3.18 Théorème de Hadamard-Lévy

Référence : H. Queffélec, C. Zuily, *Éléments d'Analyse*, Dunod, 2002.

Leçons concernées : 203, 204, 214, 215, 220.

Théorème 1. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$. On a équivalence entre :*

(i) f est une $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$

(ii) f est propre et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $df(x)$ est inversible.

Démonstration. Le sens direct (i) $\Rightarrow$ (ii) est facile puisque la continuité de f^{-1} nous donne le caractère propre de f et la différentiation des fonctions composées appliquée à $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ implique l'inversibilité de $df(x)$ en tout point.

Pour le sens réciproque, on remarque que grâce au théorème d'inversion globale, il nous suffit de montrer que f est bijective. Pour cela, on montre que $S = f^{-1}(\{0\})$ est un singleton, ce qui, en l'appliquant à $x \mapsto f(x) - y$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ conclura la preuve.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ on considère le problème de Cauchy

$$(1) : \begin{cases} u' = -df(u)^{-1}(f(u)) \\ u(0) = x \end{cases}$$

et le flot associé $\varphi(x,t)$ défini sur $\bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} \{x\} \times I_x$, où I_x maximal pour la condition initiale x par théorème de Cauchy-Lipschitz local puisque $z \mapsto -df(z)^{-1}(f(z))$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Étape 1 : soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors si $I_x =]T_*, T^*[$, on a $T^* = +\infty$. En effet, on considère la fonction

$$g : \begin{array}{ccc}]T_*, T^*[& \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & f \circ \varphi(x,t) \end{array}$$

dérivable sur I_x de dérivée : $g'(t) = df(\varphi(x,t))\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t)\Big) = -f(\varphi(x,t)) = -g(t)$ et donc $g(t) = g(0)e^{-t} = f(x)e^{-t}$. Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\varphi(x,t) \in f^{-1}\big(g([0, T^*[)\big) \subset f^{-1}\Big(\overline{B}\big(0, ||f(x)||\big)\Big)$$

or ce dernier ensemble est compact puisque f est propre. On conclut par le lemme de sortie de tout compact.

Étape 2 : tout $y \in S$ est un équilibre asymptotiquement stable. Il est clair que y est une équilibre. D'autre part, par le théorème d'inversion locale, quitte à restreindre, il existe U_y un voisinage de y et $\varepsilon_y > 0$ tels que f induise un difféomorphisme de U_y sur $B(0, \varepsilon_y)$. Soit maintenant $t_0 \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(x, t_0) \in U_y$. Puisque

$$e^{-t_0} f(x) = f \circ \varphi(x, t_0) \in f(U_y) = B(0, \varepsilon_y),$$

pour tout $t \geqslant t_0$, $e^{-t}f(x) = f \circ \varphi(x,t) \in B(0, \varepsilon_y)$ et donc pour tout $t \geqslant t_0$,

$$\varphi(x,t) = f_{|U_y}^{-1}\big(f \circ \varphi(x,t)\big) = f_{|U_y}^{-1}\big(e^{-t}f(x)\big) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} f_{|U_y}^{-1}(0) = y.$$

On pose maintenant, pour $y \in S$, $W_y = \left\{x \in \mathbb{R}^n, \varphi(x,t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} y\right\}$.

Étape 3 : on a $\mathbb{R}^n = \bigcup_{y \in S} W_y$. En effet, soit $x \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $k \geqslant 0$, $\varphi(x,k) \in f^{-1}\Big(\overline{B}\big(0, ||f(x)||\big)\Big)$ qui est compact, donc, quitte à extraire, $\varphi(x,k) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} y \in \mathbb{R}^n$. Or, par continuité,

$$f(y) = \lim_k f \circ \varphi(x,k) = \lim_k e^{-k} f(x) = 0$$

et donc $y \in S$. Ainsi il existe $k_0 \geqslant 0$ tel que $\varphi(x,k_0) \in U_y$ et l'étape 2 nous donne $\varphi(x,t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} y$ et donc $x \in W_y$.

Étape 4 : pour $y \in S$, $W_y = \left\{x \in \mathbb{R}^n, \varphi(x,t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} y\right\}$ est un ouvert non vide. En effet, $u(t) = y$ est solution de (1) puisque $f(y) = 0$, et donc $y = \varphi(y,t)$ et $y \in W_y$. D'autre part,

$$W_y = \bigcup_{t \geqslant 0} \varphi(\,.\,,t)^{-1}(U_y).$$

En effet, si $x \in W_y$, il existe $t_0 > 0$ tel que $\varphi(x,t_0) \in U_y$. Réciproquement, si il existe $t_0 > 0$ tel que $\varphi(x,t_0) \in U_y$, par l'étape 2, $\varphi(x,t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} y$.

Étape 5 : on a écrit $\mathbb{R}^n$ comme une union d'ouverts disjoints (par unicité de la limite) non vides : $\mathbb{R}^n = \bigcup_{y \in S} W_y$ et donc, par connexité de $\mathbb{R}^n$, $|S| = 1$. □

Application 2. *L'application*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \left(\dfrac{x\exp(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2}, \dfrac{y\exp(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2}\right) \end{array}$$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global.

Démonstration. Il est facile de voir que f est propre et de classe $\mathcal{C}^2$ et un logiciel de calcul formel nous permet de montrer que la différentielle est en tout point inversible. □

Commentaire : dans la référence, il est d'abord montré que S est fini et non vide, mais il semblerait que ce n'est pas nécessaire.