorème de Hadamard-Lévy. (Rouvière) Théorème de Cauchy-Lipschitz global.

2. Quelques équations différentielles particulières. —

2.1. Équations différentielles linéaires. — (Gourdon) Définition d'une équation différentielle linéaire, structure de l'espace des solutions dans le cas homogène et dans le cas général. Expression de la résolvante dans le cas à coefficients constants, application à $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$ lorsque les matrices commutent (Pommellet), différentielle de l'exponentielle matricielle, solutions d'une EDL homogène d'ordre p scalaire en fonction des racines de son polynôme caractéristique et exemple. (Demailly) Principe de la méthode de variation de la constante et expression intégrale de la solution. (Gourdon) Exemple d'application.

2.2. Techniques particulières. — (Demailly) Équations à variables séparées, exemple. Équations de Bernoulli, de Ricatti, exemple, homogènes, exemple. (sans référence) Recherche de solutions développables en séries entières et application à $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$ de solution $\frac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2}$.

2.3. Modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra. — (FGN Analyse 4) Système différentiel, intégrale première, solution globale, dessin des trajectoires et périodicité.

2.4. Pendule simple. — (FGN Analyse 4) Système du pendule simple, comportement des solutions, portrait de phase.

2.5. Équations du type $y'' + qy = 0$. — (FGN Analyse 4) Si q est négative, toute solution bornée est nulle, et y et y' s'annulent au plus une fois. Si q est positive croissante l'ensemble des zéros d'une solution n'est pas majorée, et toute solution est bornée. (Zuily-Queffélec) **dev** Nombre de zéros d'une équation différentielle.

3. Stabilité des systèmes différentiels autonomes. —

3.1. Stabilité des équilibres. — (Demailly) Définition d'un équilibre stable, asymptotiquement stable, dessins d'illustration.

3.2. Cas linéaire. — (Demailly) Théorème de stabilité des points d'équilibre d'un système linéaire. Portrait de phase d'une d'EDL en dimension 2 en fonction du spectre de la matrice.

3.3. Cas général. — (Rouvière p. 143) Théorème de Liapounov. (Demailly) Contre-exemple pour montrer que dans le cas d'une partie réelle nulle on ne peut rien dire.

4. Schéma d'Euler. —

(Demailly) Définition du schéma d'Euler, formule pour l'erreur, consistance, stabilité, convergence.

Leçon 221 - Équations différentielles linéaire. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Références : Gourdon, Demailly, FGN Analyse 4, *secondaires :* Rouvière, Pommellet.

Développements : différentiabilité de l'exponentielle matricielle, nombre de zéros d'une équations différentielle.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Cadre théorique des EDL. —

1.1. Existence et unicité de solutions. — (Gourdon) Définition d'une équation différentielle linéaire (EDL) d'ordre p, d'un système homogène, manière de se ramener à l'ordre 1 et remarquer qu'un système d'EDL se ramène à une EDL d'ordre 1. Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, contre-exemple de la solution $t \mapsto 1/(1-t)$ non globale de $y' = y^2$, $y(0) = 1$ (Rouvière) et des deux solutions $t \mapsto 0$ et $t \mapsto t^3$ de $y' = 3|y|^{2/3}$ (Demailly). (Gourdon) Problème de recollement, exemple quand ça ne marche pas.

1.2. Structure de l'espace des solutions. — (Gourdon) Dans le cas homogène l'espace des solutions forme un espace vectoriel de dimension n, et dans le cas général un espace affine de dimension n, de direction l'espace vectoriel des solutions du système homogène et de vecteur directeur une solution particulière. Définition du wronskien à l'ordre 1, remarque sur sa forme dans le cas de l'ordre p scalaire. Caractérisation des bases de l'espace des solutions avec le wronskien. Formule $W(t) = W(a) \exp\left(\int_a^t \mathrm{Tr}(A(u))\, du\right)$.

2. Résolution explicite. —

2.1. Cas général. — (Demailly) Définition de la résolvante d'une EDL d'ordre 1, propriétés, forme dans le cas où $[A(t), A(s)] = 0$, $\forall s, t$, exemple d'application et contre-exemple.

2.2. Cas des coefficients constants. — (Demailly) Expression de la résolvante dans ce cadre, application à $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$ lorsque les matrices commutent (Pommellet), **dev** différentielle de l'exponentielle matricielle. Remarque sur le forme de Jordan pour calculer l'exponentielle, forme des solutions. (Gourdon) Cas particulier des solutions d'une EDL homogène d'ordre p scalaire en fonction des racines de son polynôme caractéristique et exemple, si $f'(t) + f(t) \to 0$ alors $f(t) \to 0$.

2.3. Recherche de solutions particulières. — (Demailly) Principe de la méthode de variation de la constante, expression intégrale de la solution et forme dans le cas linéaire. (Gourdon) Exemple d'application. (Pommellet) Méthode de Liouville, exemple. Recherche de solutions développables en séries entières et application à $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$ de solution $\frac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2}$.

3. Étude qualitative. —

3.1. Stabilité des équilibres. — (Demailly) Définition d'un équilibre stable, asymptotiquement stable, stabilité des points d'équilibre d'un système linéaire. (Rouvière p. 143) Théorème de Liapounov. (Demailly) Portrait de phase d'une d'EDL en dimension 2 en fonction du spectre de la matrice.

3.2. Cas des équations de la forme $y'' + qy = 0$. — (FGN Analyse 4) Si q est négative, toute solution bornée est nulle, et y et y' s'annulent au plus une fois. Si q est positive croissante l'ensemble des zéros d'une solution n'est pas majorée, et toute solution est bornée. (Zuily-Queffélec) **dev** Nombre de zéros d'une équation différentielle.

Leçon 222 - Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires

Références : Evans, Di Menza, Zuily-Queffélec, Dym-McKean, Bony, Stein-Shakarchi, Amar-Matheron, Brézis, *secondaires :* Allaire, Gozard (MP/MP*).

Développements : équation de Schrödinger sur $\mathbb{R}$, théorème de Lax-Milgram et application, *équation de la chaleur sur le cercle.*

1. Introduction théorique, exemples. — (Evans) Définition d'une EDP linéaire, ordre, EDP homogène. Exemples d'EDP. Définition d'un problème bien posé. (Allaire) Exemple de problème mal posé. Classification des EDP d'ordre deux à deux variables, remarquer que c'est invariant par changement des variables et que cela correspond à la classification des coniques, exemples. (Gozard (MP/MP*)) Deux exemples de résolution par changement de variables.

2. Équation de transport et équation des ondes. —

2.1. Équation de transport et méthode des caractéristiques. — (Evans) Définition de l'équation de transport. (Di Menza) Méthode des caractéristiques (regarder la solution le long des courbes $x'(t) = a(x,t)$), solution dans le cas unidimensionnel et vitesse constante (formule de Duhamel), exemple de résolution dans le cas homogène à vitesse variable, exemple où la méthode des caractéristiques ne s'applique pas. Existence et unicité de la solution en dimension supérieure, dans le cas homogène.

2.2. Équations des ondes. — (Evans) Définition de l'équation des ondes, interprétation physique. Remarquer que ce sont deux équations de transport, théorème d'existence, formule de d'Alembert. Unicité de la solution par méthode d'énergie.

3. Résolution par analyse de Fourier. —

3.1. Équation de la chaleur sur le cercle. — (Evans) Définition de l'équation de la chaleur. (Zuily-Queffélec) Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$, f est somme de sa série de Fourier qui converge normalement. Équation de la chaleur sur la barre. (Dym-McKean) **dev** Équation de la chaleur sur le cercle version convergence $||.||_\infty$. (sans référence) Équation de la chaleur sur le cercle version convergence $||.||_2$.

3.2. Rappels sur la transformée de Fourier. — (Bony) Formule d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, lien entre dérivation et multiplication par un monôme, transformée de Fourier et convolution.

3.3. Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$. — (Stein-Shakarchi) Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$: existence et unicité de la solution donnée sous la forme d'une convolution avec un noyau. Remarque sur la possibilité de montrer l'unicité sous les mêmes hypothèses avec une méthode d'énergie.

3.4. Équation de Schrödinger. — (Evans) **dev** Équation de Schrödinger sur $\mathbb{R}$: existence et unicité de la solution donnée explicitement.

4. Problèmes elliptiques. —

4.1. Équation de Laplace et fonctions harmoniques. — (Amar-Matheron) Définition de l'équation de Laplace, d'une fonction harmonique, fonctions harmoniques et fonctions holomorphes, propriété de la moyenne, principe du maximum, problème de Dirichlet, noyau de Poisson, solution du problème de Dirichlet.

4.2. Techniques hilbertiennes. — (Brezis) Définition de $H^1(I)$, exemple de la valeur absolue sur $[-1,1]$, définition du produit scalaire de H^1 qui en fait un espace de Hilbert, existence d'un représentant continu, injection compacte dans $\mathcal{C}^0(\overline{I})$. Définition de H_0^1, c'est un Hilbert, caractérisation comme l'ensemble des fonctions de $H^1(I)$ nulles au bord, inégalité de Poincaré. **dev** Théorème de Lax-Milgram et résolution de problèmes elliptiques.

Leçon 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Références : El Amrani, Gourdon, Zuily-Queffélec, FGN Analyse 2, *secondaire :* Ouvrard.

Développements : méthode de Newton, processus de Galton-Watson.

Cadre : $u = (u_n)_n$ désigne une suite $u : \mathbb{N} \to K, n \mapsto u_n$ pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Convergence d'une suite numérique. —

1.1. Limite d'une suite. — (El Amrani) Définition de la limite d'une suite, unicité de la limite, exemples de $1/n \to 0$ et $n \to +\infty$, une suite convergente est bornée, stabilité par opérations élémentaires, caractérisation séquentielle de la continuité, exemple de $\sin(1/x)$ qui n'est pas prolongeable par continuité en 0, $e^{1/n} \to 1$, caractérisation séquentielle des fermés, app : preuve qu'un ss-espace compact ou complet est fermé, et preuve qu'un ss-espace fermé d'un compact (resp. complet) est un compact (resp. complet).

1.2. Valeurs d'adhérence. — (Gourdon) Définition d'une extractrice, d'une suite extraite, d'une valeur d'adhérence, exemple de $(-1)^n$, et $u_n := \exp(2i\pi n\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ qui admet $\mathbb{U}$ pour valeurs d'adhérences, une suite convergente admet pour unique v.a. sa limite, app : $((-1)^n)_n$ ne converge pas. (Zuily-Queffélec) Définition de la lim inf, de la lim sup, exemple de $(-1)^n$, passage à la lim inf/sup dans les inégalités, caractérisation avec les valeurs d'adhérences.

1.3. Théorèmes de convergence. — Ici $K = \mathbb{R}$. (Zuily-Queffélec) Convergence de (u_n) vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ ssi $\liminf(u_n) = \limsup(u_n) = l$, application aux suites sous-multiplicatives. (El Amrani) Théorème d'encadrement, exemple de $\cos(n)/n$, convergence des suites complexes, théorème de convergence sur les suites monotones majorées/minorées, définition de suites adjacentes, exemples de la moyenne arithmético-géométrique (Gourdon), théorème de convergence, exemple de $(1 - 1/n)_n$ et $(1 + 1/n)_n$ adjacentes convergeant vers 1. (Gourdon) Application au CSSA. Théorème de Bolzano-Weierstrass, cor : $(u_n)_n$ converge si et seulement si elle est bornée et admet une unique v.a..

1.4. Suites de Cauchy. — (El Amrani) Définition d'une suite de Cauchy, toute suite convergente est de Cauchy, toute suite de Cauchy est bornée, une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge, complétude de $\mathbb{R}$, exemple de $\sum \frac{1}{k}$ qui n'est pas de Cauchy.

2. Suites particulières. —

2.1. Suites arithmétiques et suites géométriques. — Définition d'une suite arithmétique, forme explicite, géométrique, forme explicite, théorème de convergence, exemple de $u_0 = 1$ et $q = \exp(i\theta), \theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

2.2. Suites homographiques. — (Gourdon) Définition d'une suite homographique, lien entre racines de l'équation $h(x) = x$ et formes "explicites" de u_n, exemple des suites arithémtico-géométriques, forme explicite.

2.3. Suites récurrentes. — (Gourdon) Définition d'une suite récurrente d'ordre 1, si la suite converge la limite est un point fixe, **dev** processus de Galton-Watson, monotonie de (u_n) en fonction de celle de f, exemple de $f(x) = \frac{1}{2-\sqrt{x}}$ (p. 194). (Rouvière) Théorème du point fixe de Picard, les trois contre-exemples qui suivent. Le théorème est encore vrai si une itérée est contractante. Théorème de point fixe sur un compact et sur un convexe compact, contre-exemple des rotations. (Demailly) Classification des points fixes attractifs, super attractifs, répulsifs, et exemples de sin et sh dans le cas $|f'(a)| = 1$, équivalent dans le cas du sinus (Rouvière). (FGN Analyse 1) Suite récurrente, convergence lente, application au logarithme. Application au sinus. **dev** Méthode de Newton.

