2.12 Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ et groupes d'isométrie du tétraèdre et du cube

Leçons concernées : 101, 103, 104, 105, 107, 161.

Proposition 1. *On note T un tétraèdre régulier et C un cube. Alors,*

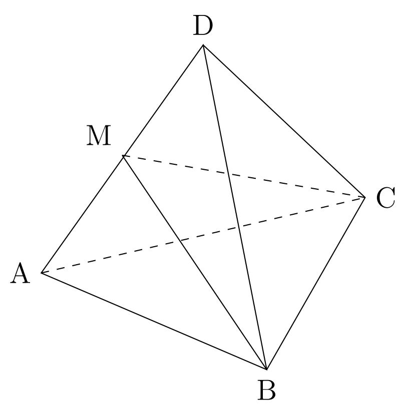
$$\mathrm{Isom}(T) \cong \mathfrak{S}_4 \quad et \quad \mathrm{Isom}^+(C) \cong \mathfrak{S}_4.$$

Démonstration. Puisqu'une isométrie conserve les longueurs, l'ensemble $S = \{A, B, C, D\}$ des sommets est conservé par toute isométrie de T, on a donc un morphisme

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Isom}(T) & \to & \mathfrak{S}_4 \\ g & \mapsto & g_{|S}. \end{array}$$

Si $\varphi(g) = \mathrm{id}$, alors g conserve un repère affine, et donc $g = \mathrm{id}$, d'où l'injectivité de φ.

D'autre part, on considère s la symétrie orthogonale d'hyperplan (BMC). Alors $\varphi(r) = (AD)$. On peut de la même manière obtenir toutes les permutations de $\mathfrak{S}_4$, et donc puisqu'elles engendrent le groupe, on obtient la surjectivité.



Pour le cube, on remarque que puisque les grandes diagonales sont les plus grandes longueurs du cube, elles sont conservées par les isométries de C, et donc, si on note $S = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$, alors on a un morphisme

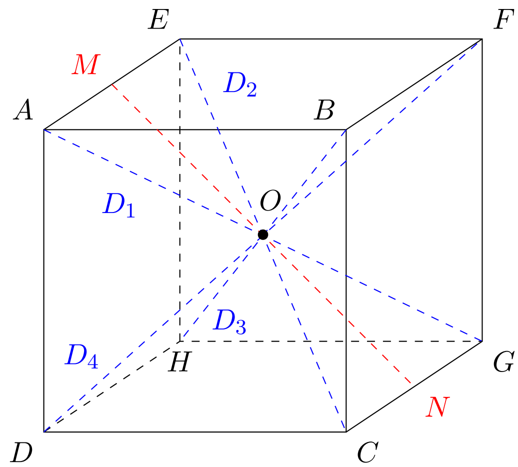
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Isom}(C) & \to & \mathfrak{S}_4 \\ g & \mapsto & g_{|S}. \end{array}$$

On considère ρ la rotation d'axe (MN) et d'angle π. Alors $\varphi(\rho) = (D_1 D_2)$ et par le même procédé on obtient toutes les transpositions de $\mathfrak{S}_4$ et donc φ est surjective.

Soit $g \in \mathrm{Isom}(C)$ différente de l'identité telle que $\varphi(g) = \mathrm{id}$. Alors g échange au moins les sommets d'une grande diagonale, on peut donc supposer que $g(A) = G$. On a alors

$g(E) \in \{C, E\}$, et donc puisque g conserve les distances, $g(E) = C$. On obtient de la même manière que g échange les sommets de chaque grande diagonale, et donc g coïncide avec s_0 la symétrie de centre O le centre du cube, et donc $g = s_0$. Ainsi, $\ker \varphi = \{\mathrm{id}, s_0\}$ et on a,

$$\mathrm{Isom}^+(C) \cong \mathrm{Isom}(C)/\{\mathrm{id}, s_0\} \cong \mathfrak{S}_4.$$



□

On peut alors compléter la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$.

Étape 1 : on détermine les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_4$ et leur cardinal. Puisque celles-ci sont caractérisées par le type, on obtient :

- la classe de l'identité qui contient 1 élément
- la classe des transpositions qui contient $\binom{4}{2} = 6$ éléments
- la classe des 3-cycles qui contient $2 \times \binom{4}{3} = 8$ éléments
- la classe des 4-cycles qui contient $3! = 6$ éléments
- et la classe des doubles transpositions qui contient 3 éléments[1].

Étape 2 : on connait deux représentations irréductibles de degré 1 : la représentation triviale, et la représentation donnée par la signature, on obtient donc les deux premières lignes suivantes :

	1 id	6 (12)	8 (123)	6 (1234)	3 (12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1

1. Il suffit de choisir l'élément qui sera dans la transposition avec 1 pour entièrement déterminer la double transposition.

