5.11 Théorème de Stone-Weierstrass

Référence : F. Hirsch, G. Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

Leçons concernées : 201, 202, 203, 209.

Proposition 1. *Il existe une suite de polynômes* $(P_n)_n$ *qui converge uniformément vers la valeur absolue sur* $[-1, 1]$.

C'est une conséquence du théorème de Weierstrass mais cela peut être démontré indépendamment :

Démonstration. On définit par récurrence $(P_n)_n$ sur $[-1, 1]$ par $P_0 = 0$ et

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\big(x^2 - P_n^2(x)\big).$$

Pour tout $x \in [-1, 1]$ on montre alors par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $0 \leqslant P_n(x) \leqslant P_{n+1}(x) \leqslant |x|$. Pour $n = 0$ le résultat est clair. Soit maintenant $n \geqslant 0$, alors par hypothèse de récurrence il est clair que $0 \leqslant P_{n+1}(x) \leqslant P_{n+2}(x)$ et d'autre part

$$P_{n+2} = |x| - \big(|x| - P_{n+1}(x)\big)\Big(1 - \frac{1}{2}\big(|x| + P_{n+1}(x)\big)\Big) \leqslant |x|$$

par hypothèse de récurrence. Ainsi pour tout $x \in [-1, 1]$, $(P_n(x))_n$ est croissante majorée donc converge vers $f(x) \geqslant 0$, et en passant à la limite dans la relation de récurrence on obtient que $f(x)^2 = x^2$ et donc $f(x) = |x|$. Enfin, on applique le théorème de Dini pour obtenir la convergence uniforme. □

Soit X un espace métrique compact non vide et $\mathcal{C}(X)$ l'espace des fonctions continues de X à valeurs dans $\mathbb{R}$ munit de la norme de la convergence uniforme.

Définition 2. On dit qu'une partie H de $\mathcal{C}(X)$ est *séparante* si pour tout $x, y \in X$, il existe $h \in H$ telle que $h(x) \neq h(y)$. D'autre part une partie H de $\mathcal{C}(X)$ est dite *réticulée* si pour tout $f, g \in H$, les fonctions $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$ sont dans H.

Théorème 3. *On suppose que* X *contient au moins deux éléments. Soit* H *une partie de* $\mathcal{C}(X)$ *réticulée telle que pour tout* $x, y \in X$ $x \neq y$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *il existe* $h \in H$ *telle que* $h(x) = \alpha$ *et* $h(y) = \beta$. *Alors* H *est dense dans* $\mathcal{C}(X)$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}(X)$ et $\varepsilon > 0$. Soit $x \in X$. Par hypothèse, pour tout $y \in X$, $y \neq x$, il existe $h_y \in H$ telle que $h_y(x) = f(x)$ et $h_y(y) = f(y)$. On pose

$$O_y = \{z \in X, h_y(z) > f(z) - \varepsilon\}$$

qui est un ouvert de X contenant x et y. Ainsi $X = \bigcup_{y \neq x} O_y$ et par propriété de Borel-Lebesgue, $X = \bigcup_{i=1}^{k} O_{y_i}$ avec les y_i distincts et différents de x. On pose alors $g_x :=$

$\sup(h_{y_1}, \ldots, h_{y_k})$ qui est dans H par hypothèse. D'autre part $g_x(x) = f(x)$ et pour tout $z \in X$, $g_x(z) > f(z) - \varepsilon$. On considère alors

$$\Omega_x = \{z \in X, g_x(z) < f(z) + \varepsilon\}$$

qui est un ouvert de X contenant x. Par le même raisonnement que précédemment on a alors $X = \bigcup_{i=1}^n \Omega_{x_i}$. On pose maintenant $g = \inf(g_{x_1}, \ldots, g_{x_n})$ qui appartient à H par hypothèse. On vérifie alors que $f - \varepsilon < g < f + \varepsilon$ ce qui conclut la preuve. □

Théorème 4. *Tout sous-espace vectoriel H de $\mathcal{C}(X)$ réticulé, séparant et contenant les constantes est dense dans $\mathcal{C}(X)$.*

Démonstration. Si X est réduit à un seul élément le résultat est clair. Sinon on montre que H vérifie les conditions du théorème précédent : soient $x, y \in X$ distincts. Puisque H est séparant, il existe $h \in H$ telle que $h(x) \neq h(y)$. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on considère alors le système

$$\begin{cases} \lambda\, h(x) + \mu = \alpha \\ \lambda\, h(y) + \mu = \beta \end{cases}$$

qui admet un unique couple de solution (λ, μ) puisque $h(x) \neq h(y)$. La fonction $g : z \mapsto \lambda\, z + \mu$ est alors solution du problème et appartient à H puisque H est un sous-espace vectoriel qui contient les constantes. □