3. Comportement asymptotique. —

3.1. Comparaison asymptotique. — (El Amrani) Définition de la relation de négligeabilité, exemple d'une suite qui converge vers 0, de $\log(n) =_{+\infty} o(n)$, définition de la relation d'équivalence, caractérisation par $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$, exemple de $\log(n+1) \sim \log(n)$, deux suites équivalentes ont la même limite, remarque sur la réciproque partielle quand la limite est non nulle, contre exemple de $1/n$ et $1/n^2$. (Gourdon) Équivalence des restes et des sommes partielles dans le cas d'une série à termes positifs, app : si $H_n = 1+1/2+\cdots+1/n$, $H_n \sim \log(n) + \gamma + 1/2n + o(1/2n)$ où $\gamma = \lim(H_n - \log(n))$, formule de Stirling.

3.2. Convergence en moyenne. — (El Amrani) Définition de la moyenne de Cesàro d'une suite, théorème de Cesàro, interprétation avec $u_1 + \cdots + u_n \sim nl$, exemple de $(1/n)$, c-ex de $((-1)^n)$ dont la moyenne de Cesàro converge mais qui ne converge pas, cor : si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers a et b, alors la moyenne de Cesàro de (u_n) converge vers $\frac{a+b}{2}$, application aux séries de Fourier (Soit f continue 2π périodique. Si la série de Fourier de f converge, alors elle converge simplement vers f.). (Ouvrard II) Remarque sur l'utilisation pour la loi forte des grands nombres.

Leçon 224 - Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Références : Gourdon, Rombaldi (Analyse réelle), *secondaire :* FGN Analyse 1, Pommellet, Zuily-Queffélec.

Développements : nombre de zéros d'une équation différentielle, développement asymptotique de la série harmonique.

Cadre : Soit I un intervalle réel, $a \in \overline{I}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $(u_n)_n$ une suite réelle.

1. Comparaison de suites et de fonctions. —

1.1. Relations de comparaison. — (GOURDON) Définition de $f(x) = o_{x\to a}(g(x))$, $f(x) \sim_{x\to a} g(x)$, définition pour les suites. Stabilité (et c-ex de non stabilité). Exemples des croissances comparées (ROMBALDI (ANALYSE RÉELLE)).

1.2. Développements asymptotiques. — (GOURDON) Définition d'une échelle de comparaison, d'un développement asymptotique (DA), exemple de $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$, $(x^\alpha \log^\beta)_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}$. Unicité. Exemple de $\frac{\log(x+1)}{\log(x)}$. (ROMBALDI (ANALYSE RÉELLE)) DA de $x^{1/x}$.

1.3. Développements limités. — (GOURDON) Définition du DL en 0 avec la bonne échelle de comparaison, remarque sur comment se ramener en 0, unicité du DL, lien entre dérivée et DL, c-ex pour les dérivées d'ordre supérieur, formule de Taylor-Young, exemples usuels cf annexe, stabilité et DL obtenus, remarquer que c'est utile pour lever des indéterminées, exemple de $\frac{\tan x - x}{\sin x - x}$.

2. Développements asymptotiques de fonctions. —

2.1. Intégration et dérivation de développements asymptotiques. — (GOURDON) Intégration et dérivation terme à terme d'un DL, application à $\log(1-x)$ et autres en annexe. Intégration des relations de comparaison, corollaire sur l'équivalent de $\int_a^x g(t)dt$ lorsque $\frac{g'(t)}{g(t)} \sim \frac{\mu}{x}$ dans les exercices, exemple du logarithme intégral, DA en 0 de $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ (POMMELLET).

2.2. Méthode de Laplace. — (GOURDON ou ROUVIÈRE) Méthode de Laplace, application à la fonction Γ. Autres exemples du GOURDON.

2.3. Autres exemples. — (ZUILY-QUEFFÉLEC) **dev** Équivalent du nombre de zéros d'une solution de $y'' + qy = 0$. (GOURDON) (p. 155) Équivalent de $t \to \sum_{n\geq 1} f(nt)$ en 0, (p. 283) DA en 1 de ζ.

3. Développements asymptotiques de suites. —

3.1. Séries numériques. — (GOURDON) Sommation des relations de comparaison, comparaison série intégrale, application à $\sum_{k\geq n} 1/k^\alpha$, **dev** application au DA de la série harmonique. Application à la formule de Stirling.

3.2. Suites récurrentes. — (FGN ANALYSE 1, p.99) Équivalent de u_n lorsque f vérifie un DL, application à $\sin(x), \log(1+x), x+1/x, x+e^{-x}$.

3.3. Suites définies implicitement. — (ROMBALDI (ANALYSE RÉELLE)) Exemples, (FGN ANALYSE 1, pp. 127-129) 3 exemples.

4. Annexe. —

(GOURDON) Tableau des DL usuels en 0.

Leçon 226 - Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Références : Gourdon, Rouvière, Demailly, FGN Analyse 1, Ciarlet, Hiriart-Urruty, *secondaires :* Hauchecorne.

Développements : méthode de Newton, méthodes itératives de résolution d'un système linéaire, *processus de Galton-Watson.*

Introduction : les suites récurrentes interviennent dans des problèmes de méthodes numériques itératives. Le fait que la limite éventuelle soit un point fixe est très important, tout comme le théorème du point fixe. On aurait pu parler de la résolution approchée d'équations différentielles, avec par exemple la méthode d'Euler (cf. Ciarlet).

Cadre : soit E un espace vectoriel normé réel. On appelle suite récurrente d'ordre $k \geq 1$ toute suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+k} = f(u_n, \ldots, u_{n+k-1})$ et $u_0, \ldots, u_{k-1} \in I$ où $f : I^k \to E$ et I stable par f.

1. Généralités. —

1.1. Suites récurrentes réelles. — (Gourdon) Si $(v_n)_n$ converge vers a et que f est continue en a, alors $(f(u_n))_n$ converge vers $f(a)$, contre-exemple de $x\sin(\frac{1}{x})$ (Hauchecorne). Ainsi si $(u_n)_n$ converge vers l et que f est continue en l alors l est un point fixe de f. Comportement de $(u_n)_n$ en fonction de la monotonie de f. (Rouvière) Exemple de $\cos(\lambda x)$, sin, ch. Lemme de la grenouille. **dev** Processus de Galton-Watson.

1.2. Suites récurrentes vectorielles. — (Gourdon) Méthode pour se ramener d'une suite récurrente linéaire d'ordre k à une suite récurrente vectorielle associée à une matrice compagnon, forme explicite des suites récurrentes linéaires d'ordre k, exemple de la suite de Fibonacci.

1.3. Exemples de suites récurrentes. — (Gourdon) Définition d'une suite arithmétique vectorielle, forme explicite, géométrique vectorielle, forme explicite, théorème de convergence dans le cas réel, exemple de $u_0 = 1$ et $q = \exp(i\theta), \theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Définition d'une suite arithmético-géométrique, forme explicite. Définition d'une suite homographique réelle, lien entre racines de l'équation $h(x) = x$ et formes "explicites" de u_n, exemple de $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}$: convergence de la suite vers 0.

2. Suites récurrentes et points fixes. —

2.1. Théorème du point fixe de Banach-Picard. — (Rouvière) Théorème du point fixe, les trois contre-exemples qui suivent, application au théorème de Cauchy-Lipschitz local. Application à la résolution approchée de $f(x) = 0$ (Demailly). Le théorème est encore vrai si une itérée est contractante. Théorème de point fixe sur un compact et sur un convexe compact, contre-exemple des rotations.

2.2. Classification des points fixes. — (Demailly) Classification des points fixes attractifs, super attractifs, répulsifs, et exemples de sin et sh dans le cas $|f'(a)| = 1$, équivalent dans le cas du sinus (Rouvière). (FGN Analyse 1) Suite récurrente, convergence lente, application au logarithme. Application au sinus. (Demailly) Critère d'attractivité en dimension n.

3. Méthodes numériques itératives. —

3.1. Méthode de Newton. — (Rouvière) **dev** Méthode de Newton, application à l'approximation de racines. Mentionner Newton-Raphson.

3.2. Méthode du gradient. — (Hiriart-Urruty) Lemme de Kantorovich, méthode du gradient à pas optimal, convergence.

3.3. Résolution des systèmes linéaires. — (Ciarlet) Principe général des méthodes, **dev** critère de convergence, méthode de Jacobi, Gauss-Seidel et relaxation, convergence des méthodes.

À chercher : lien entre expression explicite des suites récurrentes linéaires d'ordre $k \geq 1$ et la réduction de Jordan de la matrice compagnon associée.

Leçon 228 - Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Références : Rombaldi (Analyse réelle), Gourdon, Hauchecorne, Ramis-Deschamps-Odoux tome 3, Briane-Pagès.

Développements : méthode de Newton, fonction caractéristique et moments.

Cadre : soit I un intervalle réel.

1. Continuité et dérivabilité. —

1.1. Continuité. — (Rombaldi (Analyse réelle)) Définition de la continuité en un point, de la continuité sur I, exemples de $x \mapsto x^n$, $\cos(x)$, stabilité par somme, produit, inverse, composition, app : polynômes sont continus, une fonction continue en un point est bornée sur un voisinage de ce point, caractérisation séquentielle, app : non continuité de $\sin(1/x)$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, $x \mapsto x\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ continue seulement en 0, la limite d'un suite récurrente pour une fonction continue f est un point fixe de f, prolongement par continuité en un point, app : prolongement de $\sin(x)/x$ en 0.

1.2. Continuité sur un compact. — (Rombaldi (Analyse réelle)) Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés, une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes, définition de l'uniforme continuité, exemple de $x \mapsto x^2$ UC sur un borné mais pas sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ UC sur $[1;\infty[$, $x \mapsto 1/x$ non UC sur $]0,1[$, théorème de Heine, app : $x \mapsto \sqrt{x}$ UC sur $\mathbb{R}^+$, une fonction continue périodique est UC, cor : toute fonction continue sur $[a,b]$ est limite uniforme de fonctions affines par morceaux. (Gourdon) Théorème de Weierstrass.

1.3. Dérivabilité. — (Rombaldi (Analyse réelle)) Définition de la dérivabilité en un point, sur I, dérivable $\Rightarrow$ continue, définition des dérivées d'ordre supérieur, classes $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$, ex, C-ex : $x \mapsto x^2\sin(1/x)$ dérivable non $\mathcal{C}^1$, exemple : fonction continue nulle part dérivable, densité des fonctions nulle part dérivable dans les fonctions continues (Gourdon), stabilité des notions par somme, produit, inverse, composition (formules), dérivée de la fonction réciproque, application à arcsin. Un point extremum est un point critique.

1.4. Suites de fonctions. — (Gourdon) Continuité de la limite uniforme de fonctions continues, exemple de exp, c-ex de $x \mapsto x^n$, app : $(\mathcal{C}^0([0,1], ||.||_\infty)$ est complet, théorème avec la convergence uniforme des dérivées, C-ex : $x \mapsto \sqrt{x^2+1/n}$ cvgu vers $x \mapsto |x|$, théorèmes de Dini, application pour montrer que $|.|$ est limite uniforme de polynômes, remarque sur l'utilisation pour Stone-Weierstrass.

2. Théorèmes remarquables. — (Rombaldi (Analyse réelle))

2.1. Théorème des valeurs intermédiaires. — Théorème des valeurs intermédiaires : si f est continue, $f(I)$ est un intervalle, expression avec $c \in]f(a), f(b)[$, app : un polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle, cor : formule de la moyenne, théorème de Darboux, caractérisation de la continuité de f lorsque f vérifie le TVI.

2.2. Théorème de Rolle. — Théorème de Rolle, forme itérée, racines des polynômes de Legendre, application à la majoration de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange.

2.3. Théorème et inégalité des accroissements finis. — Théorème des accroissements finis, inégalité des accroissements finis, app à la relation entre monotonie de f et signe de f', théorème de la limite de la dérivée, règle de l'Hospital, théorème fondamental du calcul intégral : $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ lorsque f est Riemann intégrable, c-ex sans l'hypothèse d'intégrabilité.

2.4. Formules de Taylor. — Théorèmes de Taylor Young, réciproque vraie pour $n = 1$ et c-ex de $x \mapsto x^3\sin(1/x)$, application au calcul de développements limités, théorème de Taylor reste intégral, théorème de Taylor Lagrange, app aux DSE, app : inégalités de Kolmogorov : $||f^{(k)}||_\infty \leq 2^{\frac{k(n+1-k)}{2}} ||f||_\infty^{1-\frac{k}{n+1}} ||f^{(n+1)}||_\infty^{\frac{k}{n+1}}$, **dev** méthode de Newton.

3. Classes de fonction particulières. —

3.1. Fonctions monotones. — (Ramis-Deschamps-Odoux tome 3) Une fonction monotone a un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité, ex (Hauchecorne), caractérisation de la continuité d'une fonction monotone, théorème de la bijection monotone.

