3.10 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 3$

Référence : Plan de leçon de Louis Garénaux et Michel Nassif.

Leçons concernées : 235, 260, 261, 262, 264.

Théorème 1. *Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ la base canonique dans $\mathbb{R}^d$, et $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que*

$$\mathbb{P}(X_1 = e_i) = \mathbb{P}(X_1 = -ei) = \frac{1}{2d}$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$. On note $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $S_0 = 0$. Alors pour $d \geqslant 3$,

$$\mathbb{P}(|S_n| \to +\infty) = 1.$$

Démonstration. On cherche à montrer que $\sum \mathbb{P}(S_n = 0)$ converge. En effet, si on note $R = \mathbb{E}[\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{1}_{S_n = 0}]$ l'espérance du nombre de retours en 0, on a par Fubini-Tonelli, $R = \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(S_n = 0)$, et l'on pourra aboutir à une conclusion.

Étape 1 : on cherche alors à calculer $\mathbb{P}(S_n = 0)$. On pose, pour $t = (t_1, \cdots, t_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$\varphi(t) := \varphi_{X_1}(t) = \mathbb{E}[e^{iX_1 \cdot t}] = \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{2d}(e^{it \cdot e_j} + e^{-it \cdot e_j}) = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} \cos(t_j).$$

De plus, par indépendance, on a $\varphi_{S_n}(t) = (\varphi(t))^n$.

D'autre part, avec $\varphi_{S_n}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(S_n = k) e^{ik \cdot t}$, si on pose $T := [-\pi, \pi]$, on a :

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T^d} \varphi_{S_n}(t) dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{T^d} \mathbb{P}(S_n = k) e^{ik \cdot t} dt = \mathbb{P}(S_n = 0)$$

par Fubini puisque $\frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{T^d} |\mathbb{P}(S_n = k) e^{ik \cdot t}| dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(S_n = k) = 1$ et puisque $\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T^d} e^{ik \cdot t} dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T^d} \prod_{j=1}^d e^{ik_j t_j} dt = \delta_0^k$.

Étape 2 : on calcule alors R. Puisqu'il faut un nombre pair d'étapes à $(S_n)_n$ pour revenir en 0, on sait que pour n impair, $\mathbb{P}(S_n = 0) = 0$. On remarque que $|\varphi| \leqslant 1$ sur T^d et $|\varphi(t)| = 1$ si et seulement si $t = (0, \ldots, 0), \pm(\pi, \ldots, \pi)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(S_n = 0) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{n \geqslant 0} \int_{T^d} \varphi_{S_2n}(t) dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{n \geqslant 0} \int_{T^d} \varphi(t)^{2n} dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T^d} \sum_{n \geqslant 0} \varphi(t)^{2n} dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T^d} \frac{1}{1 - \varphi(t)^2} dt\end{aligned}$$

par Fubini-Tonelli puisqu'on a justifié que $\varphi(t)$ est réel et puisque $|\varphi| < 1$ presque partout sur T^d.

Étape 3 : justifions l'intégrabilité. Puisque $\frac{1}{1-\varphi^2}$ est continue sur $T^d \backslash \{(0,\dots,0), \pm(\pi,\dots,\pi)\}$, il nous reste maintenant à justifier l'intégrabilité de la fonction $\frac{1}{1-\varphi^2}$ en $(0,\dots,0), \pm(\pi,\dots,\pi)$. On se limite au point $(0,\dots,0)$ puisque pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\cos(y \pm \pi) = -\cos(y)$.

Or, en 0,

$$\varphi(t) = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\left(1 - \frac{t_j^2}{2} + o(t_j^2)\right) = 1 - \frac{||t||^2}{2d} + o(||t||^2)$$

et ainsi

$$1 - \varphi(t)^2 = \frac{||t||^2}{d} + o(||t||^2)$$

donc

$$\frac{1}{1-\varphi(t)^2} \sim \frac{d}{||t||^2}$$

qui est intégrable en 0 dès que $d \geqslant 3$.