Théorème 5 (Stone-Weierstrass)**.** *Toute sous-algèbre H de $\mathcal{C}(X)$ séparante et contenant les constantes est dense dans $\mathcal{C}(X)$.*

Démonstration. On remarque que si H est une sous-algèbre H de $\mathcal{C}(X)$ séparante et contenant les constantes, alors il en est de même de $\overline{H}$. On montre alors que $\overline{H}$ vérifie les hypothèses du théorème précédent. Or les relations suivantes

$$|h| = \sup(h, 0) - \inf(h, 0)$$

$$\inf(f, g) = \frac{1}{2}\Big(f + g - |f - g|\Big)$$

et

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}\Big(f + g + |f - g|\Big).$$

montrent que $\overline{H}$ est réticulé si et seulement si $|h| \in \overline{H}$ pour tout $h \in \overline{H}$. Soit alors $h \in \overline{H}$. D'après la première proposition (ou par le théorème de Weierstrass), il existe une suite de polynômes $(P_n)_n$ qui converge uniformément vers la valeur absolue sur $[-1, 1]$. La suite de fonctions $\big(P_n(h/||h||)\big)_n$ appartient à $\overline{H}$ par hypothèses et converge alors uniformément vers $|h|/||h||$ qui appartient à $\overline{H}$ car celui-ci est fermé. On conclut avec $|h| = ||h|| \times |h|/||h|| \in \overline{H}$. □

Application 6. *L'ensemble des fonctions lipschitziennes de X dans $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathcal{C}(X)$. Si $X \subset \mathbb{R}^d$ est compact alors*

$$H = \{x \in X \mapsto P(x), P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]\}$$

est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Démonstration. Il est clair que l'ensemble des fonctions lipschitzienne est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X)$ contenant les constantes, et d'autre part si $x \neq y$, alors $f : z \mapsto d(x, z)$ est 1-lipschitzienne et vérifie $f(x) = 0 \neq f(y)$ donc l'ensemble des fonctions lipschitziennes est séparant et on peut donc lui appliquer le théorème de Stone-Weierstrass. De la même manière, H est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X)$ contenant les constantes, et si $x \neq y$, alors ils différent au moins selon l'une de leurs composantes : $x_i \neq y_i$ et le polynôme X_i sépare x et y. □

Enfin, on donne une preuve du théorème de Stone-Weierstrass dans le cas complexe. On note $\mathcal{C}^{\mathbb{C}}(X)$ l'ensemble des fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$. Enfin une partie $H \subset \mathcal{C}^{\mathbb{C}}(X)$ est dite *auto-conjuguée* si pour tout $h \in H$, $\overline{h} \in H$.

Théorème 7 (Stone-Weierstrass, cas complexe)**.** *Toute sous-algèbre H de $\mathcal{C}^{\mathbb{C}}(X)$ séparante, auto-conjuguée et contenant les constantes est dense dans $\mathcal{C}^{\mathbb{C}}(X)$.*

Démonstration. On note $H^{\mathbb{R}} = \{f \in H, \forall x \in X, f(x) \in \mathbb{R}\}$. Alors $H^{\mathbb{R}}$ vérifie les hypothèses du théorème de Stone-Weierstrass dans le cas réel. En effet c'est bien une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X)$ qui contient les constantes. D'autre part, si $x \neq y$, alors il existe par hypothèse il existe $g \in H$ telle que $g(x) \neq g(y)$. Ainsi par exemple $\Re(g)(x) \neq \Re(g)(y)$. Or

$$\Re(g) = \frac{g + \overline{g}}{2} \in H$$

par hypothèse sur H et donc $\Re(g) \in H^{\mathbb{R}}$ et $H^{\mathbb{R}}$ est ainsi séparant. On peut appliquer le théorème de Stone-Weierstrass dans le cas réel. Or $\mathcal{C}^{\mathbb{C}}(X) = \mathcal{C}(X) + i\mathcal{C}(X)$ et $H = H^{\mathbb{R}} + iH^{\mathbb{R}}$ et donc H est dense dans $\mathcal{C}^{\mathbb{C}}(X)$. □