2.5 Étude de $O(p, q)$

Référence : P. Caldero, J. Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie, Tome premier*, Calvage & Mounet, 2013.

Leçons concernées : 106, 150, 156, 158, 160, 170, 171.

Définition 1. Si $p + q = n$, on note $O(p, q)$ l'ensemble des isométries de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ pour la forme quadratique $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2$. Autrement dit, si on note $I_{p,q}$ la matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(I_p, -I_q)$,

$$O(p, q) = \left\{P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tPI_{(p,q)}P = I_{(p,q)}\right\}.$$

Lorsque $q = 0$, on note simplement $O(p) = O_p(\mathbb{R})$.

On aura besoin du résultat suivant :

Proposition 2. *L'exponentielle induit un homéomorphisme*

$$\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

Théorème 3. *Si $p, q \neq 0$, on a un homéomorphisme*

$$O(p, q) \cong O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}.$$

Démonstration. Étape 1 : on commence par montrer qu'il existe un homéomorphisme $O(p, q) \cong (O(p, q) \cap O(n)) \times (O(p, q) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$. On utilise pour cela la décomposition polaire : soit $M \in O(p, q)$, il existe $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$. On va montrer que O et S sont dans $O(p, q)$, et pour cela il suffit de vérifier que S l'est. On remarque tout d'abord que $O(p, q)$ est stable par transposition : on a ${}^tMI_{(p,q)}M = I_{(p,q)}$ donc par passage à l'inverse $M^{-1}I_{(p,q)}{}^tM^{-1} = I_{(p,q)}$ c'est-à-dire que ${}^tM^{-1} \in O(p, q)$, et donc ${}^tM \in O(p, q)$. Maintenant, si $T = {}^tMM$, $T \in O(p, q)$, et d'autre part on vérifie que $S^2 = T$, donc $S^2 \in O(p, q)$. $T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, soit donc $U \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\exp U = T$. On a, par bijectivité de $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
T \in O(p, q) &\iff {}^t\exp(U)I_{(p,q)}\exp(U) = I_{(p,q)} \\
&\iff \exp({}^tU) = I_{(p,q)}\exp(-U)I_{(p,q)} = \exp\big(-I_{(p,q)}UI_{(p,q)}\big) \\
&\iff {}^tU = -I_{(p,q)}UI_{(p,q)} \\
&\iff \frac{{}^tU}{2} = -I_{(p,q)}\frac{U}{2}I_{(p,q)} \\
&\iff \exp(\frac{{}^tU}{2}) = I_{(p,q)}\exp(-\frac{U}{2})I_{(p,q)} \\
&\iff \exp(\frac{U}{2}) \in O(p, q).
\end{aligned}$$

Or $\left(\exp(\frac{U}{2})\right)^2 = T = S^2$, et par unicité de la racine carré d'une matrice définie positive, $S = \exp(\frac{U}{2}) \in O(p,q)$. Ainsi, la décomposition polaire nous fournit un homéomorphisme $O(p,q) \cong (O(p,q) \cap O(n)) \times (O(p,q) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$. On chercher alors à expliciter les deux groupes mis en jeu.

Étape 2 : on a l'homéomorphisme $O(p,q) \cap O(n) \cong O(p) \times O(q)$. En effet, si $O = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in O(p,q) \cap O(n)$, alors puisque

$$O \in O(p,q) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix},$$

on a, en particulier

$$\begin{cases} {}^tAA -{}^t CC = I_p \\ {}^tBB - {}^tDD = -I_q \end{cases}$$

et d'autre part puisque

$$O \in O(n) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = I_n,$$

on a en particulier,

$$\begin{cases} {}^tAA +{}^t CC = I_p \\ {}^tBB + {}^tDD = I_q \end{cases}.$$

Ainsi, ${}^tCC = 0$, donc $\mathrm{Tr}{}^t CC = \sum c_{i,j}^2 = 0$, et ainsi $C = 0$. De même $B = 0$, donc $(A,D) \in O(p) \times O(q)$ et on obtient l'homéomorphisme annoncé $O \mapsto (A,D)$.

Étape 3 : on a l'homéomorphisme $O(p,q) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{pq}$. On a vu lors de la première étape que exp induit une bijection entre $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap L$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \cap O(p,q)$ où $L = \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t UI_{(p,q)} + UI_{(p,q)} = 0\}$. Puisque $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme, l'application précédente fournit un homéomorphisme. Enfin, si $U = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & C \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ avec $A \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{S}_q(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, alors $U \in L \Longleftrightarrow 2A = 0$ et $-2C = 0$, on a donc un homéomorphisme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap L \cong \mathbb{R}^{pq}$ donné par $U \mapsto B$, ce qui conclut la preuve. □

Proposition 4. *Pour toute matrice $T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = T$.*

Démonstration. Puisque $T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $P \in {}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_i > 0$ tels que

$$T = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} {}^tP.$$

On pose alors

$$S = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tP$$

qui vérifie bien $S^2 = T$. On suppose maintenant que $S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ vérifie $S'^2 = T$. On considère $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\mathbb{Q}(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout i. On a alors

$$\begin{aligned} S &= P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tP = PQ\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}\right) {}^tP \\ &= Q\left(P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} {}^tP\right) = Q(S^2) = Q(S'^2). \end{aligned}$$

Or S' commute avec $Q(S'^2)$, donc avec S, les deux matrices sont donc codiagonalisables : il existe $P_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mu_i > 0$, $\mu_i' > 0$ tels que

$$S = P_0 \operatorname{diag}(\mu_i) P_0^{-1} \quad \text{et} \quad S = P_0 \operatorname{diag}(\mu_i') P_0^{-1}.$$

Or $S^2 = S'^2$, donc $\mu_i^2 = \mu_i'^2$ pour tout i, ainsi $\mu_i = \mu_i'$ pour tout i, et enfin $S = S'$. $\square$