3.20 Théorème de Riesz-Fischer

Références : H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999,
W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, 1998.

Leçons concernées : 201, 205, 208, 234, 241, *262*.

Théorème 1. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, l'espace $(L^p(\mu), ||.||_p)$ est complet.*

Démonstration. Cas 1 : on commence par considérer le cas $p = +\infty$: soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L^\infty(\mu)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, par définition il existe $N_k \geqslant 1$ tel que pour tout $m, n \geqslant N_k$,

$$||f_n - f_m||_\infty \leqslant \frac{1}{k}.$$

Ainsi, il existe un ensemble de mesure nulle E_k tel que pour tout $m, n \geqslant N_k$ et pour tout $x \in X \backslash E_k$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{1}{k}.$$

On pose alors $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} E_k$ qui est de mesure nulle, et on obtient que pour tout $x \in X \backslash E$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_k \geqslant 0$ tel que pour tout $m, n \geqslant N_k$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{1}{k} \tag{1}$$

c'est-à-dire que $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Par complétude de $\mathbb{R}$, cette suite admet une limite $f(x)$, et on peut donc construire la fonction f définie presque partout (on la prolonge par 0 sur E). En passant à la limite en m dans l'équation (1) on obtient que pour tout $x \in X \backslash E$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_k \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant N_k$,

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{k},$$

c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_k \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant N_k$,

$$||f - f_n||_\infty \leqslant \frac{1}{k},$$

et donc $f \in L^\infty$ par inégalité triangulaire, et $(f_n)_n$ converge vers f dans L^∞.

Cas 2 : soit maintenant $1 \leqslant p < +\infty$ et $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L^p(\mu)$. Il existe une suite extraite $(f_{n_k})_k$ telle que

$$\forall k \geqslant 1, \quad ||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

On pose alors

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right| \quad \text{et} \quad g = \sum_{k \geqslant 1} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|.$$

L'inégalité de Minkowski montre que pour $n \geqslant 1$, $||g_n||_p \leqslant 1$ et le lemme de Fatou appliqué à $(g_n^p)_n$ nous donne $||g||_p \leqslant 1$. Ainsi, en particulier, $|g| < +\infty$ presque partout de sorte que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la série

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k \geqslant 1} \big(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\big)$$

converge absolument dans $\mathbb{R}$ complet, donc converge vers $f(x) \in \mathbb{R}$. On note f la fonction ainsi obtenue (prolongée par 0 sur un ensemble de mesure nulle). On remarque que $f_{n_1} + \sum_{k=1}^{n}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = f_{n+1}$ et donc $(f_{n_k})_k$ converge presque partout vers f. On montre alors la convergence dans L^p. Soit $\varepsilon > 0$, par hypothèse il existe $N \geqslant 0$ tel que pour tout $n, m \geqslant N$, $||f_n - f_m||_p \leqslant \varepsilon$. Alors, grâce au lemme de Fatou, pour tout $m \geqslant N$,

$$\int_X |f - f_m|^p d\mu = \int_X \liminf_{k \to +\infty} |f_{n_k} - f_m|^p d\mu \leqslant \liminf_{k \to +\infty} \int_X |f_{n_k} - f_m|^p d\mu \leqslant \varepsilon^p$$

et donc $f - f_m \in L^p$ de sorte que $f \in L^p$ et d'autre part $||f - f_m||_p \leqslant \varepsilon$ et donc $(f_n)_n$ converge vers f dans L^p. $\square$

Corollaire 2. *Soit* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$*, et soit* $(f_n)_n$ *une suite convergente dans* $L^p(\mu)$ *vers* f*. Alors il existe une sous-suite* $(f_{n_k})_k$ *de* $(f_n)_n$ *qui converge presque sûrement vers* f*.*

Démonstration. Une suite convergente est de Cauchy, et dans la preuve précédente, dans chacun des deux cas, on obtient une sous-suite qui converge presque partout. $\square$