3.11 Méthode de Newton

Référence : F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, Cassini, 2014.

Leçons concernées : 218, 223, 226, 228.

Théorème 1. *Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui possède un unique zéro $a \in [c,d]$ et telle que $f' > 0$ sur $[c,d]$. On considère $\varphi := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, et la suite récurrente $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$, $(x_n)_n$ converge quadratiquement vers a.*

Si de plus $f'' > 0$ sur $[c,d]$, alors pour tout $x_0 \in [a,d]$, $(x_n)_n$ est décroissante et converge exactement à l'ordre 2 vers a.

Enfin, si on ne suppose plus $f' > 0$ et qu'on a $f'(a) = 0$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$, $(x_n)_n$ converge linéairement vers a.

Démonstration. Étape 1 : on observe que a est un point fixe de φ. On a alors, pour tout $x \in [c,d]$

$$\varphi(x) - a = x - a - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{-f(x) - (a-x)f'(x)}{f'(x)}.$$

On applique alors la formule de Lagrange à l'ordre 2 à f, en utilisant $f(a) = 0$: il existe z compris strictement entre a et x tel que $-f(x) - (a-x)f'(x) = f(a) - f(x) - (a-x)f'(x) = \frac{1}{2}f''(z)(x-a)^2$. Ainsi :

$$\varphi(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2.$$

Étape 2 : on pose alors $C := \dfrac{1}{2}\dfrac{\max_{x\in[c,d]}|f''(x)|}{\min_{x\in[c,d]}|f'(x)|}$ ($\min_{x\in[c,d]}|f'(x)| > 0$ puisque f' est continue sur $[c,d]$ compact, non nulle) et on obtient, pour tout $x \in [c,d]$,

$$|\varphi(x) - a| \leqslant C|x-a|^2.$$

On prend alors $\alpha > 0$ tel que $C\alpha < 1$ et $I = [a-\alpha, a+\alpha] \subset [c,d]$. On obtient, pour tout $x \in I$, $|\varphi(x) - a| \leqslant C\alpha^2 < \alpha$ et donc I est stable par φ. On peut alors considérer la suite récurrente $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ avec $x_0 \in I$, et on a

$$|x_{n+1} - a| \leqslant C|x_n - a|^2$$

d'où

$$C|x_n - a| \leqslant (C|x_0 - a|)^{2^n} \leqslant (C\alpha)^{2^n}$$

et on en déduit la convergence quadratique de x_n vers a avec $C\alpha < 1$.

Étape 3 : on suppose maintenant que $f'' > 0$ sur $[c,d]$. Pour tout $x \in [a,d]$, $f(x) \geqslant 0$ car f est croissante et $f'(x) > 0$ par hypothèse, ainsi,

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leqslant x$$

et d'autre part, comme on l'a montré plus haut,

$$\varphi(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f"(z)}{f'(x)}(x-a)^2 \geqslant 0$$

par hypothèse. Ainsi, $[a, d]$ est stable par φ, et pour tout $x_0 \in [a, d]$, $(x_n)_n$ est décroissante minorée, elle converge donc vers $l \in [a, d]$. Or, $\varphi(l) = l$, donc $f(l) = 0$ et par unicité, $l = a$. La convergence est là encore quadratique puisqu'on a toujours

$$|x_{n+1} - a| \leqslant C|x_n - a|^2.$$

On ne peut pas obtenir de convergence plus que quadratique, en effet, si $a < x_0 \leqslant d$, on a $x_n > a$ pour tout $n \geqslant 0$ par bijectivité de φ, et

$$\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{1}{2}\frac{f"(z_n)}{f'(x_n)}$$

or puisque $a < z_n < x_n$, z_n converge vers a, donc cette dernière fraction converge vers $\frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)} > 0$.

Étape 4 : enfin, si $f'(a) = 0$, par hypothèse sur l'unicité du zéro a, $f' \neq 0$ au voisinage de a. Ainsi, φ est définie au voisinage de a mais a priori pas en a. Mais on a, en a, $f(x) = \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + o((x-a)^2)$ et $f'(x) = (x-a)f''(a) + o((x-a))$, d'où

$$\varphi(x) - a = \frac{(x-a)f'(x) - f(x)}{f'(x)} = \frac{\frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + o((x-a)^2)}{(x-a)f''(a) + o((x-a))} = \frac{x-a}{2} + o((x-a))$$

ainsi φ est prolongeable par continuité en a. D'autre part,

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{\frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + o((x-a)^2)}{((x-a)f''(a) + o((x-a)))^2}(f''(a) + o(1)) = \frac{1}{2} + o(1)$$

donc par le théorème de la limite de la dérivée, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de a et vérifie $\varphi'(a) = 1/2$. Ainsi, il existe $\alpha > 0$ tel que $|\varphi'| \leqslant k < 1$ sur $[a-\alpha, a+\alpha]$ et l'inégalité des accroissements finis nous assure que $[a-\alpha, a+\alpha]$ est stable par φ et que toute suite $(x_n)_n$ avec $x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$, vérifie

$$|x_{n+1} - a| \leqslant k|x_n - a|$$

et on en déduit la convergence linéaire de x_n vers a. □

Remarque. Pour justifier la convergence exactement quadratique : si par l'absurde on avait de la convergence d'ordre $m \geqslant 3$, on aurait

$$|x_{n+1} - a| \leqslant C'|x_n - a|^m$$

et donc

$$\frac{|x_{n+1} - a|}{|x_n - a|^2} \leqslant C'|x_n - a|^{m-2}$$

qui tend vers 0 en $+\infty$.