3.2. Fonctions convexes. — (Rombaldi (Analyse réelle)) Un fonction convexe est dérivable à gauche et à droite, de dérivées croissantes, cor : un fonction convexe sur I est continue sur $\mathring{I}$ et une fonction convexe et dérivable est continûment dérivable (corollaire de Darboux), caractérisation de la convexité dans le cas dérivable, dérivable deux fois, application aux problèmes d'extremums, ex de exp, log, inégalités de convexité.

3.3. Fonctions définies par une intégrale. — (Rombaldi (Analyse réelle)) Si $f \in \mathcal{C}([a,b])$, alors $\forall x \in [a,b]$, $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$. (Briane-Pagès) théorème de continuité sous l'intégrale L^1 et théorème de dérivation sous l'intégrale L^1, app à la transformée de Fourier. **dev** Fonction caractéristique et moments

3.4. Fonction continues sur un compact. — (Hirsch-Lacombe) Théorème d'Ascoli et application à la compacité des opérateurs à noyaux, c-ex de la bosse glissante.

Leçon 229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Références : Ramis-Deschamps-Odoux (Tome 3), Gourdon, Rombaldi (Analyse réelle), Beck-Malick-Peyré, *secondaires :* Hauchecorne, Briane-Pagès, FGN Algèbre 3, Barbe-Ledoux, Hirsch-Lacombe, Hiriart-Urruty.

Développements : ellipsoïde de John-Loewner, optimisation dans un Hilbert.

1. Fonction monotones. — Cadre : soit $f : I \to \mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1.1. Définition et première propriétés. — (Ramis-Deschamps-Odoux tome 3) Définition de (strictement) (dé)-croissante, (strictement) monotone, exemples, exemple de la fonction de répartition d'une v.a., stabilité par combinaison linéaire à coefficients positifs (c'est un cône convexe), stabilité par produit si les fonctions sont positives, contre-exemple de $x \cdot x$, résultat sur les compositions, renversement de sens de monotonie par passage à l'inverse. Théorème de la bijection monotone. Caractérisation de la monotonie et de la strict monotonie avec la dérivée, exemple de $x \mapsto x^3$.

1.2. Régularité des fonctions monotones. — (Ramis-Deschamps-Odoux tome 3) Théorème de la limite monotone, l'ensemble des points de discontinuité de f monotone est au plus dénombrable, (Hauchecorne) contre-exemple d'une fonction monotone dont l'ensemble des points de discontinuité est dense dans $[0, 1]$, f monotone est continue sur I ssi $f(I)$ est un intervalle, cor : si f est continue et strictement monotone, $f(I) = J$ est un intervalle et f est un homéomorphisme de I dans J. (Briane-Pagès) (admis) Une fonction monotone est presque partout dérivable.

1.3. Suites de fonctions monotones. — (Gourdon) La limite d'une suite de fonctions croissantes est croissante. Deuxième théorème de Dini, contre exemple de $x \mapsto x^n$.

1.4. Fonctions à variation bornée. — (Gourdon) Définition d'une fonction à variation bornée, de V_a^b, les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sont à variation bornée, toute fonction à variation bornée s'écrit comme la différence de deux fonctions croissantes, ainsi c'est l'espace vectoriel engendré par les fonctions monotones, les fonctions à variation bornée sont réglées, contre exemple d'une fonction continue qui n'est pas à variation bornée.

2. Fonctions convexes. — Cadre : soit $f : U \to \mathbb{R}$, U un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$.

2.1. Définition et première propriétés. — (Rombaldi (Analyse réelle)) Définition d'une fonction (strictement) convexe, concave, exemple des fonctions affines, de la norme sur $\mathbb{R}^n$, caractérisation avec l'épigraphe (dessin en annexe), c'est un cône convexe, stabilité par somme, par limite simple, sup (Beck-Malick-Peyré), et contre-exemple pour le produit et la composition. Définition de la log-convexité, exemple de exp, log-convexe $\Rightarrow$ convexe, inégalité de Jensen sur les sommes finies.

2.2. Régularité des fonctions convexes. — (Rombaldi (Analyse réelle)) Caractérisation avec $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ dans le cas continue, théorème de la pente (et dessin en annexe), une fonction convexe majorée sur $\mathbb{R}$ est constante, application à une EDO, dérivabilité à gauche et à droite sur l'intérieur de I et croissance des dérivées, c-ex de $x \mapsto |x|$, corollaire sur la continuité sur l'intérieur de I, caractérisation de la convexité dans le cas dérivable réel (dessin en annexe), traduction en terme de différentielle dans le cas général, caractérisation dans le cas deux fois dérivable. (Beck-Malick-Peyré) Application aux fonctions quadratiques. Log-convexité de Γ et c'est la seule fonction log-convexe qui vaut 1 en 0 et vérifie $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

3. Applications de la monotonie et de la convexité. —

3.1. Étude de suites et de séries. — (Gourdon) Suites récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ lorsque f est monotone, exemple, comparaison série intégrale, application à $\sum_{k\geq n} 1/k^\alpha$, application à la série harmonique. Processus de Galton-Watson.

3.2. Inégalités de convexité. — (Rombaldi (Analyse réelle)) Remarque sur des inégalités sur les fonctions, exemple de sin, inégalité arithmético-géométrique, inégalité de Young $xy \leq \frac{x^p}{p}\frac{y^q}{q}$. (Briane-Pagès) Inégalités de Hölder, de Minkowski. (Barbe-Ledoux) Inégalité de Jensen et application à l'inégalité triangulaire et la positivité de la variance. (Hirsch-Lacombe) Inégalité de Young : $||f * g||_r \leq ||f||_p||g||_q$. (Hiriart-Urruty) Inégalité de Kantorovich.

3.3. Optimisation. — (FGN Algèbre 3) Strict log-concavité du déterminant, **dev** ellipsoïde de John-Loewner, application aux sous-groupe compacts maximaux de $\mathrm{GL}(E)$. (Beck-Malick-Peyré) Lorsque f est strictement convexe il y a unicité du minimum, tout minimum local est global, si f est différentiable, x est un minimum si et seulement si c'est un point critique, application à une fonctionnelle quadratique. (Rouvière) Si f est deux fois différentiable et $df(a) = 0$, $\forall x$, $\forall h$, $d^2f(x)(h, h) \geq 0$, alors a est un minimum global. **dev** Optimisation dans un Hilbert. (Hiriart-Urruty) Algorithme du gradient à pas optimal.

Leçon 230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Références : El Amrani, Gourdon, Hauchecorne, Beck-Malick-Peyré.

Développements : théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible, développement asymptotique de la série harmonique.

Cadre : soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Convergence de séries. —

1.1. Généralités. — (El Amrani) Définition d'une série de terme général u_n, des sommes partielles, de la convergence d'une série, de sa somme dans ce cas, de la suite des restes. Exemple d'une série géométrique, critère de convergence, somme. L'ensemble des séries est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, terme général de la somme de deux séries et du produit d'une série par un scalaire, sous-espace vectoriel des séries convergentes et somme de la somme et du produit. Si la série converge le terme général tend vers 0, contre-exemple de la réciproque, application de la contraposée à $(\sin(\alpha n))_n$ et $(\cos(\alpha n))_n$.

1.2. Critère de Cauchy et convergence absolue. — (El Amrani) Critère de Cauchy pour les séries, application à la divergence de la série harmonique, définition de la convergence absolue, définition de $l^1(\mathbb{K})$, convergence absolue implique convergence simple, contre-exemple de la réciproque, définition de la semi-convergence.

2. Comportement des séries à termes positifs. —

2.1. Comparaison de séries. — (El Amrani) Une série à termes positifs converge ssi la suite des sommes partielles est majorée. Règle de comparaison dans le cas de $\leq$, application à $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, et autre exemple dans les exercices. Règle d'équivalence, application au comportement des séries de Riemann, exemple dans les exercices, contre-exemples (Hauchecorne), corollaire sur la règle du $(n^\alpha u_n)_n$. Règle de domination, exemple dans les exercices.

2.2. Règles de Cauchy et de d'Alembert. — (El Amrani) Règle de Cauchy, application, règle de d'Alembert, application, comparaison des règles, règle de Raab-Duhamel (Gourdon).

2.3. Comparaison séries-intégrales. — (El Amrani) Théorème de comparaison série intégrale, équivalent du reste des séries de Riemann, comportement des séries de Bertrand, corollaire sur une règle de convergence. **dev** Développement asymptotique de la série harmonique.

3. Séries à termes quelconques. —

3.1. Séries alternées. — (El Amrani) Définition d'une série alternée, critère spécial des séries alternées, exemple, contre-exemple lorsque le terme général n'est pas positif.

3.2. Transformation d'Abel. — (Gourdon) Transformation d'Abel, remarque sur l'analogie avec une IPP, règle d'Abel, application à $\sum \sin(n\theta)\alpha_n$ et $\sum \cos(n\theta)\alpha_n$.

3.3. Produit de Cauchy de séries. — (El Amrani) Définition du produit de Cauchy de deux séries, contre-exemple pour montrer que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas forcément convergent, théorème qui assure que c'est le cas si au moins une des séries converge absolument, application à $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$.

3.4. Groupement et permutations de termes. — (El Amrani) Théorème de sommation par paquets, définition d'une série commutativement convergente, contre-exemple de la série harmonique alternée, théorème qui énonce que tout série absolument convergente est commutativement convergente et la somme est inchangée, remarque sur la possibilité d'obtenir n'importe quelle somme dans $\overline{\mathbb{R}}$ en modifiant l'ordre des termes dans une série semi-convergente. (Gourdon) Définition d'une série double, théorème sur les séries doubles absolument convergentes, contre-exemple (Hauchecorne).

4. Utilisation des séries de fonctions. —

4.1. Séries de Fourier. — (Beck-Malick-Peyré) Définition de $(e_n)_n$, des coefficients de Fourier d'une fonction $f \in L^2$, les $(e_n)_n$ forment une base hilbertienne de L^2, égalité de Parseval. Théorème de Dirichlet. (Gourdon) Calcul de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

4.2. Séries entières. — (Gourdon) Définition d'une série entière, lemme d'Abel, rayon de convergence, règle de Cauchy et de d'Alembert, somme et produit de séries entières. **dev** Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible, exemples et contre-exemple.

Leçon 234 - Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$.

Références : Briane-Pagès, Beck-Malick-Peyré, Bony, Rudin, *secondaire :* Hirsch-Lacombe.

Développements : théorème de Riesz-Fischer, théorème de Fourier-Plancherel, *théorème d'inversion de Fourier, densité des polynômes orthogonaux.*

Cadre : soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et λ la mesure de Lebesgue.

1. Construction et premières propriétés. —

1.1. Espaces $\mathcal{L}^p$, l^p. — (Briane-Pagès) Définition de $\mathcal{L}^p$, $l^p(\mathbb{N})$, de $\mathcal{L}^\infty$, des semi-normes associées, ce sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, inégalité de Hölder, Cauchy-Schwarz, Minkowski.

1.2. Espaces L^p et inclusions. — (Briane-Pagès) Définition des espaces L^p comme quotient de $\mathcal{L}^p$ par l'égalité presque partout, ce sont des espaces vectoriels normés, inclusions continues dans le cas d'une mesure finie, croissance de la norme et cas d'égalité dans le cas d'une mesure de proba, inclusions pour les espaces l^p.

1.3. Convergences dans les espaces L^p. — (Briane-Pagès) **dev** Théorème de Riesz-Fischer, corollaire sur le fait que dans le cas d'une convergence L^p une sous-suite converge presque partout, contre-exemple, théorème de Beppo-Levi, lemme de Fatou, théorème de convergence dominée L^p, contre-exemple, application pour la régularité des intégrales à paramètres.

2. Convolution et densité. —

2.1. Premiers exemples de parties denses. — (Briane-Pagès) Densité des fonctions étagées intégrables dans $L^p(\mu)$, $p < +\infty$, densité des fonctions en escalier à support compact et des fonctions continues à support compact dans $L^p(\mathbb{R})$, application à $\tau_a f \to f$ dans L^p (Beck-Malick-Peyré), remarquer que $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2, densité des fonctions étagées dans L^∞. Dans le cas de la mesure de Lebesgue, séparabilité de L^p, $p < \infty$ et non séparabilité de L^∞.

2.2. Convolution. — (Beck-Malick-Peyré) Définition de $f * g(x)$ lorsque $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable. Existence du produit de convolution $L^p * L^q$, la convolé est uniformément continue bornée par $||f||_p ||g||_q$ et $L^1 * L^1$ avec $f * g \in L^1$ et $||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$. Régularité : $\mathcal{C}_c^n * L^1 \subset \mathcal{C}^n$.

2.3. Suites régularisantes et applications. — (Beck-Malick-Peyré) Définition d'une approximation de l'unité, convergence L^p de $f * \alpha_n$ vers f lorsque $f \in L^p$. En considérant une suite régularisante (approximation de l'unité $\mathcal{C}_c^\infty$) et avec le théorème de régularisation on obtient la densité de $\mathcal{C}_c^\infty$ dans L^p. Application au lemme de Riemann Lebesgue.

