3.15 Théorème central limite

Référence : H. Queffélec, C. Zuily, *Éléments d'analyse*, Dunod, 2002.

Leçons concernées : 218, 260, 261, 262, 263.

Théorème 1 (Central limite)**.** *Soit* $(X_n)_n$ *une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2. On note* $m = \mathbb{E}[X_1]$ *et* $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$*. Alors si* $S_n = \sum_{k=1}^n X_n$*,*

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Lemme 2. *Soit* $(z_n)_n$ *une suite de nombres complexes de limite* $z \in \mathbb{C}$*, alors*

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^z.$$

Démonstration. Pour $n \geqslant 0$, on a,

$$\exp(z_n) - \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z_n^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{z_n}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^{(n)} z_n^k$$

où

$$a_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{k!} & k \geqslant n+1 \\ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\right) & k \leqslant n \end{cases}$$

ainsi $a_k^{(n)} \geqslant 0$ pour tout n, k, et donc,

$$\left|\exp(z_n) - \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^{(n)} |z_n|^k = \exp(|z_n|) - \left(1 + \frac{|z_n|}{n}\right)^n.$$

Enfin, avec pour $x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$ et $1 - e^{-x} \leqslant x$,

$$\begin{aligned} \left|\exp(z_n) - \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n\right| &\leqslant \exp(|z_n|) - \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{|z_n|}{n}\right)\right) \\ &\leqslant \exp(|z_n|) - \exp\left(n\left(\frac{|z_n|}{n} - \frac{|z_n|^2}{2n^2}\right)\right) \\ &= \exp(|z_n|)\left(1 - \exp\left(-\frac{|z_n|^2}{2n}\right)\right) \\ &\leqslant \exp(|z_n|)\frac{|z_n|^2}{2n}. \end{aligned}$$

On peut alors conclure :

$$\begin{aligned}\left|\exp(z) - \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n\right| &\leqslant |\exp(z) - \exp(z_n)| + \left|\exp(z_n) - \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n\right| \\ &\leqslant |\exp(z) - \exp(z_n)| + \exp(|z_n|)\frac{|z_n|^2}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

□

Démonstration (Théorème). On peut sans perte de généralité se ramener au cas $m = 0$ et $\sigma = 1$. On utilise le théorème de Lévy et on cherche donc à montrer que $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) \to e^{-t^2/2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On note $\varphi := \varphi_{X_1}$. Puisque X_1 admet un moment d'ordre 2, φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie : $\varphi'(0) = \mathbb{E}[iX_1] = 0$ et $\varphi''(0) = \mathbb{E}[-X_1^2] = -1$. On a donc, par développement de Taylor à l'ordre 2 en 0, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

On a d'autre part, par indépendance et identique distribution,

$$\begin{aligned}\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) &= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} e^{itX_k/\sqrt{n}}\right] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{itX_k/\sqrt{n}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{itX_1/\sqrt{n}}\right]^n = \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le développement limité de φ en 0,

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o(\frac{1}{n})\right)^n.$$

et on conclut avec le lemme. □

Application 3. *On a,*

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Démonstration. Soit $(X_i)_i$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$, et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ qui suit donc une loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$. On a $\mathbb{E}[X_1] = \mathrm{Var}(X_1) = 1$ et on applique le théorème central limite pour obtenir :

$$Z_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Or on remarque que

$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_n=k)=\mathbb{P}(S_n\leqslant n)=\mathbb{P}(Z_n\leqslant 0)$$

et donc par convergence des fonctions de répartitions on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(Z_n\leqslant 0)=\mathbb{P}(Z\leqslant 0)=\frac{1}{2}$$

puisque Z est symétrique. □

Proposition 4. *Si $X\sim\mathcal{N}(0,1)$, alors pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\varphi_X(t)=e^{-t^2/2}$.*

Démonstration. On a

$$\varphi_X(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-itx}e^{-x^2/2}dx.$$

On applique alors le théorème de dérivation sous l'intégrale pour obtenir que φ_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et que

$$\varphi_X'(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}-ixe^{-itx}e^{-x^2/2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}ie^{-itx}(-xe^{-x^2/2})dx=-\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-itx}e^{-x^2/2}dx$$

par intégration par parties. Ainsi φ_X vérifie $\varphi_X'(t)-t\varphi_X(t)=0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$ et donc $\varphi_X(t)=e^{-t^2/2}$ puisque $\varphi_X(0)=1$. □