3.8 Formule sommatoire de Poisson

Référence : X. Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*, Ellipses, 2008.

Leçons concernées : 246, *241, 250.*

Théorème 1. *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors pour x dans $\mathbb{R}$,*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{2i\pi nx}$$

où on a noté $\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi yt}dt$ pour $y \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Étape 1 : la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$. En effet, puisque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe $C > 0$ telle que $|f(x)| \leqslant \frac{C}{x^2}$ pour $|x| \geqslant 1$, et donc pour tout $K > 0$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| > K$, et tout $x \in [-K, K]$,

$$|f(x+n)| \leqslant \frac{C}{|x+n|^2} \leqslant \frac{C}{(|n|-|x|)^2} \leqslant \frac{C}{(|n|-K)^2}$$

qui est le terme général d'une série convergente. On note alors $G(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ la somme de la série.

Un raisonnement analogue nous montre que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+n)$ converge également normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$, et donc par le théorème de dérivation des suites de fonctions, G est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $G'(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+n)$.

Enfin, G est 1-périodique. En effet, on a

$$G(x+1) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n+1) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} f(x+p) = G(x)$$

par changement d'indice $p = n+1$.

Étape 2 : on obtient grâce à l'étape précédente que G est somme de sa série de Fourier qui converge normalement. On calcule alors ses coefficients de Fourier :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c_k(G) &= \int_0^1 G(t)e^{-2i\pi kt}\,dt = \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n)e^{-2i\pi kt}\,dt \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t+n)e^{-2i\pi kt}\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(t)e^{-2i\pi kt}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi kt}\,dt
\end{aligned}$$

où on a interverti puisque G converge normalement, et la dernière somme converge puisque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On obtient alors le résultat annoncé. □

Corollaire 2. *On définit*

$$\theta(s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s}$$

pour $s > 0$*. On déduit de la formule sommatoire de Poisson que*

$$\forall s > 0, \quad \theta(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\theta(1/s).$$

Démonstration. On applique la formule sommatoire de Poisson en $x = 0$ à la fonction $f : x \mapsto e^{-\pi s x^2}$ pour $s > 0$. On a, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi s t^2} e^{-2i\pi n t} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi s}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{-2i\pi n t/\sqrt{\pi s}} dt = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{\pi n^2/s}$$

et donc

$$\forall s > 0, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/s}$$

d'où le résultat. □

Commentaire : c'est assez court, si besoin calculer la transformée de Fourier de la gaussienne.