3.19 Théorème de Lax-Milgram et application

Références : F. Hirsch, G. Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999. H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.[1]

Leçons concernées : 201, 205, 213, 222.

Théorème 1 (Lax-Milgram). *Soit H un espace de Hilbert réel et a une forme bilinéaire sur H continue et coercive, c'est-à-dire telle qu'il existe $C, \alpha > 0$ telles que $\forall x, y \in H$,*

$$|a(x,y)| \leqslant C||x||||y|| \quad et \quad a(x,x) \geqslant \alpha||x||^2$$

alors pour toute forme linéaire continue L de H il existe un unique $u \in H$ tel que $\forall x \in H$

$$L(x) = a(u,x)$$

de plus si a est symétrique, en posant $J(x) = \frac{1}{2}a(x,x) - L(x)$ pour $x \in H$, u est caractérisé par

$$J(u) = \min_{x \in E} J(x).$$

Démonstration. Pour $x \in H$, $y \mapsto a(x,y)$ est une forme linéaire continue, ainsi, par le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur $Tx \in H$ tel que pour tout $y \in H$, $a(x,y) = (Tx|y)$. Pour tout $x, y, z \in H$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(Tx + \lambda Ty|z) = (Tx|z) + \lambda(Ty|z) = a(x,z) + \lambda a(y,z) = a(x + \lambda y, z)$$

et donc par unicité dans le théorème de Riesz $T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y)$ et T est linéaire. De plus, pour $x \in H$, par continuité de a,

$$||Tx||^2 = (Tx|Tx) = a(x,Tx) \leqslant C||x||||Tx||$$

et donc $||T|| \leqslant C$ et T est continu.

On montre alors que T est un isomorphisme : on commence par montrer que $T(H)$ est dense dans H par la caractérisation par l'orthogonal. Soit $z \in T(H)^\perp$, alors en particulier, par coercivité de a,

$$0 = (Tz|z) = a(z,z) \geqslant \alpha||z||^2 \geqslant 0$$

et donc $z = 0$. D'autre part, on remarque que pour tout $x \in H$,

$$||Tx||||x|| \geqslant |(Tx,x)| = a(x,x) \geqslant \alpha||x||^2$$

et donc $||Tx|| \geqslant \alpha||x||$. On en déduit que T est injectif. Enfin, si $(y_n)_n \in T(H)^{\mathbb{N}}$ converge vers $y \in H$, alors $(y_n)_n$ est de Cauchy dans H et donc en notant $x_n \in H$ tel que $y_n = Tx_n$,

1. Merci à Rudy Morel et Michel Nassif pour l'idée du développement et certains éléments de la preuve.

par l'inégalité précédente $(x_n)_n$ est aussi de Cauchy dans H complet, donc converge vers $x \in H$ et par continuité de T, $Tx = y$ de sorte que $T(H)$ est fermé. On peut alors conclure que T est un isomorphisme de H.

Soit maintenant L une forme linéaire continue sur H. Alors par le théorème de Riesz il existe un unique $v \in H$ tel que pour tout $x \in H$, $L(x) = (v|x)$. Ainsi, en notant $u = T^{-1}v$, pour tout $x \in H$, $L(x) = (Tu|x) = a(u,x)$. L'unicité de u s'obtient par l'unicité dans le théorème de Riesz : si pour tout $x \in H$, $L(x) = a(u',x)$, alors pour tout $x \in H$, $L(x) = (Tu',x)$ et donc $Tu' = Tu$ et $u' = u$.

Supposons de plus que a est symétrique, alors pour $v \in H$, si on écrit $v = u + w$, on obtient

$$J(v) = J(u+w) = J(u)+\frac{1}{2}\,a(w,w)-L(w)+a(u,w) = J(u)+\frac{1}{2}\,a(w,w)-L(w)+L(w) \geqslant J(u)$$

par coercivité. De plus si v est aussi minimum de J, alors si $w = u - v$, $J(u) = J(v)$ et par le calcul précédent $a(w,w) = 0$ et donc $w = 0$. $\square$

On applique le théorème de Lax-Milgram pour résoudre une équation différentielle par une méthode variationnelle.

Proposition 2. *Soit $I =]0,1[$, $p \in \mathcal{C}^1(\overline{I})$, $r,q \in \mathcal{C}^0(\overline{I})$ et $f \in L^2(I)$. On suppose que $p \geqslant \alpha > 0$, $q \geqslant 1$ et $r^2 \leqslant \alpha$, alors il existe une unique solution faible au problème*

$$\begin{cases} -(pu')' + ru' + qu = f \quad \text{sur} \quad I \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

c'est-à-dire qu'il existe un unique $u \in H_0^1(I)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(I), \qquad \int_I pu'v' + \int_I ru'v + \int_I quv = \int_I fv.$$