Étape 4 : soit maintenant $k \in \mathbb{Z}^d$, on montre que $\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{P}(S_n = k)$ converge en se ramenant en 0 : on pose $l = |k|$, on a, pour $n \geqslant l+1$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = 0) &\geqslant \mathbb{P}(S_n = 0 \text{ et } S_l = -k)\\ &\geqslant \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_l = -k \text{ et } X_{l+1} + \dots + X_n = k)\\ &= \mathbb{P}(S_l = -k)\mathbb{P}(S_{n-l} = k)\end{aligned}$$

car les X_i sont i.i.d. Or, puisque $l = |k|$, $\mathbb{P}(S_l = -k) \geqslant \frac{1}{(2d)^l} > 0$ donc

$$\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{n\geqslant l+1}\mathbb{P}(S_{n-l} = k) \leqslant \frac{1}{\mathbb{P}(S_l = -k)}\sum_{n\geqslant l+1}\mathbb{P}(S_n = 0) < \infty.$$

Étape 5 : on peut alors conclure : pour $k \in \mathbb{Z}^d$, on note $N_k := \sum_{n\geqslant 0}\mathbb{1}_{S_n = k}$ le nombre de retours de S_n en k, et puisque $\mathbb{E}[N_k] = \sum_{n\geqslant 0}\mathbb{P}(S_n = k)$, N_k est fini presque sûrement. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|S_n| \to +\infty) &= \mathbb{P}(\forall A \in \mathbb{N}^*,\ \exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ |S_n| \geqslant A)\\ &= \lim_{A\to+\infty}\mathbb{P}(\exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ |S_n| \geqslant A)\\ &= \lim_{A\to+\infty}\mathbb{P}(\forall k,\ |k| \leqslant A,\ N_k \text{ est fini})\\ &= 1\end{aligned}$$

puisque $(\{\exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ |S_n| \geqslant A\})_{A\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, que $\{\exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ |S_n| \geqslant A\} = \{\forall k,\ |k| \leqslant A,\ N_k \text{ est fini}\}$ et puisque l'union dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle. □

On justifie ici[1] l'intégrabilité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{||x||^2}$ utilisée dans la preuve.

1. Merci à Michel Nassif pour cette preuve.

Proposition 2. *La fonction $x \mapsto \frac{1}{||x||^2}$ est intégrable au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$ si et seulement si $d \geqslant 3$.*

Démonstration. Il est clair que pour $d = 1, 2$, la fonction n'est pas intégrable en 0.

On montre alors l'intégrabilité pour $d = 3$: on considère le $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme $\Psi(r, \theta, \varphi) = (r\cos(\theta)\sin(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\varphi))$ de jacobien $-r^2\sin(\varphi)$. On a alors,

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\ dx\ dy\ dz = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{r=0}^{1} \frac{1}{r^2}\ r^2\sin(\varphi)\ dr\ d\varphi\ d\theta = 4\pi.$$

Enfin, on se ramène au cas $d = 3$ lorsque $d \geqslant 3$:

$$\begin{aligned}\int\cdots\int_{x_1^2+\cdots+x_d^2\leqslant 1} \frac{1}{x_1^2+\cdots+x_d^2}\ dx_1\cdots dx_d &\leqslant \int\cdots\int_{x_1^2+\cdots+x_d^2\leqslant 1} \frac{1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\ dx_1\cdots dx_d \\ &\leqslant \int_{x_4=-1}^{1}\cdots\int_{x_d=-1}^{1}\ \iiint\limits_{x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant 1} \frac{1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\ dx_1\cdots dx_d = 2^{d-1}\pi\end{aligned}$$

car $\{x_1^2+\cdots+x_d^2 \leqslant 1, (x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}^d\} \subset \left\{x_1^2+x_2^3+x_3^2 \leqslant 1, (x_1,x_3,x_d) \in \mathbb{R}^3\right\} \times [-1,1]^{d-3}$. $\square$

Remarque : pour obtenir $\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d}\varphi_{S_n}(t)dt = \mathbb{P}(S_n = 0)$ on pourrait utiliser les coefficients de Fourier de φ_{S_n} mais cela suppose d'introduire les séries de Fourier en dimension d, (cf H. Dym, H.P. McKean, D. Aldous, Y.L. Tong, *Fourier Series and integrals*, Academic Press, 1985).

Commentaire : pour justifier le recasage dans la leçon 235 : interversion de limites et d'intégrales, on note qu'on applique une fois le théorème de Fubini ainsi que deux fois le théorème de Fubini-Tonelli.