3. Cas particulier de L^2. —

3.1. Aspect hilbertien. — Définition du produit scalaire, c'est donc un espace de Hilbert, qui admet une base hilbertienne dénombrable. (Beck-Malick-Peyré) Application : définition de l'espérance conditionnelle. Définition de l'espace L^2 à poids $L^2(I, \rho)$, existence et unicité d'une famille de polynômes orthogonaux, **dev** c'est une base hilbertienne sous certaines conditions, exemple des polynômes de Hermite, conséquence pour une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

3.2. Séries de Fourier. — (Beck-Malick-Peyré) Définition de $e_n : t \mapsto e^{int}$, des coefficients de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{T})$, les $(e_n)_n$ forment une famille orthonormale de $L^2(\mathbb{T})$, théorème de Fejér, équations de la chaleur sur le cercle, corollaires : $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$, réécriture du théorème de Bessel-Parseval, calcul de certaines sommes.

3.3. Transformée de Fourier. — (Bony) Définition de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ d'une fonction $f \in L^1$ (et c'est bien défini). La transformée de Fourier est continue, vérifie $||\widehat{f}||_\infty \leq ||f||_1$ et lemme de Riemann-Lebesgue. Exemple de la transformée de $x \mapsto e^{-|x|}$. La transformation de Fourier transforme produit de convolution en produit de fonctions. Liens régularité - décroissance rapide. **dev** Théorème d'inversion de Fourier lorsque $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. (Rudin) **dev** Théorème de Fourier-Plancherel, cor : lorsque $\widehat{f} \in L^1$, $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t) e^{itx} dt$ presque partout, formule de Parseval.

3.4. Espace de Sobolev H_0^1. — (Brezis) Définition de $H^1(I)$, exemple de la valeur absolue sur $[-1, 1]$, définition du produit scalaire de H^1 qui en fait un espace de Hilbert, existence d'un représentant continu, injection continue dans $\mathcal{C}^0(\overline{I})$. Définition de H_0^1, c'est un Hilbert, caractérisation comme l'ensemble des fonctions de $H^1(I)$ nulles au bord, inégalité de Poincaré. Théorème de Lax-Milgram et résolution de problèmes elliptiques.

Remarques : en fonction de la place on peut enlever série de Fourier, et espaces de Sobolev. On a mis transformée de Fourier dans la partie L^2 parce que le théorème de Fourier-Plancherel est important : on obtient un espace stable par transformée de Fourier qui y est une isométrie.

Leçon 235 - Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

Références : Briane-Pagès, Gourdon, Hauchecorne, Zuily-Queffélec *secondaires :* Bony, Rudin, Zuily, Amar-Matheron.

Développements : équation de la chaleur sur le cercle, théorème d'inversion de Fourier, *théorème de Fourier Plancherel, théorème d'Abel angulaire et théorème taubérien faible, marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$.*

Cadre : soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un espace de Banach.

1. Interversion de limites. —

1.1. Convergence uniforme et limite. — (Gourdon) La limite uniforme de fonction continues est continue, interprétation en termes d'interversion de limites : $\lim_n \lim_{y\to x} f_n(y) = \lim_{y\to x} \lim_n f_n(y)$, contre-exemple. Théorème de dérivation, application à $\exp' = \exp$, contre-exemple d'une suite de fonction $\mathcal{C}^1$ qui converge vers une fonction non dérivable, et d'une suite de fonctions qui converge uniformément et dont la dérivée converge vers une fonction différente de la dérivée de la limite (Hauchecorne).

1.2. Séries entières. — (Gourdon) Holomorphie des séries entières sur leur disque de convergence, différents comportements possibles au bord (Hauchecorne), théorème d'Abel angulaire et théorème taubérien faible, application à $\log(2)$.

2. Interversion d'intégrales.

— (Briane-Pagès) Théorème de Fubini-Tonelli, application au calcul de $\int e^{-x^2}$ et au volume de la boule unité, théorème de Fubini, contre-exemple, corollaire sur les séries doubles. (Gourdon) $\sum_{k\geq 2}(\zeta(k)-1) = 1$. **dev** Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$.

3. Interversion limite-intégrale. —

3.1. Théorème de convergence monotone. — (Briane-Pagès) Théorème de convergence monotone, application au calcul de $I_n(\alpha) = \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n e^{\alpha x} dx$. Lemme de Fatou, application : si $(f_n)_n$ CVS vers f et $\sup \int_X |f_n| < +\infty$ alors $f \in L^1$, intégration d'une dérivée et contre-exemple.

3.2. Théorème de convergence dominée. — (Briane-Pagès) Théorème de convergence dominée, contre-exemple du pic de masse, formule des compléments (Amar-Matheron), application à l'intégrale d'une dérivée, interversion série intégrale, lemme de Borel-Cantelli.

3.3. Régularité des intégrales à paramètres. — (Zuily-Queffélec) Théorème de continuité, de dérivabilité et d'holomorphie des intégrales à paramètres, exemple de Γ, contre-exemples (Hauchecorne), application à $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt = \arctan(x)$ (Gourdon), application à la régularisation des fonctions L^1 par convolution, remarque sur les théorèmes de densité. **dev** Équation de la chaleur sur le cercle.

4. Application à l'analyse de Fourier.

— (Bony, Rudin, Zuily) Continuité de la transformée de Fourier d'une fonction L^1, dérivabilité sous certaines hypothèse, remarque sur l'application aux EDP et à l'isomorphisme sur l'espace de Schwarz. (Rauch) Équation de Schrödinger sur $\mathbb{R}$. Transformée de Fourier d'une gaussienne, **dev** théorème d'inversion de Fourier, application au calcul de la transformée de Fourier de $\frac{1}{1+x^2}$, **dev** théorème de Fourier Plancherel.

Leçon 236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Références : Gourdon, Briane-Pagès, Beck-Malick-Peyré, Amar-Matheron, Bony, Zuily, *secondaires :* Ouvrard II, Willem.

Développements : inversion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$, étude de la loi Gamma.

Cadre : soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un espace de Banach.

1. Méthodes directes. —

1.1. Calcul de primitives. — (Gourdon) Théorème fondamental du calcul intégral, exemples de primitives : $1/(x^2+a^2)$, $\cos^n(x)\sin^m(x)$,..

1.2. Intégration par parties. — (Gourdon) Formule d'intégration par parties, exemples des intégrales de Wallis, des primitive de log et de arctan (Briane-Pagès), $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

1.3. Changement de variables. — (Gourdon) Théorème de changement de variables pour les intégrales de Riemann, application au calcul de $\int \cos^n(x)\sin^m(x)$ et d'intég-rales de fractions rationnelles en cos et sin. (Briane-Pagès) Théorème de changement de variables général, calcul de $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, volume de la boule unité.

1.4. Théorème de Fubini. — (Briane-Pagès) Théorème de Fubini-Tonelli, théorème de Fubini, application au calcul de $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx$. (Ouvrard II) $\mathbb{E}[X] = \int \mathbb{P}(X > t)\,dt$ pour X positive.

2. Convergence. —

2.1. Suites et séries de fonctions. — (Briane-Pagès) Théorème de convergence dominée, application à $\sum_{n\geq 1}(-1)^n/n = \log(2)$, $\int_{x>0} e^{-x}\log(x)\,dx = -\gamma$, théorème d'interversion série intégrale, application à $\int_{x>0}\sin(x)/(e^x-1)\,dx = \sum_{n\geq 1} 1/(1+n^2)$, et $\int_0^1 \ln(t)/(1+t^2)$ (FGN Analyse 3).

2.2. Sommes de Riemann. — (Gourdon) Définition d'une somme de Riemann, théorème de convergence, application au calcul de $\int_0^\pi \log(1-2\rho\cos(\theta)+\rho^2)\,d\theta$.

3. Analyse complexe. —

3.1. Prolongement analytique. — (Beck-Malick-Peyré) Théorème de prolongement analytique, application au calcul de la transformée de Fourier d'une gaussienne. **dev** Fonction caractéristique de la loi Gamma et conséquences.

3.2. Théorème des résidus. — (Amar-Matheron) Définition d'un résidu d'une fonction méromorphe, calcul pratique d'un résidu, théorème des résidus, calcul de $\int_{t=0}^{+\infty} dt/(1+t^6)$, formule des compléments, remarque sur le prolongement de ζ à $\mathbb{C}$. Intégrale de Fresnel (FGN Analyse 3).

4. Étude d'une fonction. —

4.1. Intégrales à paramètres. — (Briane-Pagès) Théorèmes de régularité des intégrales à paramètres. Remarque sur le calcul de la transformée de Fourier d'une gaussienne. Intégrale de Dirichlet (FGN Analyse 3).

4.2. Analyse de Fourier. — (Bony et Zuily) Définition de la transformée de Fourier d'une fonction $L^1(\mathbb{R})$, définition de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, lien entre dérivation et multiplication par un monôme. **dev** Théorème d'inversion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$, application au calcul de la transformée de Fourier de $1/(1+x^2)$, il est encore vrai dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Équation de Schrödinger sur $\mathbb{R}$. (Willem) Théorème de Fourier Plancherel, application au calcul de $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{sinc}^2(x)\,dx = \pi$.

5. Approximation d'intégrales. —

(Demailly) Définition des méthodes de quadrature élémentaires, composées, de l'ordre d'une méthode, exemples des méthodes des rectangles à gauche, à droite, du point milieu, des trapèzes, ordre des méthodes. Convergence lorsque le nombre de subdivisions tend vers $+\infty$.

Remarques : attention on navigue entre intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue, être clair sur ce point, et sur le lien entre les deux. D'autre part les théorèmes ne sont pas dans l'ordre, le savoir et le préciser lors de la présentation. La calcul de $\int_{x>0} e^{-x}\log(x)\,dx = -\gamma$ se trouve aussi dans Faraut, *Calcul intégral.*

Leçon 239 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Références : Zuily-Queffélec, Bony, Beck-Malick-Peyré, Ouvrard 2, Barbe-Ledoux, *secondaires :* Hauchecorne, FGN Analyse 3, Rudin, Foata-Fuchs (2003).

Développements : équation de Schrödinger sur $\mathbb{R}$, théorème d'inversion de Fourier.

Introduction : les intégrales à paramètre interviennent très souvent en analyse et en probabilités (produit de convolution, transformée de Fourier, fonction caractéristique). L'intérêt majeur de la convolution est la régularisation, et donc les résultats de densité, la transformée de Fourier est intéressante pour transformer le produit de convolution en produit et la dérivation en produit par une puissance de x : EDP. En probabilité la fonction caractéristique est extrêmement puissante puisqu'elle caractérise la loi et la convergence en loi.

Cadre : soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, E un espace métrique, et $f : E \times X \to \mathbb{C}$. On considère $F : t \mapsto \int_X f(t,x)\, d\mu(x)$.

1. Régularité sous l'intégrale et comportement asymptotique. —

1.1. Continuité. — (Briane-Pagès etZuily-Queffélec) Théorème de continuité sous l'intégrale, remarque sur la continuité globale, exemple des intégrales de la borne supérieure pour la mesure de Lebesgue ($u \mapsto \int_a^u f(x) d\lambda(x), f \in L^1(\lambda)$). (FGN Analyse 3) Application au calcul de $\int_{\mathbb{R}} dx/(x^2+a^2)(x^2+b^2)$. (Hauchecorne) Contre-exemple de $x \mapsto \int_0^{+\infty} xe^{-xt}dt$ discontinue en 0.

1.2. Dérivabilité. — ((Briane-Pagès etZuily-Queffélec) Théorème de dérivation sous l'intégrale, remarque sur le cas de classe $\mathcal{C}^1$, k-fois dérivable et de classe $\mathcal{C}^k$ (attention, il suffit de majorer uniformément la k-ème dérivée). (FGN Analyse 3) Application au calcul de l'intégrale de Dirichlet. (Hauchecorne) Contre-exemple.

1.3. Holomorphie. — (Zuily-Queffélec) Théorème d'holomorphie sous l'intégrale, application à Γ holomorphe sur $\{\Re(z) > 0\}$. (Beck-Malick-Peyré) Prolongement de Γ en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

1.4. Comportement asymptotique. — (Gourdon) Intégration des relations de comparaison, corollaire sur l'équivalent de $\int_a^x g(t)dt$ lorsque $\frac{g'(t)}{g(t)} \sim \frac{\mu}{x}$ dans les exercices, exemple du logarithme intégral, DA en 0 de $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ (Pommellet).

2. Produit de convolution. — Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mesurables.

2.1. Définition et application à la régularisation. — (Beck-Malick-Peyré) Définition de $f * g(x)$ lorsque $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable, existence de $g * f(x)$ et égalité presque partout. Existence du produit de convolution $L^p * L^q$, la convolé est uniformément continue bornée par $||f||_p||g||_q$ et $L^1 * L^1$ avec $f * g \in L^1$ et $||f*g||_1 \leq ||f||_1||g||_1$, bilinéarité de $*$ dans tous les cas. Régularité : $\mathcal{C}_c^n * L^1 \subset \mathcal{C}^n$ et expression de la dérivée.

