4.5 Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$

Références : P. Caldero, J. Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie, Tome premier*, Calvage & Mounet, 2013,
D. Perrin, *Cours d'Algèbre*, Ellipses, 1996.

Leçons concernées : 103, 106, 108, 160, 161, 204.

Théorème 1. *Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.*

Lemme 2. *Les retournements sont tous conjugués dans $SO_3(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit r_D et $r_{D'}$ deux retournements de $SO_3(\mathbb{R})$ de droites D et D'. Soit $s \in SO_3(\mathbb{R})$ la rotation qui envoie D sur D', alors sr_Ds^{-1} est d'axe $s(D) = D'$ et d'angle π et est donc le retournement de droite D' i.e. $r_{D'}$. □

Lemme 3. *Le centre de $SO_3(\mathbb{R})$ est trivial.*

Démonstration. En effet soit $u \in Z(SO_3(\mathbb{R}))$. Alors pour tout retournement r_D de droite D, $ur_Du^{-1} = r_D$ est un retournement de droite $u(D)$, ainsi u stabilise toutes les droites du plan, et est donc une homothétie, et donc $u = \mathrm{id}$. □

Démonstration (Théorème). Soit H un sous-groupe non trivial distingué dans $SO_3(\mathbb{R})$. On sait que $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements, on montre alors que H contient un retournement. Cela suffit puisque ceux-ci sont tous conjugués dans $SO_3(\mathbb{R})$ et que H est distingué.

Soit $h \in H$ différent de l'identité. On considère

$$\varphi : \begin{array}{ccc} SO_3(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}(ghg^{-1}h^{-1}) \end{array}$$

qui est une application continue par continuité de la trace. Puisque tout élément de $SO_3(\mathbb{R})$ s'écrit dans une certaine base comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

la trace d'un élément de $SO_3(\mathbb{R})$ est de la forme $1 + 2\cos(\theta)$. Ainsi, puisque $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe compact, son image par φ est un segment de $\mathbb{R}$ qui contient $\varphi(\mathrm{id}) = 3$, donc est de la forme $[a, 3]$, $a \leqslant 3$. Si par l'absurde $a = 3$, alors $\forall g \in SO_3(\mathbb{R})$, $ghg^{-1}h^{-1} = \mathrm{id}$ et donc $h \in Z(SO_3(\mathbb{R})) = \{\mathrm{id}\}$ ce qui est absurde. Ainsi, $a < 3$. On a $1 + 2\cos(\pi/n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a < 1 + 2\cos(\pi/n) < 3$. On considère alors g_n tel que $\varphi(g_n) = \mathrm{Tr}(g_nhg_n^{-1}h^{-1}) = 1 + 2\cos(\pi/n)$. Alors $h_n := g_nhg_n^{-1}h^{-1}$ est une rotation d'angle π/n de H puisque H est distingué, et donc h_n^n est une rotation d'angle π dans H, c'est-à-dire un retournement. □

Théorème 4. *Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.*

Démonstration. Soit $u \in SO_3(\mathbb{R})$. On va montrer que u est dans la composante connexe par arcs de l'identité. On sait que dans une certaine base, u s'écrit

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On pose alors, pour $t \in [0,1]$,

$$U_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta t) & -\sin(\theta t) \\ 0 & \sin(\theta t) & \cos(\theta t) \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $t \mapsto U_t$ est un chemin continu de $SO_3(\mathbb{R})$ reliant Id à U. $\square$

Théorème 5. *Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions et $SO_n(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements.*

Démonstration. Soit $u \in O_n(\mathbb{R})$, et $F_u = \{x \in E, u(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes de u. On raisonne par récurrence sur $p_u := n - \dim(F_u)$. Si $p_u = 0$, $u = \text{id}$ et le résultat est évident. Si maintenant $p_u > 0$, soit $x \in F_u^{\perp} \backslash \{0\}$ et $y = u(x)$. Alors $x \neq y$, et $y \in F_u^{\perp}$ puisque F_u et donc $F_u^{\perp}$ sont stables par u. On a alors $< x - y, x + y >= 0$ puisque $||x|| = ||y||$, et donc $x - y$ est orthogonal à $x + y$. Soit τ la réflexion d'axe $x - y$. Alors $\tau(x - y) = y - x$ et $\tau(x + y) = x + y$ et donc $\tau(y) = x$. Enfin, $F_u \subset F_{\tau u}$ puisque $x - y \in F_u^{\perp}$ et l'inclusion est stricte puisque x est dans $F_{\tau u}$ et pas dans F_u. On applique alors l'hypothèse de récurrence pour obtenir $\tau u = \tau_1 \cdots \tau_k$, d'où le résultat.

Soit maintenant $u \in SO_n(\mathbb{R})$, alors $u = \tau_1 \cdots \tau_k$ est produit d'un nombre pair de réflexions (puisque leur déterminant est -1). Si $n = 3$, $-\tau_i$ est un renversement (considérer les matrices), d'où le résultat.

Si $n \geqslant 3$, il nous faut montrer que tout produit de deux réflexions $v = \tau_1 \tau_2$ s'écrit comme un produit de retournements. Soient H_1, H_2 les hyperplans associés à τ_1, τ_2 et soit F un sous-espace de dimension $n - 3$ de $H_1 \cap H_2$. Alors $v_{|F} = \text{id}$ et donc $V(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$. Ainsi, d'après le premier cas, $v_{|F^{\perp}}$ est un produit $\sigma_1 \cdots \sigma_k$ de retournements, on prolonge alors les σ_i par l'identité sur V, et on obtient le résultat. $\square$

Commentaire : le développement est un peu court, on peut suivant les leçons justifier la connexité par arcs de $SO_3(\mathbb{R})$ ou bien le fait que $SO_3(\mathbb{R})$ soit engendré par les retournements.