4.2 Ellipsoïde de John-Loewner

Référence : S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Algèbre 3*, Cassini, 2008.

Leçons concernées : 152, 158, 170, 171, 219, 229, 253.

Définition 1. Un ellipsoïde centrée en 0 est une surface de $\mathbb{R}^n$ définie par une équation $q(x) \leqslant 1$ où q est une forme quadratique définie positive. On notera $\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n, q(x) \leqslant 1\}$ l'ellipsoïde centré en 0 associé à q définie positive.

Théorème 2. *Pour tout K compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide, il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.*

Lemme 3. *Soit A, B deux matrices symétriques réelles définies positives et α, β positifs tels que $\alpha + \beta = 1$. Alors,*

$$\det(\alpha A + \beta B) \geqslant (\det A)^\alpha (\det B)^\beta,$$

c'est-à-dire que le déterminant est log-concave. De plus, si $\alpha \in]0,1[$ et $A \neq B$, l'inégalité est stricte.

Démonstration. D'après le théorème de pseudo-réduction simultanée, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$ telles que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$. Ainsi,

$$(\det A)^\alpha (\det B)^\beta = (\det(P)^2)^\alpha (\det(P)^2 \det D)^\beta = \det(P)^2 (\det D)^\beta$$

et

$$\det(\alpha A + \beta B) = \det P^2 \det(\alpha I + \beta D).$$

On cherche donc à montrer que $\det(\alpha I + \beta D) \geqslant (\det D)^\beta$, c'est-à-dire

$$\prod_{i=1}^n (\alpha + \beta \lambda_i) \geqslant \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^\beta$$

soit, en passant au logarithme,

$$\sum_{i=1}^n \log(\alpha + \beta \lambda_i) \geqslant \beta \sum_{i=1}^n \log(\lambda_i)$$

et cette inégalité s'obtient terme à terme par concavité du logarithme.

Enfin, si $\alpha \in]0,1[$ et $A \neq B$, alors au moins un des λ_i est différent de 1 et donc par stricte concavité du logarithme, au moins l'une des inégalités est stricte et on a donc le résultat. □

Démonstration (Théorème). On note $\mathcal{Q}$ (resp. $\mathcal{Q}_+$, $\mathcal{Q}_{++}$) l'ensemble des formes quadratiques (resp. positives, définies positives) de $\mathbb{R}^n$.

Étape 1 : on commence par calculer le volume de $\mathcal{E}_q$ pour q définie positive quelconque. Par le théorème spectral[1], il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ dans laquelle q s'écrit $q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$, $a_i > 0$. Soit P la matrice de passage orthogonale de la base canonique à $\mathcal{B}$. On considère le changement de variables $x = Py$, de jacobien le déterminant de P qui vaut 1, puis le changement de variables $(u_1, \ldots, u_n) = (\sqrt{a_1}x_1, \ldots, \sqrt{a_n}x_n)$ de jacobien $\sqrt{a_1 \cdots a_n}$, pour obtenir

$$\iint \cdots \int_{\mathcal{E}_q} dy = \iint \cdots \int_{a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2 \leqslant 1} dx = \frac{1}{\sqrt{a_1 \cdots a_n}} \iint \cdots \int_{u_1^2 + \cdots + u_n^2 \leqslant 1} du = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}}$$

où V_0 est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$ et $D(q) = a_1 \cdots a_n$ le déterminant de q (que l'on obtient en diagonalisant la matrice de q dans une base quelconque).

Le problème se reformule alors ainsi : pour tout K compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$, il existe une unique $q \in \mathcal{Q}_{++}$ telle que $D(q)$ soit maximal et pour tout $x \in K$, $q(x) \leqslant 1$. On se donne alors K compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$.

Étape 2 : soit $\mathcal{A} = \{q \in \mathcal{Q}_+, \forall x \in K, q(x) \leqslant 1\}$. On munit par ailleurs $\mathcal{Q}$ de la norme $N(q) := \sup_{||x|| \leqslant 1} |q(x)|$.