2.2. Approximations de l'unité. — (Beck-Malick-Peyré) Définition d'une approximation de l'unité, exemple de $\alpha_n(x) = n\alpha(nx)$ où $\alpha(x) = \varphi(x)/\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)dt$ où $\varphi(t) = \exp(-\frac{1}{1-|t|^2})$, convergence ponctuelle, uniforme et L^p de $f * \alpha_n$ vers f lorsque f est continue, uniformément continue, et L^p. Application à la $||.||_\infty$ densité de $\mathcal{C}_c^\infty$ dans $\mathcal{C}_c$ et la $||.||_p$ densité de $\mathcal{C}_c^\infty$ dans L^p. Application au lemme de Riemann Lebesgue.

3. Transformée de Fourier. —

3.1. Définition et premières propriétés. — (Bony) Définition de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ d'une fonction $f \in L^1$ (et c'est bien défini). La transformée de Fourier est continue, et vérifie $||\widehat{f}||_\infty \leq ||f||_1$. Exemple de la transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{[-a,a]}$ et de $x \mapsto e^{-|x|}$. Lemme de Riemann-Lebesgue. (Rudin) Propriétés. (Bony) La transformation de Fourier transforme produit de convolution en produit de fonctions.

3.2. Dérivation et inversion. — (Bony) Lien décroissance rapide - régularité entre f et $\widehat{f}$. **dev** Théorème d'inversion de Fourier lorsque $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Calcul de $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f)$ lorsque $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et injectivité de $\mathcal{F}$. (Beck-Malick-Peyré) Densité des polynômes orthogonaux.

3.3. Transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. — (Zuily) Définition de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, des semi-normes, inclusion dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ (donc on peut prendre la transformée de Fourier). La transformation de Fourier est une application linéaire bijective de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui même, formule d'inversion de Fourier. (Rauch) **dev** Équation de Schrödinger sur $\mathbb{R}$.

4. Fonction caractéristique en probabilités. — (Ouvrard II) Définition de la fonction caractéristique φ_X de X et c'est une fonction continue. La fonction caractéristique caractérise la loi. Fonction caractéristique de la loi de Laplace et application avec le théorème d'inversion à la fonction caractéristique de la loi de Cauchy. Fonction caractéristique et moments. (Barbe-Ledoux) Théorème des moments. X et Y sont indépendantes ssi $\varphi_{(X,Y)} = \varphi_X\varphi_Y$. Si X et Y sont indépendantes alors $\varphi_{X+Y} = \varphi_X\varphi_Y$, contre-exemple de la réciproque (Foata-Fuchs (2003)). Exemple d'une somme de n Bernoulli indépendantes. (Ouvrard II) Théorème de Lévy (admis), théorème central limite.

Leçon 241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Références : Gourdon, Briane-Pagès, Hauchecorne, Rudin, Zuily-Queffélec, *secondaire :* Amar-Matheron.

Développements : équation de la chaleur sur le cercle, théorème d'Abel angulaire et taubérien faible.

Introduction : les suites et séries de fonctions sont utilisées principalement pour approcher des fonctions : on dit qu'une certaine fonction est limite, en un certain sens, d'une suite ou d'une série de fonctions plus simples, ce qui permet de l'étudier plus facilement. On donne donc plusieurs modes de convergence et on cherche à voir si la limite possède certaines propriétés. On donne également deux exemples : séries entières et séries de Fourier, qui sont riches en applications, qui ont des outils et des résultats spécifiques. Résultats importants : continuité de la limité uniforme, théorème de la convergence uniforme des dérivées, théorème de Weierstrass, Riesz-Fischer, les fonctions holomorphes sont analytiques, théorème de Fejér, de Dirichlet, les $(e_n)_n$ forment une base hilbertienne.

Cadre : soit X un espace métrique, $f, (f_n)_n$ des fonctions de X à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Convergence de suites et séries de fonctions. —

1.1. Modes de convergence. — (Gourdon) Définition de la convergence simple, de la convergence uniforme, convergence uniforme implique convergence simple, exemple de $x \mapsto x^n$ qui converge simplement vers 0 sur $[0,1[$ et uniformément sur $[0,a]$ pour tout $a < 1$ et exemple de $\mathbb{1}_{[n,n+1]}$, théorèmes de Dini. Critère de Cauchy uniforme et norme infinie : $(\mathcal{B}(X,\mathbb{K}), ||.||_\infty)$ est complet. Définition de la convergence normale pour les séries, exemple de $\sum \frac{x^n}{n^2}$, la convergence normale implique la convergence uniforme, (Hauchecorne) contre-exemple de $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n}$.

1.2. Régularité de la limite. — (Gourdon) La limite uniforme d'une suite de fonctions continues en $x_0 \in X$ est continue en $x_0 \in X$, (Hauchecorne) contre-exemple pour la convergence simple de $x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$, (Zuily-Queffélec) théorème de Weierstrass, interversion limite intégrale de Riemann dans le cas de la convergence uniforme, (Hauchecorne) contre-exemple dans le cas d'une convergence simple (pic de masse). Théorème de la limite uniforme de la dérivée, (Hauchecorne) contre-exemples. Remarque sur le cas $\mathcal{C}^p$. (Amar-Matheron) Théorème de Weierstrass pour les suites de fonctions holomorphes, holomorphie de ζ.

2. Intégrabilité. — (Briane-Pagès)

2.1. Convergence L^p. — Définition de la convergence presque sûre, exemple de $x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$, définition de L^p et $||.||_p$ pour $1 \leq p < \infty$, théorème de Riesz-Fischer et convergence presque partout à une sous-suite près quand il y a convergence L^p, contre exemple des paliers oscillants (sans référence).

2.2. Interversion limite-intégrale. — Théorème de Beppo-Levi, théorème de convergence dominée L^p, contre exemple (pic de masse), corollaire : interversion série intégrale, application au calcul de $\int \sin(x)/(1-e^x)dx$.

3. Séries entières. —

3.1. Définition, rayon de convergence. — (Gourdon) Définition d'une série entière, lemme d'Abel, définition du rayon de convergence. Règle de d'Alembert, de Cauchy, application à la série de l'exponentielle. (Hauchecorne) Trois exemples pour montrer que tout peut se passer sur le disque de convergence. Somme et produit de séries entières, exemple de cosinus et sinus. **dev** Théorème d'Abel angulaire, théorème taubérien faible.

3.2. Régularité des séries entières. — Une série entière est holomorphe sur son disque de convergence et expression de la dérivée. Application à la résolution d'EDO : exemple de $x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1$ de solution $\frac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2}$. (Rudin) Les fonctions holomorphes sont analytiques, théorème des zéros isolés, principe du prolongement analytique, principe du maximum. Contre exemple sur $\mathbb{R}$ de $\exp(-1/x^2)$. (Zuily-Queffélec) Il existe un point du cercle de convergence telle que la fonction holomorphe ne soit pas développable en série entière en ce point, 1 est singulier pour les séries à termes positifs.

4. Séries de Fourier. — (Gourdon) Définition d'une série trigonométrique. (Zuily-Queffélec) Définition des coefficients de Fourier d'une fonction L^2, de sa série de Fourier, théorème de Fejér et théorème de Dirichlet, exemple de la fonction triangle et calcul de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$. (Dym-McKean) **dev** Équation de la chaleur sur le cercle. Les $(e_n)_n$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$, remarque sur la convergence L^2, égalité de Parseval.

Leçon 243 - Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Références : Gourdon, Rudin, Zuily-Queffélec, *secondaires :* Hauchecorne, Amar-Matheron, Pommellet.

Développements : espace de Bergman du disque unité, théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible.

Introduction : les séries entières apparaissent dans les fonctions DSE, dont notamment les fonctions holomorphes, ce qui a de très nombreuses conséquences. L'intérêt des séries entières est le fait d'approcher une fonction par une suite de fonctions plus simples. On s'intéresse d'abord aux séries entières en elles-mêmes. Propriété importante : elles sont $\mathcal{C}^\infty$ et on connait toutes les dérivées.

Cadre : soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

1. Définition et premières propriétés. —

1.1. Séries entières et rayon de convergence. — (Gourdon) Définition d'une série entière, lemme d'Abel, définition du rayon de convergence, convergence absolue sur le disque ouvert, divergence en dehors du disque, convergence normale sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert. Exemple de $\sum_n z^n$, de la série génératrice d'une variable aléatoire discrète. Le rayon de convergence est non nul ssi $\exists q > 0$ tq $|u_n| \leq q^n$, règle de d'Alembert, de Cauchy, RCV de $\sum_n n!z^n$, $\sum_n n^\alpha z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et de $\exp := \sum_n \frac{z^n}{n!}$, formule de Hadamard (Pommellet), RCV de $\sum_n z^{2n}$.

1.2. Opérations sur les séries entières. — (Gourdon) Somme et produit de deux séries entières et minoration du rayon de convergence, exemple d'un cas d'égalité $\sum_n z^n + 0$, $\sum_n z^n \times 1$ et d'un cas de non égalité $\sum_n z^n + \sum_n -z^n$. Application à l'écriture de cos et sin comme des séries entières de RCV infini, définition de la série dérivée, rayon de convergence égal à celui de la série initiale. Si $a_0 \neq 0$ l'inverse de la série entière est une série entière.

2. Régularité de la somme d'une série entière.—

2.1. Continuité, dérivabilité, primitive. — (Gourdon) Continuité d'une série entière sur son disque de convergence, caractère $\mathcal{C}^\infty$ et expression de la dérivée, application à la dérivée de exp, cosinus et sinus, au développement en série entière de $\frac{1}{(1+x)^2}$, processus de Galton-Watson, application à la résolution d'EDO : exemple de $x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1$ de solution $\frac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2}$. Conséquence sur l'expression des coefficients, primitive d'une série entière, application au DSE de $\ln(1+x)$, unicité du développement en série entière lorsque les fonctions coïncident au voisinage de 0.

2.2. Fonctions développables en séries entières. — Ici f est une fonction d'une variable réelle. (Gourdon) Définition d'être développable en série entière autour d'un point : être somme d'une série entière (qui est alors sa série de Taylor). Remarque sur l'utilisation de Taylor-Lagrange ou Taylor reste intégral, (sans référence) critère : il existe $M, a \geq 0$, $\forall x \in]-R, R[$, $|f^{(n)}(x)| \leq Ma^n$. Contre exemple de $x \mapsto e^{-1/x^2}$ pour montrer que la série de Taylor peut converger sans que f soit DSE. DSE usuels.

2.3. Lien avec les fonctions holomorphes. — (Rudin) Toute fonction holomorphe est DSE. **dev** Espace de Bergman. Théorème des zéros isolés, principe du prolongement analytique, prolongement de Γ (Amar-Matheron), formule de Parseval, théorème de Liouville, théorème de d'Alembert-Gauss, variante d'une domination polynomiale (Gourdon), principe du maximum.

3. Comportement au bord du disque de convergence. —

(Hauchecorne) contre-exemples pour le convergence sur le disque de convergence. (Gourdon) **dev** Théorème d'Abel angulaire et Taubérien faible, application à $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}/n = \log(2)$. (Zuily-Queffélec) Définition des points singuliers, réguliers, il existe un moins un point singulier, 1 est singulier pour les séries à termes positifs.

Leçon 245 - Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

Références : Amar-Matheron, Rudin, Beck-Malick-Peyré, *secondaire :* Zuily-Queffélec.

Développements : densité des polynômes orthogonaux, espace de Bergman du disque unité, *étude de la loi Gamma.*

Introduction : les fonctions holomorphes apparaissent notamment dans l'étude des séries entières, puisque c'est la même chose. Le théorème de Cauchy est fondamental, et ce qui fait tout marcher. Les fonctions holomorphes ont des propriétés extrêmement fortes, contrairement aux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, il faut le souligner. Dire qu'on a pas mis le principe de l'argument et le théorème de Rouché.

Cadre : soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

1. Holomorphie. —

1.1. Fonctions $\mathbb{C}$ dérivables. — (Amar-Matheron) Définition d'être $\mathbb{C}$-dérivable en un point, exemple de l'identité, contre-exemple du conjugué, stabilité, caractérisation avec la différentielle, équations de Cauchy-Riemann. Définition d'une fonction holomorphe sur Ω, définition de $\mathcal{H}(\Omega)$, c'est une algèbre.

1.2. Exemples et contre-exemples fondamentaux. — (Amar-Matheron) Contre-exemple du module, de la partie réelle et imaginaire. Les séries entières sont holomorphes sur leur disque de convergence, exemple de exp, cos, sin, application à tan. Définition d'un logarithme, d'un argument, détermination, détermination principale, holomorphie de Log, application à la puissance.

2. Formule de Cauchy et conséquences. —

2.1. Formule de Cauchy. — (Rudin) Définition d'un chemin, de l'intégrale le long d'un chemin. Théorème de Cauchy. Définition de l'indice d'un chemin fermé, propriétés de l'indice. Formule de Cauchy, version pour un cercle, formule de la moyenne. Formule de Cauchy pour les dérivées.

