

3.13 Optimisation dans un Hilbert

Référence : P.G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, 1982,

G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation*, Éditions de l'École Polytechnique, 2005 □

Leçons concernées : 205, 208, 213, 219, 229, 253, 201, 203.

Théorème 1 (Banach-Alaoglu). *Soit H un espace de Hilbert séparable, et soit $(T_n)_n$ une suite bornée de H' , alors il existe $T \in H'$ et une extractrice φ tels que $(T_{\varphi(n)})_n$ converge faiblement vers T , c'est-à-dire que pour tout $x \in H$,*

$$T_{\varphi(n)}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T(x).$$

Démonstration. Étape 1 : on se donne $(x_k)_k$ une suite dense de H . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(T_n(x_k))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée par $M \|x_k\|$, où on a noté $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|$. Le procédé d'extraction diagonale nous assure ainsi l'existence d'une sous-suite de $(T_n)_n$ que l'on notera encore $(T_n)_n$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(T_n(x_k))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite notée $T(x_k)$.

Étape 2 : on montre que $(T_n(x))_n$ converge pour tout $x \in H$. Soit $\varepsilon > 0$, et soit x_k tel que $\|x - x_k\| < \varepsilon$. Pour $p, q \geq 0$

$$|T_p(x) - T_q(x)| \leq |T_p(x) - T_p(x_i)| + |T_p(x_i) - T_q(x_i)| + |T_q(x_i) - T_q(x)|,$$

or, $|T_p(x) - T_p(x_i)| \leq M \|x - x_i\|$, $|T_q(x) - T_q(x_i)| \leq M \|x - x_i\|$, et par le point précédent, il existe $N \geq 0$ tel que pour $p, q \geq N$, $|T_p(x_i) - T_q(x_i)| < \varepsilon$. Ainsi, pour $p, q \geq N$,

$$|T_p(x) - T_q(x)| < (2M + 1)\varepsilon.$$

La suite $(T_n(x))_n$ est donc de Cauchy dans \mathbb{R} et converge ainsi vers une limite notée $T(x)$.

Étape 3 : comme limite de fonction linéaire, T est linéaire. D'autre part, pour $x \in H$,

$$|T(x)| = \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) \right| \leq M \|x\|$$

et donc $T \in H'$, ce qui conclut la preuve du théorème. □

Théorème 2. *Soit H un espace de Hilbert séparable, et soit $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ un fonction continue, convexe, et coercive, au sens où*

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} J(x) = +\infty.$$

Alors il existe un minimum de J sur H .

1. La démonstration n'est faite de cette façon dans aucune des références, il faut adapter. Se reporter au développement rédigé d'Antoine Mouzard. Merci également à Michel Nassif pour ce développement.

Démonstration. Étape 1 : soit $(u_n)_n$ une suite minimisante. Puisque H est non vide, $\inf_{x \in H} J(x) < +\infty$, et donc par coercivité de J , $(u_n)_n$ est bornée. Ainsi, d'après le théorème de Banach-Alaoglu et le théorème de Riesz, quitte à extraire, $(u_n)_n$ converge faiblement vers $u \in H$.

Étape 2 : on prend $\alpha > \inf_{x \in H} J(x)$ et on pose $C_\alpha := \{x \in H \mid J(x) \leq \alpha\}$. La partie C_α est fermée car J est continue et convexe car J est convexe. Puisque $\lim J(u_n) = \inf_{x \in H} J(x) < \alpha$, $u_n \in C_\alpha$ à partir d'un certain rang, et en particulier C_α est non vide. On applique alors le théorème de projection à C_α sur H , et on note P_α le projection. À partir d'un certain rang, d'après le théorème de projection,

$$\langle u - P_\alpha(u), u_n - P_\alpha(u) \rangle \leq 0.$$

On passe alors à la limite pour obtenir $\|u - P_\alpha(u)\|^2 = 0$, et donc $u = P_\alpha(u) \in C_\alpha$, c'est-à-dire que $J(u) \leq \alpha$. On a donc,

$$\forall \alpha > \inf_{x \in H} J(x), \quad J(u) \leq \alpha$$

et ainsi $J(u) = \inf_{x \in H} J(x)$. □

Remarque. L'hypothèse H séparable n'est pas nécessaire, puisque dans la preuve de la compacité faible on peut considérer $E = \overline{\text{Vect}(u_n, n \in \mathbb{N})}$ qui est un Hilbert séparable et conclure avec $H = E \oplus E^\perp$. On peut également minimiser J sur K un convexe fermé non vide au lieu de H , il faut pour cela montrer que la limite faible obtenue est dans K , ce qui se fait avec le théorème de la projection, de la même manière que dans l'étape 2 de la preuve.

Application 3. Soit $f \in L^2(0, 1)$, et $p \geq 1$. Alors il existe une unique fonction $u \in H_0^1(0, 1)$ telle que

$$-u'' + |u|^{p-1}u = f \tag{1}$$

dans $L^2(0, 1)$.

Démonstration. On introduit la fonctionnelle $J : H_0^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$J(u) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} u'(x)^2 + \frac{|u(x)|^{p+1}}{p+1} - f(x)u(x) \right) dx$$

pour $u \in H_0^1$. On remarque tout d'abord que J est différentiable de différentielle²

$$dJ(u)(v) = \int_0^1 \left(u'(x)v'(x) + |u(x)|^{p-1}u(x)v(x) - f(x)u(x) \right) dx.$$

En particulier J est continue. D'autre part, puisque la dérivation est linéaire et que toutes les fonctions de u et de u' intervenant dans l'intégrale qui définit J sont convexes, J est

2. Cela demande un calcul non évident.

convexe. On montre alors que J est strictement convexe. Soit $\lambda \in]0, 1[$, et $u, v \in H_0^1$. Si $J(\lambda u + (1 - \lambda)v) = \lambda J(u) + (1 - \lambda)J(v)$, alors puisque J est convexe, en particulier,

$$\int_0^1 |\lambda u(x) + (1 - \lambda)v(x)|^{p+1} dx = \int_0^1 \lambda |u(x)|^{p+1} + (1 - \lambda)|v(x)|^{p+1} dx$$

ce qui implique, par convexité de la fonction $t \mapsto |t|^{p+1}$ (si l'intégrale d'une fonction positive est nulle alors la fonction est nulle presque partout), que presque partout,

$$|\lambda u(x) + (1 - \lambda)v(x)|^{p+1} = \lambda |u(x)|^{p+1} + (1 - \lambda)|v(x)|^{p+1}$$

et donc, par strict convexité de $t \mapsto |t|^{p+1}$, $u = v$ presque partout, et on a montré la strict convexité de J .

On voit que $u \in H_0^1$ est solution de (1) si et seulement si $dJ(u)(v) = 0$, et donc, par convexité de J , $u \in H_0^1$ est solution de (1) si et seulement si u est un minimum de J sur H_0^1 . Si on montre que J est coercive, on obtient alors l'existence en appliquant le théorème précédent, et l'unicité par strict convexité.

On a en effet, par inégalité de Cauchy-Schwarz, puis par inégalité de Poincaré,

$$J(u) \geq \int_0^1 \frac{1}{2} u'(x)^2 dx - \|u\|_2 \|f\|_2 \geq C \|u\|_{H^1}^2 - \|f\|_2 \|u\|_{H^1} \xrightarrow{\|u\| \rightarrow +\infty} +\infty.$$

□

Commentaire : on montre d'abord le théorème d'optimisation, puis le théorème de Banach-Alaoglu, et si il reste du temps on présente très succinctement l'application.