- $\mathcal{A}$ est convexe : on vérifie facilement que si $q, q' \in \mathcal{A}$, $\lambda q + (1-\lambda)q' \in \mathcal{A}$ pour $\lambda \in [0,1]$.
- $\mathcal{A}$ est fermé : soit $(q_n)_n$ une suite de $\mathcal{A}$ qui converge vers q, alors pour $x \in \mathbb{R}^n$, $|q_n(x) - q(x)| \leqslant N(q_n - q)||x||$ et donc $q_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} q(x)$ et on en déduit la positivité de q et la condition $x \in K \Rightarrow q(x) \leqslant 1$ car ces conditions sont fermées.
- $\mathcal{A}$ est borné : puisque K est d'intérieur non vide, il existe $a \in K$ et $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset K$. Soit $q \in \mathcal{A}$. Si $||x|| < r$, $a + x \in K$ et donc par inégalité de Minkowski et avec $q(-a) = q(a)$ on obtient $\sqrt{q(x)} \leqslant \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(-a)} \leqslant 2$. Ainsi si $||x|| \leqslant 1$, $|q(x)| = q(x) = \frac{4}{r^2} q(\frac{rx}{2}) \leqslant \frac{16}{r^2}$ d'où $N(q) \leqslant \frac{16}{r^2}$.
- $\mathcal{A}$ est non vide : puisque K est compact il est borné par $M > 0$, et donc $q_0(x) = \frac{||x||^2}{M^2}$ convient.

Ainsi $q \mapsto D(q)$ est continue (par continuité du déterminant) sur $\mathcal{A}$ compact non vide, et donc admet un maximum $q_1 \in \mathcal{A}$. Or puisque $D(q_0) > 0$ car q_0 est définie positive, $D(q_1) > 0$ et $q_1 \in \mathcal{Q}_{++}$: on a prouvé l'existence.

Étape 3 : unicité. Soit q_1, q_2 deux telles formes quadratiques de $\mathcal{A}$. On suppose par l'absurde qu'elles sont différentes. Soit S_1 et S_2 leurs matrices dans la base canonique. Par convexité de $\mathcal{A}$, $\frac{q_1+q_2}{2} \in \mathcal{A}$ et est de matrice $\frac{S_1+S_2}{2}$ dans la base canonique. Alors, d'après

1. Ici on utilise un résultat plus fort que l'existence d'une base dans laquelle la forme quadratique est diagonale : la base peut être choisie orthonormée. C'est cependant différent du résultat de réduction des formes quadratique réelle, qui dit que la matrice peut être mise sous forme diagonale avec des 1 sur la diagonale, mais la base n'est alors pas forcément orthonormée

le lemme,

$$D\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right) = \det \frac{S_1+S_2}{2} > (\det S_1)^{1/2}(\det S_2)^{1/2} = \sqrt{D(q_1)}\sqrt{D(q_2)} = D(q_1)$$

et on obtient une absurdité. $\square$

Application 4. *Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $q \in \mathcal{Q}_{++}$ telle que $G \subset O(q)$.*

Démonstration. Soit B la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et $K = \{g(x), x \in B, g \in G\}$ qui est un compact comme image continue de $G \times B$ compact et d'intérieur non vide puisque $B \subset K$ pour un $g = \mathrm{id}$. On applique le théorème précédent pour trouver $q \in \mathcal{Q}_{++}$ telle que $K \subset \mathcal{E}_q$. Soit maintenant $g \in G$ et $q' : x \mapsto q(g(x))$ qui est une forme quadratique définie positive. On a $K \subset \mathcal{E}_{q'}$ car $g(K) = K$ et $|\det(g)| = 1$ puisque det est borné sur G compact donc sur $\{g^p, p \in \mathbb{Z}\}$. Alors $D(q) = D(q')$ et donc par unicité dans le théorème précédent, $q' = q(g) = q$ et donc $g \in O(q)$. $\square$

Remarque. On peut montrer que ce sont même tous les sous-groupes compacts maximaux de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, cf H2G2.

Théorème 5 (pseudo réduction simultanée)**.** *Soit A, B des matrices symétriques définies positives. Alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que*

$${}^tPAP = I_n \quad et \quad {}^tPBP = D$$

où D est une matrice diagonale dont tous les coefficients sont strictement positifs.

Démonstration. Puisque A définit un produit scalaire, il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tQAQ = I_n$. D'autre part ${}^tQBQ$ est encore symétrique et donc d'après le théorème spectral, il existe $R \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tR\,{}^tQAQR = D$ où D est une matrice diagonale dont tous les coefficients sont strictement positifs. On peut alors conclure en prenant $P := QR$. $\square$