2.2. Analyticité des fonctions holomorphes. — (Rudin) Analyticité des fonctions holomorphes, remarque sur l'expression des coefficients. Corollaire : si f est holomorphe alors f' aussi. Principe des zéros isolés et principe du prolongement analytique.

2.3. Inégalités de Cauchy. — (Amar-Matheron) Inégalités de Cauchy, théorème de Weierstrass, définition et holomorphie de la fonction ζ, théorème de Liouville, théorème de d'Alembert-Gauss. Théorème d'holomorphie sous le signe intégral. **dev** Densité des polynômes orthogonaux. Définition et holomorphie de la fonction Γ.

2.4. Principe du maximum. — (Amar-Matheron) Si f admet un maximum local alors elle est constante, théorème de l'image ouverte, principe du maximum. Lemme de Schwarz, automorphismes de $\mathbb{D}$.

3. Fonctions méromorphes. —

3.1. Singularités. — (Amar-Matheron) Définition de la série de Laurent d'une fonction holomorphe sur une couronne, convergence normale et f est égale à sa série de Laurent. Définition d'une singularité, d'une singularité effaçable, si f est bornée au voisinage de a alors c'est une singularité effaçable, théorème de Casaroti-Weierstrass. (sans référence) Exemples de singularités de différents types ($\sin(z)/z$ est effaçable, $\sin(1/z)$ est essentielle).

3.2. Fonctions méromorphes. — (Amar-Matheron) Définition d'une fonction méromorphe. (Beck-Malick-Peyré) Prolongement méromorphe de Γ à $\mathbb{C}$, développement de $\pi^2\cos(\pi z)/\sin^2(\pi z)$. (Amar-Matheron) Prolongement de ζ au demi plan $\{\Re(z) > 0\}$.

3.3. Théorème des résidus. — (Amar-Matheron) Définition d'un résidu d'une fonction méromorphe, calcul pratique d'un résidu, théorème des résidus, calcul de $\int_{t=0}^{+\infty} dt/(1+t^6)$, **dev** formule des compléments, prolongement de ζ à $\mathbb{C}$.

4. Topologie de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. —

(Amar-Matheron) Définition d'une suite exhaustive de compacts, distance sur $\mathcal{H}(\Omega)$, réécriture des théorème déjà donné + théorème de Montel. (Zuily-Queffélec) Application au théorème de Cartan. **dev** Espace de Bergman du disque unité.

Leçon 246 - Séries de Fourier. Exemples et applications.

Références : Gourdon, Zuily-Queffélec, Beck-Malick-Peyré, *secondaire :* Rudin.

Développements : équation de la chaleur sur le cercle, formule sommatoire de Poisson.

Introduction : les séries de Fourier ont été introduites par Joseph Fourier au début du 19ème siècle (1822) pour résoudre l'équation de la chaleur. L'idée générale est d'être capable de reconstituer une fonction périodique à partir d'un nombre dénombrable de valeurs, en décomposant une fonction périodique comme une somme de signaux sinusoïdaux. Majeur : théorèmes de convergence, surtout Fejér qui a beaucoup de conséquence, notamment que $(e_n)_n$ soit une base hilbertienne ce qui a de nombreuses applications. Évidemment les EDP à la fin sont les principales applications.

Cadre : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique.

1. Coefficients de Fourier. —

1.1. Définition. — (Zuily-Queffélec) Définition de $(e_n)_n$, c'est une famille orthonormale de $L^2(\mathbb{T})$, définition des polynômes trigonométriques comme combinaison linéaire des e_n, pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ définition de $c_n(f)$, pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, $c_n(f) =< f, e_n >$, définition de la série de Fourier de f. (Gourdon) Écriture de S_N avec des coefficients réels et expression de ces coefficients.

1.2. Premières propriétés. — (Zuily-Queffélec) Coefficients de Fourier du conjugué, d'une translatée, de $e_k f$, d'une dérivée dans le cas dérivable, unicité des coefficients de Fourier dans le cas d'une série trigonométrique absolument convergente. (Beck-Malick-Peyré) Lemme de Riemann Lebesgue, définition du produit de convolution sur $L^1(\mathbb{T})$, $f * e_n = c_n(f)e_n$, morphisme d'algèbre entre $(L^1(\mathbb{T}), +, *, ||.||_1)$ et $(c_0(\mathbb{Z}), +, ., ||.||_\infty)$ continu de norme 1.

1.3. Exemples. — (Zuily-Queffélec) Fonction signal, fonction triangle, e^{iat}. Dessins en annexe.

2. Convergences des séries de Fourier. —

2.1. Théorème de Fejér et conséquences. — (Zuily-Queffélec) Noyaux de Dirichlet et de Fejér, théorème de Fejér uniforme et L^p, corollaires : densité des polynômes orthogonaux dans les fonctions continues 2π périodiques et dans les espaces L^p, si la série de Fourier de f converge ponctuellement alors elle converge vers f, injectivité des coefficients de Fourier pour f continue 2π périodique et pour $f \in L^1$. Si f est continue 2π périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors sa série de Fourier converge normalement vers f.

2.2. Aspect hilbertien. — (Beck-Malick-Peyré) Les $(e_n)_n$ forment une base hilbertienne, égalité de Parseval. (Rudin) Égalité de Parseval pour les séries entières, théorème de Liouville, principe du maximum.

2.3. Théorème de Dirichlet. — (Gourdon) Existence d'une fonction continue dont la série de Fourier diverge en 0, théorème de Dirichlet. Phénomène de Gibbs et dessin en annexe.

3. Applications. —

3.1. Premières applications. — (Zuily-Queffélec) Inégalité isopérimétrique, caractérisation de la régularité de f avec ses coefficients de Fourier.

3.2. Calcul de sommes. — (Zuily-Queffélec) Somme des inverses des impairs au carré, somme des inverses des carrés, somme des inverses des puissances 4èmes. D'autres exemples. (Gourdon) **dev** Formule sommatoire de Poisson, corollaire sur la fonction θ.

3.3. Résolution d'équations aux dérivées partielles. — (Dym-McKean) **dev** Équation de la chaleur sur le cercle. (Zuily-Queffélec) Remarque sur l'équation de la chaleur sur la barre et sur les équations des ondes et de Laplace.

Leçon 250 - Transformation de Fourier. Applications.

Références : Bony, Briane-Pagès, Rudin, Zuily, Willem, Barbe-Ledoux, Ouvrard 2, *secondaires :* Beck-Malick-Peyré, Foata-Fuchs (2003), Li.

Développements : théorème d'inversion de Fourier, équation de Schrödinger sur $\mathbb{R}$, *théorème de Fourier-Plancherel, densité des polynômes orthogonaux.*

Cadre : les fonctions considérées vont de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$. On adopte la convention $\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)e^{-ix\cdot t}dt$.

1. Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. —

1.1. Définition et premières propriétés. — (Bony) Définition de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ d'une fonction $f \in L^1$ (et c'est bien défini). La transformée de Fourier est continue, et vérifie $||\widehat{f}||_\infty \leq ||f||_1$. Exemple de la transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{[-a,a]}$ et de $x \mapsto e^{-|x|}$. Lemme de Riemann-Lebesgue. (Rudin) Transformée de Fourier de $f(x)e^{iax}$ et $f(x-a)$.

1.2. Produit de convolution. — (Briane-Pagès) Définition de $f * g(x)$ pour $y \mapsto f(y) - g(x-y)$ intégrable, associativité, commutativité, bilinéarité, pour $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ $f * g$ est bien défini p.p., est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $||f * g||_1 \leq ||f||_1||g||_1$, ainsi, $(L^1(\mathbb{R}^d), +, *)$ est une algèbre de Banach (pas forcément unitaire). (Bony) La transformation de Fourier transforme produit de convolution en produit de fonctions, ainsi c'est un morphisme d'algèbre de $(L^1(\mathbb{R}^d), +, *)$ dans $(L^1(\mathbb{R}^d), +, \times)$. App : $(L^1(\mathbb{R}^d), +, *)$ ne possède pas d'élément unité.

1.3. Dérivation et inversion. — (Bony) Si $f, \partial_j f$ sont dans L^1, alors $\mathcal{F}(\partial_j f)(y) = (iy_j)\mathcal{F}(f)(y)$, remarque sur le lien régularité de f - décroissance rapide de $\widehat{f}$. Si $f, x_j f$ sont dans L^1, alors $\widehat{f}$ est dérivable par rapport à y_j et vérifie $\partial_j\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(-ix_j f)$, remarque sur le lien régularité de $\widehat{f}$ - décroissance rapide de f. **dev** théorème d'inversion de Fourier lorsque $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. App : transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, (calcul de $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f)$ lorsque $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$) et injectivité de $\mathcal{F}$. (Beck-Malick-Peyré) **dev** Densité des polynômes orthogonaux sous certaines hypothèses.

2. Extensions de la transformation de Fourier. —

2.1. Dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. — (Rudin) **dev** Théorème de Fourier-Plancherel, cor : lorsque $\widehat{f} \in L^1$, $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)e^{itx}dt$ presque partout, formule de Parseval. (Willem) Application au calcul de $\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sinc}^2(x)\,dx = \pi$.

2.2. Dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. — (Zuily) Définition de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, des semi-normes, inclusion dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ (donc on peut prendre la transformée de Fourier), exemple de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, de $x \mapsto e^{-ax^2}$ et calcul de sa transformée de Fourier, stabilité par multiplication par x^α, par dérivation, par produit et par convolution et les formules déjà vues pour la transformée de Fourier sont toujours vraies. La transformation de Fourier est une application linéaire bijective de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui même, majoration des semi-normes, formule d'inversion de Fourier. (Gourdon) Formule sommatoire de Poisson.

2.3. Dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. — (Zuily) Définition de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ comme le dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, injection de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ par restriction, stabilité par dérivation, multiplication par une fonction à croissance au plus polynomiale, contient L^p pour tout p, les fonctions majorées par un polynôme, ne contient pas $x \mapsto e^{x^2}$. Définition de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, exemple de $\widehat{\delta_a}$, c'est une application linéaire bijective de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, inverse, coïncide avec la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, propriétés sur la multiplication, la dérivation.

3. Applications. —

3.1. Fonction caractéristique en probabilités. — (Ouvrard II) Définition de la fonction caractéristique, remarque sur le cas d'une va à densité. Elle caractérise la loi, formule d'inversion. Fonction caractéristique de la loi de Laplace et application avec le théorème d'inversion à la fonction caractéristique de la loi de Cauchy, fonction caractéristique de la loi normale, fonction caractéristique de la loi exponentielle. (Barbe-Ledoux) Critère d'indépendance avec la fonction caractéristique, fonction caractéristique d'une somme de va indépendantes, exemples (Foata-Fuchs (2003)). (Ouvrard II) Théorème de Lévy version faible, application au théorème central limite.

3.2. Équations aux dérivées partielles. — (Stein-Shakarchi) Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$, (Rauch) **dev** équation de Schrödinger sur $\mathbb{R}$.

Leçon 253 - Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Références : Rombaldi (Analyse réelle), Beck-Malick-Peyré, Tauvel (Géométrie), Briane-Pagès, Rouvière, Hirsch-Lacombe, *secondaires :* Ciarlet, Gonnor-Tosel (Topologie et Anaf).

Développements : ellipsoïde de John-Loewner, optimisation dans un Hilbert.

Cadre : soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

1. Ensembles convexes, fonctions convexes. —

1.1. Ensembles convexes et enveloppes convexes. — (Tauvel (Géométrie)) Définition d'un convexe, exemple des convexes de $\mathbb{R}$, définition de l'enveloppe convexe d'une partie, l'enveloppe convexe d'un ouvert est ouverte, contre-exemple pour les fermés, théorème de Gauss-Lucas, théorème de Carathéodory, l'enveloppe convexe d'un compact est compact.

1.2. Fonction convexe et caractérisation. — (Rombaldi (Analyse réelle)) Définition d'une fonction (strictement) convexe, concave, exemple de la norme sur $\mathbb{R}^n$. Théorème de la pente (et dessin en annexe), une fonction convexe majorée sur $\mathbb{R}$ est constante, application à une EDO, caractérisation de la convexité en terme de différentielle, caractérisation dans le cas deux fois différentiable. (Beck-Malick-Peyré) Application aux fonctions quadratiques. Log-convexité de Γ et c'est la seule fonction log-convexe qui vaut 1 en 0 et vérifie $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

2. Inégalités de convexité. —

2.1. Sur les fonctions. — (Rombaldi (Analyse réelle)) Inégalité $\exp(x) \geq x+1$, application à $(1+z_n/n)^n \to e^z$, inégalité $\log(x) \leq x-1$, $x > 0$, application au développement asymptotique de la série harmonique, inégalité de Young, inégalité arithmético-géométrique, inégalité de Jensen. Log-concavité du déterminant et **dev** ellipsoïde de John-Loewner.

2.2. En théorie de l'intégration. — (Briane-Pagès) Inégalité de Hölder, application aux relations d'inclusion entre les L^p dans le cas d'une mesure finie, inégalité de Minkowski, $(L^p, ||.||_p)$ est un espace vectoriel normée.