Démonstration. Étape 1 : on définit la forme bilinéaire a par,

$$a(u,v) = \int_0^1 pu'v' + \int_0^1 ru'v + \int_0^1 quv$$

pour $u,v \in H_0^1$, et la forme linéaire φ par,

$$\varphi(v) = \int_0^1 fv.$$

pour $v \in H_0^1$. Il est immédiat que φ est continue. D'autre part, puisque p,q,r sont continues sur $\overline{I}$ donc bornées, a est aussi continue. Enfin, si $v \in H_0^1$, on a par inégalité de Cauchy-Schwarz

$$-\int_0^1 rv'v \leqslant \left|\int_0^1 rv'v\right| \leqslant \sqrt{\alpha}||v||_2||v'||_2$$

et donc

$$\begin{aligned} a(v,v) &= \int_0^1 pv'^2 + \int_0^1 rv'v + \int_0^1 qv^2 \geqslant \alpha||v'||_2^2 - \sqrt{\alpha}||v||_2||v'||_2 + ||v||_2^2 \\ &= \Big(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}||v'||_2 - ||v||_2\Big)^2 + \frac{3\alpha}{4}||v'||_2^2 \geqslant \frac{3\alpha}{4}||v'||_2^2 \geqslant \frac{3\alpha}{4C^2}||v||_{H^1}^2 \end{aligned}$$

par inégalité de Poincaré et donc a est coercive. On peut ainsi appliquer le théorème de Lax-Milgram pour obtenir l'existence d'une unique solution faible $u \in H_0^1$. □

Remarque. On considère ici une forme bilinéaire non symétrique afin d'avoir une vraie application du théorème de Lax-Milgram. En effet si la forme bilinéaire considérée est symétrique, continue et coercive, elle constitue un produit scalaire dont la norme est équivalente à la norme $||.||_{H^1}$, et donc l'espace H_1^0 est complet pour cette nouvelle norme et on peut appliquer le théorème de Riesz. Cependant on perd ainsi le dernier point du théorème de Lax-Milgram qui est l'expression de u comme le minimum d'une fonctionnelle, ce qui peut-être utile pour obtenir des solutions approchées.

On voit maintenant comment montrer, avec des hypothèses de régularité, que l'unique solution faible est en fait une solution forte.

Proposition 3. *Soit $I =]0,1[$, $p \in \mathcal{C}^1(\overline{I})$ et $r, q, f \in \mathcal{C}^0(\overline{I})$. On suppose que $p \geqslant \alpha > 0$, $q \geqslant 1$ et $r^2 \leqslant \alpha$, alors il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^2(\overline{I})$ vérifiant*

$$\begin{cases} -(pu')' + ru' + qu = f \quad \text{sur} \quad I \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Démonstration. Étape 1 : par intégration par parties sur H_0^1, une solution forte de (2) est une solution faible de (2). La proposition précédente nous assure alors l'existence et l'unicité d'une solution faible $u \in H_0^1(I)$. On a donc unicité de la solution forte, il nous faut maintenant montrer que u est en fait une solution forte.

Étape 2 : puisque $\mathcal{D}(I) \subset H_0^1$ on a, par définition d'une solution faible,

$$-(pu')' + ru' + qu - f = 0 \tag{3}$$

au sens des distributions. Alors $(pu')' = ru' + qu - f \in L^2$ et donc $pu' \in H^1$ et ainsi $u' = \frac{1}{p}pu' \in H^1$. On obtient $u, u' \in \mathcal{C}^0(\overline{I})$ et donc[2] $u \in \mathcal{C}^1(\overline{I})$. Alors, puisque $(pu')' = p'u' + pu''$,

$$u'' = \frac{1}{p}\Big((pu')' - p'u'\Big) = \frac{1}{p}\Big(ru' + qu - f - p'u'\Big) \in \mathcal{C}^0(\overline{I})$$

donc $u' \in \mathcal{C}^1(\overline{I})$ et par suite, puisque $u \in \mathcal{C}^1(\overline{I})$, $u \in \mathcal{C}^2(\overline{I})$.

Étape 3 : puisque $u \in \mathcal{C}^2(\overline{I})$, la relation (3) est vérifiée au sens usuel (par injection de $\mathcal{C}^0(\overline{I})$ dans $\mathcal{D}'(I)$) et puisque $u \in H_0^1$, $u(0) = u(1) = 0$ et donc u est une solution classique. □

2. Cela provient de la formule $u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t)dt$ qui relie le représentant continu de u et u'.

Proposition 4. *L'espace H_0^1 est stable par produit et si $u, v \in H_0^1$,*

$$(uv)' = u'v - uv'$$

et (en intégrant la précédente relation) pour tout $x, y \in \overline{I}$, on a la formule d'intégration par parties

$$\int_y^x u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv'.$$

Démonstration. On remarque d'abord que puisque $H^1(I) \subset L^\infty(I)$, $uv \in H^1$, et puisque $uv(0) = uv(1) = 0$, $uv \in H_0^1$. On se donne alors $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites de $\mathcal{C}_c^1(I)$ qui convergent dans H_0^1 vers u et v respectivement. Alors $u_n \to u$ et $v_n \to v$ dans $L^\infty(I)$, et ainsi, $u_n v_n$ converge vers uv dans $L^2(I)$. D'autre part, puisque $(u_n v_n)' = u_n' v_n + u_n v_n'$,

$$||(u_n v_n)' - u'v - uv'||_2 \leqslant ||u_n' v_n - u_n' v||_2 + ||u_n' v - u'v||_2 \leqslant ||u_n'||_2 ||v_n - v||_\infty + ||v||_2 ||u_n' - u||_\infty \to 0$$

d'où le résultat. La formule d'intégration par parties s'en déduit en intégrant, puisque uv est continue. $\square$

Commentaires : le développement ne contient que le théorème de Lax-Milgram et l'existence et l'unicité d'une solution faible. L'existence et l'unicité d'une solution forte peut être faite si il reste du temps, mais c'est plus subtil.