3.12 Nombre de zéros d'une équation différentielle

Référence : H. Queffélec, C. Zuily, *Éléments d'analyse*, Dunod, 2002.

Leçons concernées : 220, 221, 224.

Théorème 1. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathcal{C}^1([a,+\infty[)$ avec $q > 0$ telle que $\int_a^{+\infty} \sqrt{q(u)}\, du = +\infty$ et $q'(x) = o(q^{3/2}(x))$ quand $x \to +\infty$. Alors si on considère y une solution réelle non nulle de l'équation $y'' + qy = 0$ sur $[a,+\infty[$ et $N(x)$ le nombre de zéros de y sur $[a,x]$, alors*

$$N(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{\pi} \int_a^x \sqrt{q(u)}\, du.$$

On a besoin du :

Lemme 2. *Soit $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^1([a,+\infty[)$ sans zéros communs. Si $y_1(a) + iy_2(a) = r_0 e^{i\theta_0}$ alors il existe $r, \theta \in \mathcal{C}^1([a,+\infty[)$ telles que $y_1 = r\cos(\theta)$ et $y_2 = r\sin(\theta)$ où $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ et $\theta(x) = \theta_0 + \displaystyle\int_a^x \frac{w(t)}{r^2(t)}\, dt$ où $w = y_1 y_2' - y_2 y_1'$.*

Démonstration. On pose $\varphi = y_1 + iy_2$ qui ne s'annule pas par hypothèse, on considère alors $\psi(x) = \int_a^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\, dt + \log(r_0) + i\theta_0$. On a $(\varphi e^{-\psi})' = (\varphi' - \varphi\psi')e^{-\psi} = 0$ et donc pour tout $x \geqslant a$, $\varphi(x)e^{-\psi(x)} = \varphi(a)e^{-\psi(a)} = r_0 e^{i\theta_0} r_0^{-1} e^{-i\theta_0} = 1$. Ainsi, $y_1 + iy_2 = \varphi = e^{\psi} = re^{i\theta}$ où $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ et $\theta = \Im(\psi)$. Enfin,

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \log(r_0) + i\theta_0 + \int_a^x \frac{y_1'(t) + iy_2'(t)}{y_1(t) + iy_2(t)}\, dt \\
&= \log(r_0) + i\theta_0 + \int_a^x \frac{(y_1'(t) + iy_2'(t))(y_1(t) - iy_2(t))}{r^2(t)}\, dt \\
&= \log(r_0) + \int_a^x \frac{y_1'(t)y_1(t) + y_2(t)y_2'(t)}{r^2(t)}\, dt + i\theta_0 + i\int_a^x \frac{w(t)}{r^2(t)}\, dt
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Démonstration (Théorème). Étape 1 : on commence par considérer $\tau(x) = \int_a^x \sqrt{q(u)}\, du$ pour $x \geqslant a$. La fonction τ est ainsi par hypothèse de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $[a,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$, qui est donc bijective. On pose alors $Y = y \circ \tau^{-1}$, c'est-à-dire $y(x) = Y(\tau(x))$ pour tout $x \geqslant a$. On a alors

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \tau'(x)Y'(\tau(x)) = \sqrt{q(x)}Y'(\tau(x)) \\
y''(x) &= \frac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}}Y'(\tau(x)) + q(x)Y''(\tau(x))
\end{aligned}$$

ainsi,

$$y''(x) + q(x)y(x) = q(x)Y''(\tau(x)) + \frac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}}Y'(\tau(x)) + q(x)Y(\tau(x)) = 0$$

c'est-à-dire que, si on pose $\varphi(t) = \dfrac{q'(\tau^{-1}(t))}{2q^{3/2}(\tau^{-1}(t))}$, Y est solution sur $[0, +\infty[$ de

$$Y'' + \varphi Y' + Y = 0.$$

Étape 2 : on remarque maintenant que Y et Y' n'ont pas de zéro commun puisque sinon, par unicité de la solution, on aurait $Y \equiv 0$ et donc $y \equiv 0$ ce qui n'est pas possible par hypothèse. On peut alors appliquer le lemme et écrire $Y = r\sin(\theta)$ et $Y' = r\cos(\theta)$ avec $r, \theta \in \mathcal{C}^1([a, +\infty[)$. On obtient successivement

$$\begin{aligned} Y' &= r'\sin(\theta) + r\theta'\cos(\theta) = r\cos(\theta) \\ Y'' &= r'\cos(\theta) - r\theta'\sin(\theta) = -\varphi r\cos(\theta) - r\sin(\theta). \end{aligned}$$

On multiplie la première égalité par $\cos(\theta)$ et la seconde par $-\sin(\theta)$, on ajoute les deux et on obtient : $r\theta' = r(1 + \varphi\cos(\theta)\sin(\theta))$, c'est-à-dire $\theta' = 1 + \varphi\cos(\theta)\sin(\theta)$ et donc $|\theta'(t) - 1| \leqslant \frac{1}{2}|\varphi(x)|$. Ainsi, puisque par hypothèse $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\theta'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc par intégration des équivalents, $\theta(t) \sim t$ en $+\infty$.

Étape 3 : on note alors $M(t)$ le nombre de zéros de Y sur $[0, t]$. On commence par montrer par l'absurde que $M(t) < +\infty$ pour tout t. Si $M(t_0) = +\infty$, alors l'ensemble des zéros de Y dans $[0, t_0]$ admet un point d'accumulation u. Soit $(u_n)_n$ une suite de zéros de Y qui tend vers u par valeurs différentes, alors

$$0 = \frac{Y(u_n) - Y(u)}{u_n - u} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Y'(u)$$

ce qui contredit le fait que Y et Y' n'aient pas de zéro commun.

Étape 4 : maintenant, soit $t_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $t \geqslant t_0$, $\theta'(t) > 0$, alors $M(t) = \mathrm{Card}\{u \in [0, t_0], Y(u) = 0\} + \mathrm{Card}\{u \in [t_0, t], \sin(\theta(u)) = 0\}$. Or, puisque θ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme sur $[t_0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}\{u \in [t_0, t], \sin(\theta(u)) = 0\} &= \mathrm{Card}\{v \in [\theta(t_0), \theta(t)], \sin(v) = 0\} \\ &= \mathrm{Card}\{k \in \mathbb{Z}, \theta(t_0) \leqslant k\pi \leqslant \theta(t)\} = \left\lfloor \frac{\theta(t)}{\pi} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\theta(t_0)}{\pi} \right\rfloor \underset{\infty}{\sim} \frac{t}{\pi} \end{aligned}$$

grâce à $\theta(t) \sim t$ en $+\infty$. Ainsi, $M(t) \sim \dfrac{t}{\pi}$ en $+\infty$.

Enfin, il est clair que $N(x) = M(\tau(x))$ et donc par composition des équivalents, on obtient le résultat. $\square$

Remarque. Si on considère $a = 1$ et $q(x) = \frac{1}{4x^2}$, on a bien $\int_1^{+\infty} \sqrt{q(u)}\, du = +\infty$ mais $q'(x)q^{-3/2}(x) = -4$ et la solution de $y'' + \frac{1}{4x^2}y = 0$ est $y(x) = \sqrt{x}(a + b\log(x))$ qui a au plus un zéro sur $[1, +\infty[$.

Commentaire : c'est un peu long, on peut éventuellement passer rapidement sur le lemme (voire ne pas le faire), et simplement justifier que M est fini partout parce que la solution n'est pas nulle.