2.3. En probabilités. — (Barbe-Ledoux) Inégalité de Jensen en probabilités, application à l'inégalité triangulaire, avec la fonction carré et la fonction inverse.

3. Optimisation en dimension finie. —

3.1. Convexité et extrema. — (Beck-Malick-Peyré) Lorsque f est strictement convexe il y a unicité du minimum, tout minimum local est global, si f est différentiable, x est un minimum si et seulement si c'est un point critique, application à une fonctionnelle quadratique. (Rouvière) Si f est deux fois différentiable et $df(a) = 0$, $\forall x$, $\forall h$, $d^2f(x)(h,h) \geq 0$, alors a est un minimum global.

3.2. Points fixes. — (Rouvière) Cas où la dérivée seconde est strictement positive de la méthode de Newton, théorème du point fixe version convexe compact, contre-exemple d'une rotation.

4. Utilisation en analyse fonctionnelle. —

4.1. Théorème de projection et conséquences. — (Hirsch-Lacombe) Théorème de projection sur un convexe fermé, cas d'un s.e.v. fermé. (Beck-Malick-Peyré) Existence de l'espérance conditionnelle. (Rouvière) Application aux moindres carrés. (Hirsch-Lacombe) Théorème du supplémentaire orthogonal et caractérisation de la densité avec l'orthogonal, application : les polynômes de Hermite forment une base hilbertienne de l'espace L^2 à poids e^{-x^2}. Théorème de Riesz, théorème de Lax-Milgram et (Brezis) résolution d'une EDP . (Ciarlet) **dev** Optimisation dans un Hilbert.

4.2. Séparation des convexes. — (Brezis) Définition d'un hyperplan de séparation, deuxième forme du théorème de Hahn-Banach géométrique (admis), critère de densité. (Gonnor-Tosel (Topo-Anaf)) Application du critère de densité.

Leçon 260 - Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

Références : Ouvrard 1 et 2, Barbe-Ledoux, *secondaire :* Zuily-Queffélec.

Développements : fonction caractéristique et moments, processus de Galton Watson, *marche aléatoire dans* $\mathbb{Z}^d$*, théorème central limite.*

Cadre : soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et X un variable aléatoire sur Ω à valeur dans un espace mesurable $(E, \mathcal{B})$.

1. Espérance d'une variable aléatoire. —

1.1. Définition et premières propriétés. — (Barbe-Ledoux) Définition d'une v.a.r. intégrable, définition de son espérance dans ce cas, théorème de transfert, expression de $\mathbb{E}[X]$, linéarité, inégalité de Jensen, inégalité triangulaire, sur le carré, inégalité de Markov. (Ouvrard II) caractérisation de l'égalité en loi de va X et Y via $\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(Y)]$. (Barbe-Ledoux) Critère d'indépendance d'une famille de va, corollaire sur l'espérance d'un produit de va indépendantes. (Ouvrard II) Critère de convergence presque sûre.

1.2. Espérances de lois usuelles. — (Ouvrard II) Expression de l'espérance pour une va discrète, exemples des lois de bernoulli, binomiale, poisson, géométrique,expression de l'espérance pour une va à densité, exemples des lois uniforme, normale, exponentielle. Exemple de la loi de Cauchy qui n'admet pas d'espérance. Espérance d'un vecteur aléatoire.

2. Variance et moments d'une variable aléatoire. —

2.1. Moments et espaces L^p*.* — (Ouvrard II) Pour $p \geq 1$, définition des espaces $\mathcal{L}^p$, L^p, des moments d'ordre p, inégalité de Hölder, inégalité de Minkowski, théorème de Riesz-Fischer, inclusion continue des L^p. (Barbe-Ledoux) Expression du moment d'ordre p d'une va positive avec la fonction de survie, critère d'intégrabilité.

2.2. Variance, covariance. — (Barbe-Ledoux) Définition de la variance, expression $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$, conséquence de $\mathrm{Var}(X) = 0$, $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$, inégalité de Tchebytchev. (Ouvrard II) Variances de va classiques. (Barbe-Ledoux) Définition de la covariance, de la non corrélation, matrice de covariance d'un vecteur aléatoire, expression de la variance d'une somme, indépendante implique non corrélées, réciproque vraie pour un vecteur gaussien, expression de la variance d'une somme de va indépendantes.

3. Utilisation des moments. —

3.1. Fonction génératrice. — (Ouvrard I) Définition de la fonction génératrice pour une va à valeurs dans $\mathbb{N}$, domaine de définition, majoration sur $[-1, 1]$, valeur en 1, expression comme une série entière sur $[-1, 1]$, régularité sur $[-1, 1]$, $]-1, 1[$. La fonction génératrice caractérise la loi, expression de $\mathbb{P}(X = n)$, fonction génératrice d'une somme de va indépendantes, exemple pour les lois usuelles, lien entre fonction génératrice et moments. **dev** Processus de Galton-Watson.

3.2. fonction caractéristique. — (Barbe-Ledoux) Définition de la fonction caractéristique, la fonction caractéristique caractérise la loi (admis), remarque sur $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$ dans le cas indépendant, X et Y sont indépendantes ssi $\varphi_{(X,Y)} = \varphi_X \varphi_Y$, exemple pour des lois usuelles, **dev** fonction caractéristique et moments, théorème des moments. (Zuily-Queffélec) Théorème de Lévy version faible. (Ouvrard II) Théorème de Lévy (admis), application au théorème de Poisson. **dev** Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^d$.

3.3. Théorèmes limites. — (Barbe-Ledoux) Loi faible des grands nombre, loi forte des grands nombres dans le cas de l'existence d'un moment d'ordre 4, loi forte des grands nombre (admise), application au théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein (Zuily-Queffélec), **dev** théorème central limite, forme dans le cas binomial, remarque sur l'application à la recherche d'intervalles de confiance.

Leçon 261 - Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

Références : Ouvrard 2, Foata-Fuchs (2003), Barbe-Ledoux, *secondaires :* Nourdin, Zuily-Queffélec.

Développements : théorème central limite, marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^d$, *fonction caractéristique et moments.*

Introduction : la fonction caractéristique est un outil fort pour étudier les v.a. Très puissant : elle caractérise la loi, caractérise la convergence en loi, et lien avec l'indépendance. On ne parle du théorème de Bochner.

Cadre : soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et X un variable aléatoire sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

1. Définition et premières propriétés. —

1.1. Fonction caractéristique. — (Ouvrard II) Définition de la fonction caractéristique φ_X de X, forme pour une va continue et une va discrète, c'est une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$, bornée par 1, qui vaut 1 en 0, hermitique, $\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$, si X est symétrique, φ_X est réelle.

1.2. Lien avec la transformée de Fourier. — (Ouvrard II) Définition de la transformée de Fourier d'une mesure, la fonction caractéristique est la transformée de Fourier de la mesure $\mathbb{P}_X$, théorème d'injectivité de la transformation de Fourier, corollaire : la fonction caractéristique caractérise la loi. Théorème d'inversion dans le cas où $\widehat{\mathbb{P}_X}$ est Lebesgue intégrable. Dans le cas d'une va à densité, la fonction caractéristique est la transformée de Fourier de la densité : lemme de Riemann-Lebesgue, contre-exemple : loi de Rademacher symétrique. Fonction caractéristique de la loi de Laplace et application avec le théorème d'inversion à la fonction caractéristique de la loi de Cauchy.

1.3. Fonction caractéristique de lois usuelles. — (Ouvrard II) Tableau de fonctions caractéristiques de lois usuelles.

2. Fonction caractéristique et moments. — (Ouvrard II) **dev** Fonction caractéristique et moments, application au calcul des moments de la loi normale centrée, généralisation dans $\mathbb{R}^d$, formule de Taylor-Young, formule de Taylor reste intégral (ou pas). (Barbe-Ledoux) Critère suffisant de développement en série entière, remarquer que lorsque φ_X est développable en série entière, X est caractérisé par ses moments, théorème des moments, contre-exemple de deux lois différentes qui ont les même moments à tout ordre.

3. Fonction caractéristique et indépendance. —

3.1. Caractérisation de l'indépendance. — (Barbe-Ledoux) X et Y sont indépendantes ssi $\varphi_{(X,Y)} = \varphi_X\varphi_Y$. Définition d'un vecteur gaussien, de la matrice de covariance, les va sont indépendantes ssi la matrice de covariance est diagonale (elles sont non corrélées), contre exemple de $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y = X^2$ non indépendantes non corrélées.

3.2. Somme de variables aléatoire indépendantes. — (Barbe-Ledoux) Si X et Y sont indépendantes alors $\varphi_{X+Y} = \varphi_X\varphi_Y$, contre-exemple de la réciproque, corollaire : le produit de deux fonctions caractéristiques est une fonction caractéristique. **dev** Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$. (Foata-Fuchs (2003)) Exemple d'une somme de n Bernoulli indépendantes, de deux binomiales, de deux lois de Poisson, de deux lois normales.

4. Convergence en loi. —

4.1. Convergence en loi et théorème de Lévy. — (Ouvrard II) Définition de la convergence en loi. (Zuily-Queffélec) Théorème de Lévy version faible. (Ouvrard II) Théorème de Lévy (admis), application au théorème de Poisson et à la limite en loi de gaussiennes (Nourdin). Application au lemme de Slutsky.

4.2. Théorème central limite. — (Barbe-Ledoux) **dev** Théorème central limite, application à $\sum_{k=0}^n \frac{n^k e^{-n}}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, forme dans le cas binomial, remarque sur l'application à la recherche d'intervalles de confiance.

Leçon 262 : Modes de convergence de variables aléatoires. Exemples et applications.

Références : Barbe-Ledoux, Ouvrard II, Briane-Pagès, *secondaires :* Nourdin, Zuily-Queffélec, Feller.

Développements : théorème central limite, marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$.

Cadre : soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et X un variable aléatoire sur Ω à valeur dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^d$ ou $\overline{\mathbb{R}}$.

1. Convergence presque sûre et convergence en probabilités. —

1.1. Convergence presque sûre. — (Barbe-Ledoux) Définition, écriture avec union et intersection, stabilité par composition par une fonction continue, pour un vecteur, critère de Cauchy, exemple de $\sum_i 2^{-i} X_i,\ X_i \sim \mathcal{B}(p)$, lemmes de Borel-Cantelli.

1.2. Convergence en probabilités. — (Ouvrard II) Définition, unicité $\mathbb{P}$-presque partout de la limite, stabilité par fonction continue, combinaison linéaire, produit (Barbe-Ledoux), convergence presque sûre implique convergence en proba, c-ex de la réciproque, métrisabilité (Barbe-Ledoux), convergence en proba implique converge p.s. à une sous-suite près, critère de Cauchy.

1.3. Lois de grands nombres. — (Ouvrard II) Les quatre théorèmes, ex $X_n \sim \mathcal{B}(p)$, remarque sur la méthode de Monte-Carlo, application au théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein (Zuily-Queffélec).

2. Convergence dans L^p. —

2.1. Définition et premières propriétés. — (Briane-Pagès) Définition de L^p comme un quotient, définition de $||.||_p$, $||.||_p$ est une norme et $(L^p, ||.||_p)$ est complet, inclusion continue des L^p et conséquences.

2.2. Lien avec la convergence presque-sûre. — (Briane-Pagès) Convergence L^p implique convergence presque sûre à une sous-suite près, contre-exemple (paliers oscillants), théorème de convergence monotone, théorème de convergence dominée, c-ex de convergence p.s. mais pas L^1 (pic de masse), c-ex pour une loi discrète, ex de $(X\mathbb{1}_{|X|>n})_n$ pour $X \in L^1$.

2.3. Uniforme intégrabilité et convergence en probabilités. — (Barbe-Ledoux) Convergence dans L^p implique convergence en proba, c-ex de la réciproque, définition de l'uniforme intégrabilité, caractérisation, lien convergence en proba et convergence L^1, corollaire sur la convergence L^p.

3. Convergence en loi. — (Ouvrard II)

3.1. Définition et premières propriétés. — Définition de la convergence en loi : $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)],\ \forall f \in \mathcal{C}_b$, stabilité par composition pour une fonction continue, théorème du porte-manteau (admis), caractérisation avec la fonction de répartition, caractérisation pour les va discrètes et par la fonction génératrice (Feller).

3.2. Convergence en loi et fonction caractéristique. — Théorème de Lévy version faible (Zuily-Queffélec), théorème de Lévy (admis), exemple de $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ (Nourdin), théorème de Poisson, **dev** théorème central limite, application à $\sum_{k=0}^n \frac{n^k e^{-n}}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, forme dans le cas binomial, remarque sur l'application à la recherche d'intervalles de confiance.

3.3. Liens avec les autres notions de convergence. — Convergence en proba implique convergence en loi, corollaire sur la convergence presque sûre, c-ex de la réciproque, réciproque lorsque la limite est p.s. constante, lemme de Slutsky.

4. Annexe. — Diagramme résumant les liens entre différents modes de convergence.

Leçon 263 - Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

Références : Ouvrard I et II, Barbe-Ledoux, Bercu-Chafaï.

