3.4 Équation de Schrödinger sur $\mathbb{R}$

Référence : J. Rauch, *Partial differential equations*, Springer, 1991.[1]

Leçons concernées : 201, 222, 239, 250.

Théorème 1. *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ vérifiant*

(i) $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = i\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$

(ii) $u(x,0) = f(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$

(iii) $x \mapsto u(x,t)$ *appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ uniformément par rapport à t, c'est-à-dire que pour tout $T > 0$,*

$$\forall k,l \geqslant 0, \quad M_{k,l}^T := \sup_{|t|<T} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^l u}{\partial x^l}(x,t) \right| < +\infty.$$

De plus la solution est donnée par

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{-i\xi^2 t} e^{ix\xi} d\xi.$$

Démonstration. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : on suppose que $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ est solution du problème. Puisque $u(.,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on peut considérer la transformée de Fourier partielle de u :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{u}(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t) e^{-ix\xi} dx.$$

Soit $\xi \in \mathbb{R}$, on applique alors le théorème de dérivation sous l'intégrale à $t \mapsto \widehat{u}(\xi,t)$ sur tout intervalle $]-T,T[$, pour $T > 0$:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto u(x,t)e^{-ix\xi}$ est dérivable sur $]-T,T[$

(ii) $\forall t \in]-T,T[$, $x \mapsto u(x,t)e^{-ix\xi} \in L^1(\mathbb{R})$ puisque $u(.,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in]-T,T[$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial t}\Big(u(x,t) e^{-ix\xi} \Big) \right| = \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right| = \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \right| \leqslant \frac{M_{0,2}^T + M_{2,2}^T}{1+|x|^2}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ et ne dépend pas de t.

On obtient ainsi, pour $\xi, t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t}\Big(u(x,t)e^{-ix\xi}\Big) dx = i\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) e^{-ix\xi} dx.$$

1. Merci à Michel Nassif pour l'idée et l'aide sur certains points du développement.

En réalisant deux intégrations par parties on obtient alors pour $\xi, t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi, t) = -i\xi^2 \widehat{u}(\xi, t)$$

et ainsi, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, il existe $A(\xi) \in \mathbb{R}$ tel que pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{u}(\xi, t) = A(\xi)e^{-i\xi^2 t}.$$

Or, pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{u}(\xi, 0) = A(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x,0)e^{-ix\xi}dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx = \widehat{f}(\xi).$$

On obtient alors $\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi)e^{-i\xi^2 t}$. Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi)e^{-i\xi^2 t} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on peut appliquer l'inversion de Fourier pour avoir, pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{-i\xi^2 t}e^{ix\xi}d\xi.$$

On a donc unicité de la solution.

Synthèse : on considère

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{-i\xi^2 t}e^{ix\xi}d\xi$$

pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. En appliquant le théorème de dérivation sous l'intégrale on obtient la régularité de u, qui est en fait $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ et le fait qu'elle vérifie l'équation de Schrödinger sur $\mathbb{R}^2$.

D'autre part, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi = f(x)$$

par inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Enfin, pour montrer le point (iii), on observe que pour tout $l \geqslant 0$, par dérivation sous le signe intégral,

$$\frac{\partial^l u}{\partial x^l}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} i^l \xi^l \widehat{f}(\xi)e^{-i\xi^2 t}e^{ix\xi}d\xi$$

ainsi pour $k \geqslant 0$,

$$x^k \frac{\partial^l u}{\partial x^l}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} i^l \xi^l \widehat{f}(\xi)e^{-i\xi^2 t}x^k e^{ix\xi}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^k}{\partial \xi^k}\Big(i^l \xi^l \widehat{f}(\xi)e^{-i\xi^2 t}\Big)i^k e^{ix\xi}d\xi$$

et donc pour $k, l \geqslant 0$, et pour $|t| < T$, où $T > 0$,

$$\begin{aligned}
\left|x^k \frac{\partial^l u}{\partial x^l}(x,t)\right| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^k}{\partial \xi^k}\left(\xi^l \widehat{f}(\xi) e^{-i\xi^2 t}\right)\right| d\xi \leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{k'=0}^{k}\binom{k}{k'}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k'}}{\partial \xi^{k'}}\left(\xi^l \widehat{f}(\xi)\right)\right|\left|\frac{\partial^{k-k'}}{\partial \xi^{k-k'}}\left(e^{-i\xi^2 t}\right)\right| d\xi \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{k'=0}^{k}\binom{k}{k'}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k'}}{\partial \xi^{k'}}\left(\xi^l \widehat{f}(\xi)\right)\right| P_{k'}(|\xi|,|t|) d\xi \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{k'=0}^{k}\binom{k}{k'}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k'}}{\partial \xi^{k'}}\left(\xi^l \widehat{f}(\xi)\right)\right| P_{k'}(|\xi|,T) d\xi < +\infty
\end{aligned}$$

où $P_{k'}$ est un polynôme à coefficients positifs en deux variables. Pour obtenir cette série de majoration on a appliqué l'inégalité triangulaire et la formule de Leibniz. La majoration est alors indépendante de t, et elle est valable puisque f étant dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il en est de même de $\widehat{f}$, et donc puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par dérivation et multiplication par un polynôme,

$$\xi \mapsto \frac{\partial^{k'}}{\partial \xi^{k'}}\left(\xi^l \widehat{f}(\xi)\right) P_{k'}(\xi, T) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}).$$

$\square$

Remarque. La même technique s'applique à l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$, c'est cependant plus compliqué, puisque dans ce cas la condition initiale est une condition limite, il faut donc justifier un passage à la limite pour obtenir $A = \widehat{f}$. La justification de l'appartenance uniforme de u à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est différente puisqu'on utilise l'expression de u comme produit de convolution avec un noyau.