Étape 3 : on considère maintenant la représentation par permutation ρ_p

$$\rho_p : \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_4 & \to & \mathrm{GL}(\mathbb{C}^4) \\ \sigma & \mapsto & (e_i \mapsto e_{\sigma(i)}) \end{array}$$

où on a noté $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{C}^2$. Si χ_p est le caractère associé à ρ_p, on sait que $\chi_p(\sigma)$ est égal au nombre de points fixes de σ, ainsi, $\chi_p = (4, 2, 1, 0, 0)$, dont on vérifie qu'elle n'est pas irréductible. On considère alors $H_0 = \mathrm{Vect}((1, 1, 1, 1))$ stable par ρ_p, qui admet $H_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ pour supplémentaire stable par ρ. La représentation induite par ρ_p sur H_0 est la représentation triviale, et donc, si on note χ_s le caractère de la représentation induite sur H_1 par ρ_p, on a $\chi_p = \chi_1 + \chi_s$, et ainsi $\chi_s = (3, 1, 0, -1, -1)$ dont on vérifie qu'elle est irréductible. On peut alors compléter le tableau :

	1 id	6 (12)	8 (123)	6 (1234)	3 (12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	1	0	-1	-1

Étape 3' : on utilise l'isomorphisme $\mathrm{Isom}^+(C) \cong \mathfrak{S}_4$ pour obtenir une action de $\mathfrak{S}_4$ sur l'espace $\mathbb{R}^3$ et donc une représentation de degré 3. On détermine alors son caractère χ_C. On sait que la trace d'une rotation d'angle θ est donnée par $1 + 2\cos\theta$. Ainsi, $\chi_C(\mathrm{id}) = 3$. Pour réaliser une transposition on réalise une rotation d'angle π autour de la diagonale joignant le milieu de deux côtés opposés, ce qui nous donne $\chi_C((12)) = -1$. Un 3-cycle s'obtient par rotation d'angle $2\pi/3$ autour de la grande diagonale invariante, et donc $\chi_C((123)) = 0$. Une rotation d'angle $\pi/2$ selon l'axe qui passe par le milieu de deux face opposées donne un 4-cycle, et donc $\chi_C((1234)) = 1$. Enfin, on obtient une double transposition grâce à la rotation d'angle π selon l'axe qui passe par le milieu de deux faces opposées et donc $\chi_C((12)(34)) = -1$, de sorte que $\chi_C = (3, -1, 0, 1, -1)$ qui est donc irréductible. On a alors le tableau :

	1 id	6 (12)	8 (123)	6 (1234)	3 (12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_C	3	-1	0	1	-1

Étape 4 : il nous reste encore deux caractères irréductibles à déterminer. De la relation sur les degrés des caractères $1^2 + 1^2 + 3^2 + n_4^2 + n_5^2 = 24$, on déduit qu'il y a un caractère de degré 2 et un de degré 3. On considère alors le produit tensoriel des représentations ε et ρ_s (resp. ρ_C) qui est irréductible, ce qui nous donne le tableau :

	1 id	6 (12)	8 (123)	6 (1234)	3 (12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	1	0	-1	-1
χ_C	3	-1	0	1	-1
χ_5	2				

Étape 5 : on utilise les relations d'orthogonalité des colonnes et ce que l'on sait du degré de χ_5 pour obtenir la dernière ligne :

	1 id	6 (12)	8 (123)	6 (1234)	3 (12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	1	0	-1	-1
χ_C	3	-1	0	1	-1
χ_5	2	0	-1	0	2

Remarque. À l'étape 4, on aurait pu considérer la représentation $\mathrm{Hom}(V_s, V_\varepsilon)$ dont le caractère est donné par $\overline{\chi_\varepsilon}\chi_s$ dont on doit vérifier qu'elle est irréductible.

Corollaire 2. *Les sous-groupes distingués non triviaux de* $\mathfrak{S}_4$ *sont* $\mathfrak{A}_4$ *et* $\{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \cong V_4$.

Démonstration. On applique la caractérisation des sous-groupes distingués à partir des caractères :

	1 id	6 (12)	8 (123)	6 (1234)	3 (12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	1	0	-1	-1
χ_C	3	-1	0	1	-1
χ_5	2	0	-1	0	2

la première ligne nous donne alors $\mathfrak{S}_4$, la seconde $\mathfrak{A}_4$, la troisième et la quatrième $\{\mathrm{id}\}$ et la dernière V_4 tandis que les intersections ne donnent pas de nouveau sous-groupe distingué. $\square$

Commentaire : Faire l'étape 3 la plus adaptée à la leçon.