Développements : étude de la loi Gamma, théorème central limite.

Cadre : soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et X un variable aléatoire sur Ω à valeur dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^d$ ou $\overline{\mathbb{R}}$.

1. Variables à densité. —

1.1. Définition et premières propriétés. — (Barbe-Ledoux) Définition de l'absolue continuité, théorème de Radon-Nikodym, définition d'une v.a. à densité. (Ouvrard I) Définition de la fonction de répartition, elle détermine entièrement la loi, limites, elles est croissante, continue à droite et limitée à gauche, ne charge pas les atomes, est dérivable en tout point de continuité de la densité, expression avec la densité. (Ouvrard II) Condition nécessaire et suffisante pour être à densité avec la fonction de répartition. (Barbe-Ledoux) Théorème de transfert, moments d'ordre n.

1.2. Lois usuelles. — (Ouvrard I et II) Exemples des lois uniformes, exponentielles, de Cauchy, normale, moments éventuels et ce qu'elles modélisent.

2. Étude des densités. —

2.1. Opérations sur les densités. — (Ouvrard II) Densité d'une fonction d'une variable aléatoire, exemple de $g(x,y) = (x+y, x-y)$ et $f_X = \frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$. Densité des marginales, exemple. Critère d'indépendance d'un vecteur aléatoire avec les densités marginales, la loi de la somme de deux v.a. indépendantes est le produit de convolution des mesures, corollaire dans le cas à densité. Application aux lois gamma.

2.2. Fonction caractéristique. — (Ouvrard II) Définition de la fonction caractéristique, elle caractérise la loi, c'est la transformée de Fourier de la densité, application au calcul de la fonction caractéristique de la loi de Cauchy, fonction caractéristique des lois usuelles, théorème d'inversion de la fonction caractéristique, critère d'indépendance avec les fonctions caractéristiques, fonction caractéristique d'une somme de variables aléatoires, fonction caractéristique et moments, théorème des moments. Théorème de Lévy. **dev** Fonction caractéristique de la loi Gamma et conséquences.

3. Vecteurs aléatoires gaussiens. — (Barbe-Ledoux) Définition d'un vecteur aléatoire gaussien, de son vecteur des moments, sa matrice de covariance, fonction caractéristique, densité quand elle existe, critère d'indépendance. **dev** Théorème central limite.

4. Simulation de variables aléatoires. — (Bercu-Chafaï) Simulation par la méthode d'inversion, exemples de la exponentielle et de la loi de Cauchy. Méthode du rejet, théorème du passage de surface à densité, remarque sur le sens inverse

Leçon 264 - Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Références : Plan de leçon Garénaux-Nassif. Ouvrard 1 et 2, Barbe-Ledoux, Schinazi, Feller, *secondaire :* Zuily-Queffélec.

Développements : marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$, processus de Galton-Watson.

Cadre : soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Définition, moments et lois usuelles. —

1.1. Variables aléatoires discrètes. — (Ouvrard I) Définition d'une va discrète, forme d'une va discrète et remarque sur le fait que les $\mathbb{P}(X=x)$ caractérisent la loi. Exemples de loi usuelles (Bernoulli, binomiale, de Poisson et géométrique) avec leurs interprétations.

1.2. Moments des variables aléatoires discrètes. — (Ouvrard I) (définition d'une espérance) Condition pour avoir une espérance, expression, c-ex d'une va n'admettant pas d'espérance ($\frac{6}{\pi^2}\sum_n \frac{\delta_n}{n^2}$), idem pour la variance. Inégalités de Markov et Tchebychev, cor : loi faible des grands nombres et théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein (Zuily-Queffélec). Tableau d'espérance et de variance des lois usuelles.

2. Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$. — (Norris) Définition d'une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^d$, d'une marche aléatoire symétrique, de la récurrence, caractérisation de la récurrence avec une série divergente (admis), récurrence pour $d = 1, 2$ dans le cas symétrique, transience dans $\mathbb{Z}$ dans le cas non symétrique. (Sans référence) **dev** $\mathbb{P}(|S_n| \to +\infty) = 1, d \geq 3$ pour une marche aléatoire symétrique.

3. Séries génératrices et indépendance. —

3.1. Série génératrice. — (Ouvrard I) Définition de la série génératrice, proposition sur le domaine de définition, $p_n = \mathbb{P}(X = n)$,.., exemple de séries génératrices, série génératrice et moments.

3.2. Indépendance. — (Ouvrard I) Caractérisation de l'indépendance de v.a. discrètes. Série génératrice d'une somme de variables aléatoires indépendantes, exemple de va de Bernoulli et de Poisson, série génératrice d'une somme aléatoire de va iid. **dev** Processus de Galton-Watson.

4. Théorèmes limites. — (Ouvrard II) Caractérisation de la convergence en loi pour les va discrètes par $\lim_n \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$ et par les séries génératrices (Feller p. 280), cor : Théorème de Poisson (preuve Ouvrard I). (Barbe-Ledoux) théorème central limite pour une loi Binomiale, remarque sur l'utilisation en statistiques.

Remarques : on peut ajouter en conséquence de $G_{X+Y} = G_X G_Y$ l'impossibilité de truquer un dé .. (Cotrell et Cie).

Bibliographie

- G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation*, Éditions de l'École Polytechnique, 2005.
- E. Amar, E. Matheron, *Analyse complexe*, Cassini, 2004.
- W. Appel, *Probabilités pour les non probabilistes*, H & K, 2e édition.
- J.M. Arnaudiès, H. Fraysse, *Cours de mathématiques 1 - Algèbre*, Dunod, 1992.
- M. Audin, *Géométrie*, EDP Sciences, 2006.
- P. Barbe, M. Ledoux, *Probabilités*, Bellin, 1998.
- F. Bayen, C. Margaria, *Espaces de Hilbert et opérateurs*, Ellipses, 1986.
- V. Beck, J. Malick, G. Peyré, *Objectif Agrégation*, H & K, 2005.
- B. Bercu, D. Chafaï, *Modélisation stochastique et simulation*, Dunod, 2007.
- J. De Biasi, *Mathématiques pour le capes et l'agrégation interne*, Ellipses, 1995.
- J.M. Bony, *Théorie des distributions et analyse de Fourier*, Éditions de l'école polytechnique, 2001.
- P. Boyer, *Algèbre et géométrie*, Calvage & Mounet, 2015.
- H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 2005.
- M. Briane, G. Pagès, *Théorie de l'intégration*, Vuibert, 2006.
- J. Calais, *Éléments de théorie des anneaux*, Ellipses, 2006.
- J. Calais, *Éléments de théorie des groupes, théorie de Galois*, PUF, 1984.
- J. Calais, *Extensions de corps, théorie de Galois*, Ellipses, 2006.
- P. Caldero, J. Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie, Tome premier*, Calvage & Mounet, 2013.
- S.D. Chatterji, *Cours d'analyse 3 : équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1995.
- P.G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, 1982.
- M. Cognet, *Algèbre linéaire*, Bréal, 2000.
- H. Cohen, *A Course in computational algebraic number theory*, Springer, 1996.
- P. Colmez, *Éléments d'analyse et d'algèbre*, Éditions de l'École Polytechnique, 2011.
- F. Combes, *Algèbre et géométrie*, Bréal, 1998.
- T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, C. Stein, *Introduction à l'algorithmique*, Dunod, 2004.
- J.P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP sciences, 2006.
- M. Demazure, *Cours d'algèbre*, Cassini, 2008.
- L. Di Menza, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Cassini, 2009.
- G.M. Dìaz-Toca, H. Lombardi, C. Quitté, *Modules sur les anneaux commutatifs*, Calvage & Mounet, 2013.
- L. Dumas, *Modélisation à l'oral de l'agrégation*, Ellipses, 1999.
- D. Duverney, *Théorie des nombres*, Dunod, 2007.
- H. Dym, H.P. McKean, *Fourier series and integrals*, Academic Press, 1972.
- M. El Amrani, *Suites et séries numérique. Suites et séries de fonctions*, Ellipses, 2011.
- L.C. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, 1998.
- J. Farault, *Calcul intégral*, EDP Sciences, 2006.
- W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications, volume 1*, John Wiley and sons, 1957.
- D. Foata, A. Fuchs, *Calcul de probabilités*, Dunod, 2003.
- S. Francinou, H. Gianella, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 1*, Masson, 1997.
- S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques, oraux X-ENS - Algèbre 1*, Cassini, 2007.
- S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques, oraux X-ENS - Algèbre 2*, Cassini, 2009.
- S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques, oraux X-ENS - Algèbre 3*, Cassini, 2008.
- S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques, oraux X-ENS - Analyse 1*, Cassini, 2007.
- S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques, oraux X-ENS - Analyse 2*, Cassini, 2009.
- S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques, oraux X-ENS - Analyse 3*, Cassini, 2010.

- S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques, oraux X-ENS - Analyse 4*, Cassini, 2012.
- S. Gonnord, N. Tosel, *Topologie et analyse fonctionnelle : thèmes d'analyse pour l'agrégation*, Ellipses, 1996.
- X. Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*, Ellipses, 2008.
- X. Gourdon, *Les maths en tête, Algèbre*, Ellipses, 2009.
- I. Gozard, *Théorie de Galois*, Ellipses, 1997.
- I. Gozard, M. Goumi, B. Hauchecorne, O. Leuck, C. Rieffel, *Mathématiques MP/MP**, Ellipses, 2009.
- J. Grifone, *Algèbre linéaire*, Cépaduès, 2011.
- B. Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*, Ellipses, 2007.
- J.B. Hiriart-Uruty, *Optimisation et analyse convexe*, EDP Sciences, 2009.
- F. Hirsch, G. Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*, Dunod, 2009.
- A. Jeanneret, D. Lines, *Invitation à l'algèbre*, Cépaduès, 2008.
- J.M. De Koninck, A. Mercier, *1001 problèmes en théorie classique des nombres*, Ellipses, 2004.
- E.H. Laamri, *Tous les exercices d'algèbre et de géométrie MP*, Dunod, 2008.
- J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, EDP Sciences, 1996.
- R. Mansuy, R. Mneimné, *Algèbre linéaire, réduction des endomorphismes*, 2012.
- D.J. Mercier, *Cours de géométrie, préparation au CAPES et à l'agrégation*, 2004.
- J.Y. Mérindol, *Nombres et algèbre*, EDP sciences, 2006.
- X. Merlin, *Méthodix algèbre*, Ellipses, 1995.
- R. Mneimné, F. Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques.*
- I. Nourdin, *Agrégation de mathématiques, épreuve orale, 68 thèmes pour se préparer efficacement*, Dunod, 2006.
- P. Ortiz, *Exercices d'algèbre*, Ellipses, 2004.
- J.Y. Ouvrard, *Probabilités 1*, Cassini, 2007.
- J.Y. Ouvrard, *Probabilités 2*, Cassini, 2009.
- O. Papini, J.Wolfmann, *Algèbre discrète et codes correcteurs*
- D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.
- G. Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*, Ellipses, 2004.
- A. Pommellet, *Agrégation de mathématiques : cours d'analyse*, Ellipses, 1994.
- H. Queffélec, *Topologie*, Dunod, 2002.
- H. Queffélec, C. Zuily, *Éléments d'analyse*, Dunod, 2002.
- E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, *Cours de mathématiques spéciales, tome 1, algèbre*, Masson, 1993.
- E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, *Cours de mathématiques spéciales, tome 3, topologie et éléments d'analyse*, Masson, 1991.
- G. Rauch, *Les groupes finis et leurs représentations*, Ellipses, 2000.
- J. Rauch, *Partial differential equations*, Springer, 1991.
- J.E. Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*, EDP sciences, 2004.
- J.E. Rombaldi, *Interpolation et approximation*, Vuibert, 2005.
- F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, Cassini, 2014.
- W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, 2009.
- J. Saint Raymond, *Topologie, calcul différentiel et variable complexe*, Calvage & Mounet, 2007.
- P. Saux Picart, *Cours de calcul formel*, Ellipses, 1999.
- C. De Seguins Pazzis, *Invitation aux formes quadratiques*, Calvage & Mounet, 2010.
- J.P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, 1998.
- E.M. Stein, R. Shakarchi, *Fourier analysis, an introduction*, Princeton University Press, 2003.
- A. Szpirglas, *Mathématiques L3 Algèbre*, Pearson Education, 2009.
- P. Tauvel, *Algèbre*, Dunod, 2005.
- P. Tauvel, *Corps commutatifs et théorie de Galois*, Calvage & Mounet, 2008.
- P. Tauvel, *Géométrie*, Dunod, 2005.
- F. Ulmer, *Théorie des groupes*, Ellipses, 2012.
- M. Willem, *Analyse harmonique réelle*, Hermann, 1995.
- M. Zavidovique, *Un max de maths*, Calvage & Mounet, 2013.
- C. Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles : cours et problèmes résolus*, Dunod, 2002.

June 28, 2018
Corentin KILQUE, ENS Rennes