3.2 Développement asymptotique de la série harmonique

Référence : S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques, oraux X-ENS - Analyse 1*, Cassini, 2007.

Leçons concernées : 224, 230.

Théorème 1. *Si on note* $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$*, alors on a,*

$$H_n = \log(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

où $\gamma = \lim_{n+\infty} H_n - \log(n)$*.*

Démonstration. Étape 1 : on montre que la suite $(u_n)_n = (H_n - \log(n))_n$ est convergente. Pour cela on introduit $v_n := u_n - \frac{1}{n}$ et on montre que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. En effet la différence $u_n - v_n = \frac{1}{n}$ est positive et tend vers 0. D'autre part,

$$u_n - u_{n+1} = \log(n+1) - \log(n) - \frac{1}{n+1} = -\frac{1}{n+1} - \log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geqslant 0$$

puisque $\log(1+x) \leqslant x$ pour tout $x > -1$ par concavité du logarithme. Par la même inégalité on obtient enfin

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \log(n) - \log(n+1) + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0.$$

Ainsi les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes et convergent donc vers une même limite γ.

Étape 2 : on a ainsi montré que $H_n = \log(n) + \gamma + o(1)$. On note alors $t_n = H_n - \log(n) - \gamma$ et on cherche un équivalent de t_n. On remarque que

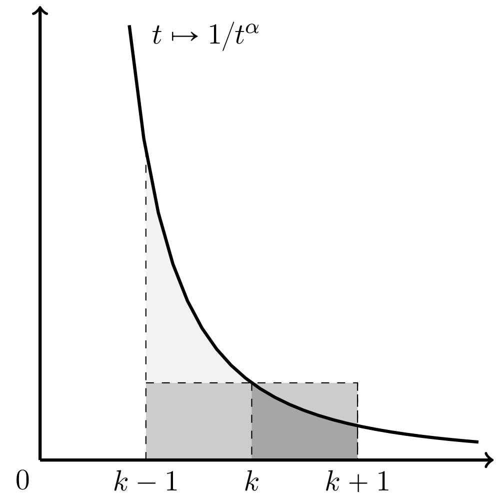
$$t_n - t_{n-1} = \frac{1}{n} + \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$$

et donc, puisque $(t_n)_n$ tend vers 0, on a par sommation des équivalents

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (t_k - t_{k-1}) = -t_n \sim -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim -\frac{1}{2n}.$$

Le dernier équivalent s'obtient de la manière suivante : si $\alpha > 1$, la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sur $]0, +\infty[$ nous donne

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\, dt \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$$



et donc

$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{1}{t\alpha}\,dt = \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

et alors $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$. Ainsi, on a $H_n = \log(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\big(\frac{1}{n}\big)$.

Étape 3 : on précise encore le développement asymptotique : on note $w_n = t_n - \frac{1}{2n}$. On a alors

$$\begin{aligned} w_n - w_{n-1} &= \log\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)} \\ &= -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\frac{1}{1-1/n} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big) \\ &= -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\Big(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big) + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big) \\ &= \frac{1}{6n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big) \\ &\sim \frac{1}{6n^3} \end{aligned}$$

et donc par sommation des équivalents, puisque $(w_n)_n$ converge vers 0,

$$-w_n \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{6n^3} \sim \frac{1}{12n^2}$$

et on peut donc conclure que $H_n = \log(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)$. $\square$

Application 2. *Si on note* $k_n := \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid H_k \geqslant n\}$, *alors*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = e.$$

Démonstration. On utilise le fait que $H_n = \log(n) + \gamma + \varepsilon_n$ où $(\varepsilon_n)_n$ est une suite qui tend vers 0. On a alors, par définition,

$$\log(k_n) + \gamma + \varepsilon_{k_n} \geqslant n$$

et

$$\log(k_n - 1) + \gamma + \varepsilon_{k_n - 1} < n$$

et donc en passant à l'exponentielle,

$$e^n e^{-\gamma - \varepsilon_{k_n}} \leqslant k_n < e^n e^{-\gamma - \varepsilon_{k_n - 1}} + 1.$$

Ainsi, $k_n \sim e^n e^{-\gamma}$ et donc en particulier

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = e.$$

□